Quantenfeldtheorie II

Priv.-Doz. Dr. M. Buballa
D. Nitt und M. J. Steil

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wintersemester 2019/2020
5. Übungsblatt — 17. Januar 2020

Aufgabe 14: Renormierung der pseudo-skalaren Yukawa Theorie

Betrachten Sie die Lagrangedichte der pseudo-skalaren Yukawa Theorie in vier Raum-Zeit-Dimensionen

$$\mathcal{L}_0 \equiv \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_0)^2 - \frac{1}{2}m_{\phi,0}^2\phi_0^2 + \bar{\psi}_0(\mathrm{i}\partial\!\!\!/ - m_{\psi,0})\psi_0 - \mathrm{i}g_0\bar{\psi}_0\gamma^5\psi_0\phi_0. \tag{14.1}$$

Der oberflächliche Divergenzgrad D ist wie für QED gegeben durch

$$D = 4 - N_\phi - \frac{3}{2}N_\psi, \tag{14.2}$$

wobei N_ϕ und N_ψ jeweils der Anzahl der externen pseudo-skalaren bzw. fermionischen Beinen entspricht.

a) Bestimmen Sie die sieben oberflächlich divergenten 1PI-Amplituden.

b) Zeigen Sie, dass die pseudo-skalare Ein-Punkt und Drei-Punkt Funktion auf Grund der Invarianz der Lagrangedichte unter der Paritätstransformation $\psi(t,\vec{x}) \to \gamma^0\psi(t,-\vec{x})$, $\phi(t,\vec{x}) \to -\phi(t,-\vec{x})$ verschwinden.

c) Die divergente Null-Punkt Funktion verursacht eine Verschiebung der Vakuumenergie, welche in dieser Aufgabe nicht weiter betrachtet werden soll. Damit verbleiben noch vier oberflächlich divergente Amplituden aus Aufgabenteil a). Zeigen Sie, dass eine skalare Selbstwechselwirkung

$$\delta\mathcal{L}_0 = \frac{\lambda_0}{4!}\phi_0^4 \tag{14.3}$$

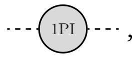
für die Renomierung der Theorie nötig ist.

d) Führen Sie renormierte Felder $\phi = Z_\phi^{-1/2}\phi_0$ und $\psi = Z_\psi^{-1/2}\psi_0$ ein und zeigen Sie, dass mit der Einführung geeigneter Counterterme die renormierte Lagrangedichte durch

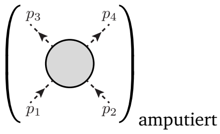
$$\begin{aligned}\mathcal{L} = &\frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2}m_\phi^2\phi^2 + \bar{\psi}(\mathrm{i}\partial\!\!\!/ - m_\psi)\psi - \mathrm{i}g\bar{\psi}\gamma^5\psi\phi - \frac{\lambda}{4!}\phi^4\\ &+ \frac{1}{2}\delta_\phi(\partial_\mu\phi)^2 - \frac{1}{2}\delta_{m_\phi}\phi^2 + \bar{\psi}(\mathrm{i}\delta_\psi\partial\!\!\!/ - \delta_{m_\psi})\psi - \mathrm{i}g\delta_g\bar{\psi}\gamma^5\psi\phi - \frac{\delta_\lambda}{4!}\phi^4\end{aligned} \tag{14.4}$$

gegeben ist.

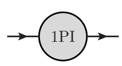
e) Verwenden Sie dimensionale Regularisierung zur Berechnung der divergenten Beiträge zu δ_ϕ, δ_{m_ϕ}, δ_ψ, δ_{m_ψ}, δ_g und δ_λ in Ein-Loop Ordnung unter Verwendung folgender Renormierungsbedingungen

$-\mathrm{i}M^2(p^2) \equiv$ 

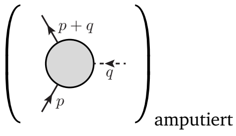
$, \qquad M^2(p^2)\big|_{p^2=m_\phi^2} \stackrel{!}{=} 0, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p^2}M^2(p^2)\big|_{p^2=m_\phi^2} \stackrel{!}{=} 0, \qquad (14.5)$

$\mathrm{i}\mathcal{M}(p_1p_2 \to p_3p_4) \equiv$ 

$\stackrel{!}{=} -\mathrm{i}\lambda, \quad \text{bei } s = 4m_\phi^2,\ t = u = 0$[1]$, \qquad (14.6)$

$-\mathrm{i}\Sigma(p\!\!\!/) \equiv$ 

$, \qquad \Sigma(p\!\!\!/)\big|_{p\!\!\!/=m_\psi} \stackrel{!}{=} 0, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p\!\!\!/}\Sigma(p\!\!\!/)\big|_{p\!\!\!/=m_\psi} \stackrel{!}{=} 0, \qquad (14.7)$

$-\mathrm{i}g\Gamma^5(p+q,q) \equiv$ 

$, \qquad \Gamma^5(p+q,q)\big|_{q=0} \stackrel{!}{=} \gamma^5. \qquad (14.8)$

[1] Mit den Mandelstam-Variablen (siehe Aufgabe 1): $s \equiv (p_1+p_2)^2$, $t \equiv (p_1-p_3)^2$ und $u \equiv (p_1-p_4)^2$.

Aufgabe 15: Gross-Neveu Modell in zwei Raum-Zeit Dimensionen

Betrachten Sie die Lagrangedichte des sog. Gross-Neveu[2] (GN) Models in **zwei** Raum-Zeit Dimensionen

$$\mathcal{L}[\bar{\psi},\psi] \equiv \sum_{i=0}^{N_f} \bar{\psi}_i \mathrm{i}\partial\!\!\!/ \psi_i + \frac{g^2}{2N_f}\left(\sum_{i=0}^{N_f} \bar{\psi}_i \psi_i\right)^2 \tag{15.1}$$

mit N_f wechselwirkenden Fermion Arten/„flavours". Im Folgenden ist Summation über $i = 1,\dots,N_f$ mittels einer Summenkonvention impliziert. Der kinetische Term der zwei-dimensionalen Fermionen ist über Matrizen γ^μ, $\mu \in \{0,1\}$, konstruiert, welche die zwei-dimensionale Dirac-Algebra erfüllen. Eine mögliche Darstellung über 2×2 Matrizen ist durch die Pauli-Matrizen gegeben

$$\gamma^0 \equiv \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \gamma^1 \equiv \mathrm{i}\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}. \tag{15.2}$$

Zu γ^μ kann eine anti-kommutierende Matrix γ^5 über

$$\gamma^5 \equiv \gamma^0\gamma^1 = \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{15.3}$$

definiert werden.

a) Zeigen Sie, dass das GN Model invariant unter der diskreten globalen Transformation

$$\psi_i \to \gamma^5 \psi_i \tag{15.4}$$

ist. Argumentieren Sie des Weiteren, dass diese $\mathbb{Z}_2$ Symmetrie mit einem Massenterm für die Fermionen in der Lagrangedichte inkompatibel ist.

b) Zeigen Sie durch Analyse der Dimensionen in Gl. (15.1), dass das GN Model in zwei Dimensionen renormierbar ist.

c) Zeigen Sie

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[0] &= \int \mathcal{D}\psi\mathcal{D}\bar{\psi} \exp\left[\mathrm{i}\int \mathrm{d}^2x\, \mathcal{L}[\bar{\psi},\psi]\right] & (15.5)\\ &= \mathcal{N}\int \mathcal{D}\psi\mathcal{D}\bar{\psi}\mathcal{D}\varphi \exp\left[\mathrm{i}\int \mathrm{d}^2x \left\{\bar{\psi}_i \mathrm{i}\partial\!\!\!/ \psi_i - \varphi\bar{\psi}_i\psi_i - \frac{N_f}{2g^2}\varphi^2\right\}\right] & (15.6)\\ &= \mathcal{N}\int \mathcal{D}\varphi \exp\left[\mathrm{i}N_f\int \mathrm{d}^2x\, \mathcal{L}[\varphi]\right], \quad \text{mit} \quad \mathcal{L}[\varphi] \equiv -\frac{\varphi^2}{2g^2} - \mathrm{i}\ln\det(\mathrm{i}\partial\!\!\!/ - \varphi), & (15.7) \end{aligned}$$

mit dem bosonischen Hilfsfeld $\varphi(x)$ sowie $\mathcal{D}\psi \equiv \prod_i \mathcal{D}\psi_i$, $\mathcal{D}\bar{\psi} \equiv \prod_i \mathcal{D}\bar{\psi}_i$ und der nicht weiter relevanten Normierung $\mathcal{N}$.

Hinweis: Schieben Sie zuerst eine Eins als funktionales Gauss'sches Integral über ein bosonisches Hilfsfeld φ' ein und führen Sie anschließend eine Verschiebung von φ' durch, um die quartische Kopplung $(\bar{\psi}_i\psi_i)^2$ zu eliminieren.

d) Berechnen Sie das effektive Potential $V_{\mathrm{eff}}(\varphi_{\mathrm{cl}})/N_f$ im Grenzfall $N_f \to \infty$ unter der Annahme x-unabhängiger Vakuumserwartungswerte $\langle\varphi\rangle = \varphi_{\mathrm{cl}}$ für verschwindende Quellen unter Verwendung eines scharfen Impuls-Cutoffs Λ. Zeigen Sie

$$V_{\mathrm{eff}}(\varphi_{\mathrm{cl}})/N_f = \frac{1}{2g^2}\varphi_{\mathrm{cl}}^2 + \frac{1}{4\pi}\varphi_{\mathrm{cl}}^2(\ln(\varphi_{\mathrm{cl}}^2/\Lambda^2) - 1). \tag{15.8}$$

e) Bestimmen Sie das Minimum des effektiven Potentials aus Gl. (15.8) und machen Sie sich klar, dass der berechnete Grundzustand die $\mathbb{Z}_2$ Symmetrie aus Teilaufgabe a) spontan bricht.

[2] [D. J. Gross and A. Neveu, *Dynamical symmetry breaking in asymptotically free field theories*, Phys. Rev. D. (1974) **10** (10)]