Quantenfeldtheorie II

Priv.-Doz. Dr. M. Buballa

D. Nitt und M. J. Steil

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wintersemester 2019/2020

7. Übungsblatt — 14. Februar 2020

Aufgabe 19: Die Beta-Funktion und laufende Kopplung der Quantenchromodynamik

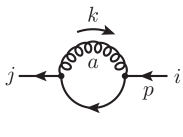
In dieser Aufgabe wollen wir die Beta-Funktion und die laufende Kopplung der Quantenchromodynamik (QCD) mit N_f Quark Flavours in Feynman-'t Hooft Eichung ($\xi = 1$) zu Ein-Loop Ordnung mit dimensionaler Regularisierung berechnen[1]. Hierzu gilt es zunächst die divergenten Ein-Loop Beiträge zur Quark-Selbstenergie, zum Quark-Gluon-Vertex und zur Gluon-Selbstenergie zu berechnen. Quark Massen können in den folgenden Rechnungen vernachlässigt werden, da Divergenzen in Wellenfunktions-Renomierung unter Verwendung von dimensionaler Regularisierung unabhängig von der Fermion Masse sind. Verwenden Sie für die im Folgenden auftretenden Integrale die Identitäten

$$\int \frac{\mathrm{d}^d l}{(2\pi)^d} \frac{1}{(l^2+\Delta)^n} = \mathrm{i}\frac{(-1)^n}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(n-d/2)}{\Gamma(n)} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{n-d/2}, \tag{19.1}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}^d l}{(2\pi)^d} \frac{l^2}{(l^2+\Delta)^n} = \mathrm{i}\frac{(-1)^{n-1}}{(4\pi)^{d/2}} \frac{d}{2} \frac{\Gamma(n-1-d/2)}{\Gamma(n)} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{n-1-d/2}. \tag{19.2}$$

a) Berechnen Sie den divergente Beitrag zur Fermion-Selbstenergie zu Ein-Loop-Ordnung

$$(-\mathrm{i}\Sigma(\not{p}))^j{}_i \equiv \tag{19.3}$$



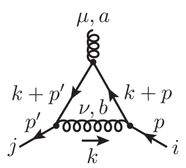
Der oberflächliche Divergenzgrad dieses Diagrams ist $D = 1$. Zeigen Sie

$$(-\mathrm{i}\Sigma(\not{p}))^j{}_i = \frac{\mathrm{i}g^2}{(4\pi)^2} \not{p} C_2 \delta^j{}_i \Gamma(2-d/2) + \ldots = \frac{\mathrm{i}g^2}{(4\pi)^2} \not{p} C_2 \delta^j{}_i \ln\left(\Lambda^2/M^2\right) + \ldots, \tag{19.4}$$

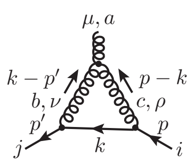
unter Verwendung von $C_2 \delta^j{}_i = (T^a T^a)^j{}_i$. Hinweis: Das auftretende Impulsintegral und die Dirac-Spur wurden mehrfach in Vorlesung und Übung thematisiert, siehe z.B. Aufgabe 14e)(vi).

b) Berechnen Sie den divergente Beitrag zum Quark-Gluon-Vertex zu Ein-Loop-Ordnung

$$(-\mathrm{i}g\Gamma^{\mu,a})^j{}_i \equiv (-\mathrm{i}g\Gamma_1^{\mu,a})^j{}_i + (-\mathrm{i}g\Gamma_2^{\mu,a})^j{}_i \equiv \tag{19.5}$$



$+$



Der oberflächlichem Divergenzgrad ist $D = 0$ und die auftretende Divergenz ist logarithmisch, daher können die externen Impulse bei der Berechnung vernachlässigt werden. Zeigen Sie

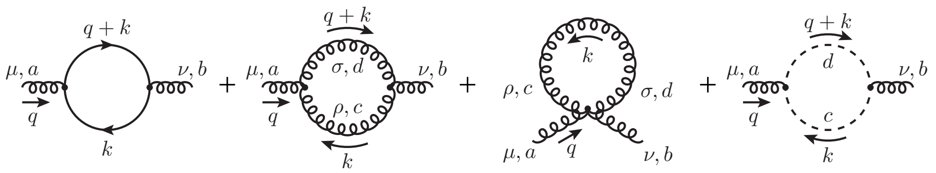
$$(-\mathrm{i}g\Gamma^{\mu,a})^j{}_i = \frac{\mathrm{i}g^3}{(4\pi)^2} (C_2 + C_2(G)) (T^a)^j{}_i \gamma^\mu \ln\left(\Lambda^2/M^2\right) + \ldots, \tag{19.6}$$

unter Verwendung von $C_2(G)\delta^{ab} = f^{acd} f^{bcd}$.

[1] Für diese Rechnung wurden David Gross, David Politzer und Frank Wilczek 2004 mit dem Nobelpreis für Physik ausgezeichnet. Die entsprechenden Veröffentlichungen aus dem Jahr 1973 sind [D. J. Gross und F. Wilczek, *"Ultraviolet Behavior of Non-Abelian Gauge Theories"*, Phys. Rev. Letters **30** 1343 (1973)] und [H. D. Politzer, *"Reliable Perturbative Results for Strong Interactions"*, Phys. Rev. Letters **30** 1346 (1973)].

c) Es gibt vier Ein-Loop Beiträge mit oberflächlichem Divergenzgrad $D = 2$ zur Gluon Selbstenergie

$$\mathrm{i}(\Sigma^{\mu\nu}(q))^{ab} \equiv \tag{19.7}$$



$$\equiv \quad \mathrm{i}(\Sigma_1^{\mu\nu}(q))^{ab} \quad + \quad \mathrm{i}(\Sigma_2^{\mu\nu}(q))^{ab} \quad + \quad \mathrm{i}(\Sigma_3^{\mu\nu}(q))^{ab} \quad + \quad \mathrm{i}(\Sigma_4^{\mu\nu}(q))^{ab}. \tag{19.8}$$

i) Verwenden Sie die Ergebnisse aus Aufgabe 13, um

$$\mathrm{i}(\Sigma_1^{\mu\nu}(q))^{ab} = \mathrm{i}(q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu)\delta^{ab}\left(\frac{-g^2}{(4\pi)^2}\frac{4}{3}N_f C \ln(\Lambda^2/M^2) + \ldots\right) \tag{19.9}$$

unter Verwendung von $\mathrm{Tr}(T^a T^b) = C\delta^{ab}$ zu zeigen.

ii) Berechnen Sie die verbleibenden Beiträge $\mathrm{i}(\Sigma_2^{\mu\nu}(q))^{ab}$, $\mathrm{i}(\Sigma_3^{\mu\nu}(q))^{ab}$ und $\mathrm{i}(\Sigma_4^{\mu\nu}(q))^{ab}$ nach Einführung geeigneter Feynman-Parameter mit Hilfe der Identitäten aus Gl. (19.1) und Gl. (19.2).

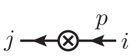
Zeigen Sie anschließend für die Summe

$$\sum_{j=2}^{4}\mathrm{i}(\Sigma_j^{\mu\nu}(q))^{ab} = \mathrm{i}(q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu)\frac{g^2}{(4\pi)^{d/2}}C_2(G)\delta^{ab}\Gamma(2-d/2)\int_0^1 \mathrm{d}x\,\frac{(1-d/2)(1-2x)^2+2}{\Delta^{2-d/2}} \tag{19.10}$$

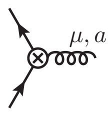
$$= \mathrm{i}(q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu)\delta^{ab}\left(\frac{-g^2}{(4\pi)^2}\left(-\frac{5}{3}\right)C_2(G)\ln(\Lambda^2/M^2) + \ldots\right), \tag{19.11}$$

mit $\Delta \equiv -x(1-x)q^2$.

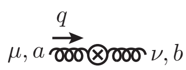
d) Verwenden Sie die Ergebnisse der bisherigen Teilaufgaben zur Bestimmung der drei Counterterme δ_1, δ_2 und δ_3 mit



$= \mathrm{i}\not{p}\,\delta_2,$



$= \mathrm{i}g T^a \gamma^\mu \delta_1,$



$= -\mathrm{i}(q^2 g^{\mu\nu} + q^\mu q^\nu)\delta^{ab}\delta_3. \quad (19.12)$

e) Berechnen Sie analog zu Aufgabe 16 die Beta-Funktion für g mittels

$$\beta(g) = gM\frac{\partial}{\partial M}(-\delta_1 + \delta_2 + \tfrac{1}{2}\delta_3) \tag{19.13}$$

mit Hilfe der in Teilaufgabe d) bestimmten Counterterme. Zeigen Sie, dass

$$\beta(g) = -\frac{g^3}{(4\pi)^2}\left(\frac{11}{3}C_2(G) - \frac{4}{3}N_f C\right). \tag{19.14}$$

f) Verifizieren Sie die in der Aufgabe eingeführten Identitäten

$$C_2\delta^j{}_i = (T^a T^a)^j{}_i \tag{19.15}$$

$$C_2(G)\delta^{ab} = f^{acd}f^{bcd} \tag{19.16}$$

$$\mathrm{Tr}(T^a T^b) = C\delta^{ab} \tag{19.17}$$

und zeigen Sie $C_2 = \frac{4}{3}$, $C_2(G) = 3$, $C = \frac{1}{2}$ für $SU(3)$ mit Hilfe der fundamentalen Darstellung $T^a = \lambda^a/2$ über die Gell-Mann-Matrizen λ^a.

g) Verwenden Sie die Ergebnisse der Teilaufgaben e) und f), um die laufende Kopplungskonstante der QCD

$$\alpha_S(M) \equiv \frac{\bar{g}^2(M)}{4\pi} = \frac{4\pi}{(11 - 2N_f/3)\ln(M^2/\tilde{M}_0^2)}, \tag{19.18}$$

mit einer geeigneten Konstante $\tilde{M}_0^2$ zu bestimmen.