allgemeine n-Punkt-Funktionen:

$$G_R^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \langle \Omega | T(\phi(x_1) \dots \phi(x_n)) | \Omega \rangle$$

$$= Z_\phi^{-\frac{n}{2}} \langle \Omega | T(\phi_0(x_1) \dots \phi(x_n)) | \Omega \rangle = Z_\phi^{-\frac{n}{2}} G^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$$

$\rightarrow$ Impulsraum:

$$G_R^{(n)}(p_1, \dots, p_n) = Z_\phi^{-\frac{n}{2}} G^{(n)}(p_1, \dots, p_n)$$

amputierte n-Punkt-Funktionen

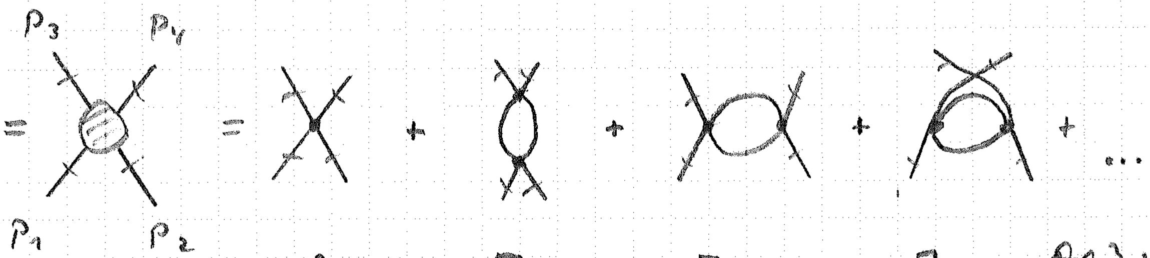
$\rightarrow$ entferne die (gedressten) externen Propagatoren

$$\Gamma_{(R)}^{(n)}(p_1, \dots, p_n) = D_{(R)}^{-1}(p_1) \dots D_{(R)}^{-1}(p_n)\, G_{(R)}^{(n)}(p_1, \dots, p_n)$$

$D_R^{-1} = Z_\phi D^{-1}$

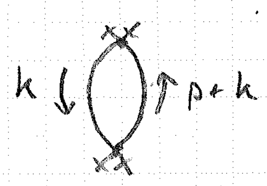
$$\Rightarrow \quad \Gamma_R^{(n)}(p_1, \dots, p_n) = Z_\phi^{n/2}\, \Gamma^{(n)}(p_1, \dots, p_n)$$

<u>gedresster Vertex</u> = amputierte 4-Punkt-Funktion:

$\Gamma^{(4)}(p_1, \dots, p_4) =$ 

$$= -i\lambda_0 + \Gamma_a + \Gamma_b + \Gamma_c + \mathcal{O}(\lambda_0^3)$$

$$\Gamma_a = \frac{1}{2}(-i\lambda_0)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{(k+p)^2 - m_0^2 + i\varepsilon} \frac{i}{k^2 - m_0^2 + i\varepsilon}$$



$p = p_1 + p_2 = p_3 + p_4$

$$= \frac{1}{2}(-i\lambda_0)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{(k+p)^2 - m^2 + i\varepsilon} \frac{i}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} + \mathcal{O}(\lambda_0^3)$$

da $m_0^2 = m^2 + \mathcal{O}(\lambda_0)$

$D = 4 - 2 \cdot 2 = 0 \quad \rightsquigarrow$ logarithmisch divergent

Feynman - Parameter - Formel:

$$\frac{1}{ab} = \int_0^1 dx \, \frac{1}{[ax + b(1-x)]^2}$$ (Beweis: Integral ausrechnen)

$$\Rightarrow \Gamma_a = \frac{1}{2} \lambda_0^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx \, \frac{1}{[k^2 + 2k\cdot p\, x + p^2 x - m^2 + i\varepsilon]^2}$$

Subst.: $l := k + px$

$$\Rightarrow \Gamma_a = \frac{1}{2} \lambda_0^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \, \frac{1}{[l^2 + p^2 x(1-x) - m^2 + i\varepsilon]^2} \equiv \Gamma(p^2)$$

$\Rightarrow \Gamma_a = \Gamma(s)$, $\Gamma_b = \Gamma(t)$, $\Gamma_c = \Gamma(u)$

mit
$$\left.\begin{aligned} s &:= (p_1+p_2)^2 = (p_3+p_4)^2 \\ t &:= (p_1-p_3)^2 = (p_2-p_4)^2 \\ u &:= (p_1-p_4)^2 = (p_2-p_3)^2 \end{aligned}\right\}$$ „Mandelstam-Variable" (Lorentz-invariant)

Bemerkung:
Bei der obigen Substitution haben wir angenommen, dass es keine Oberflächenbeiträge zum Integral gibt. Dies wäre nicht erfüllt, wenn wir die k-Integration abgeschnitten hätten.

→ anderes Regularisierungsverfahren

Pauli - Villars - Regularisierung:

$$\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} f(m) \longrightarrow \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \sum_{i=1}^{2} c_i \, f(m_i)$$

mit $c_1 = 1$, $m_1 = m$

$c_2 = -1$, $m_2 = M \gg m$ (irrelevant für kleine k, unterdrückt Integranden bei großen k)

(quadrat. Divergenz: $\sum_{i=1}^{3} c_i \ldots$)

Entwickle um Renormierungspunkt (s_0, t_0, u_0):

$$\Gamma(s) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{log. divergent}}}{\Gamma(s_0)} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{endlich}}}{\tilde{\Gamma}(s)} \quad , \quad \Gamma(t) = \ldots \quad , \quad \Gamma(u) = \ldots$$

$$\Rightarrow \Gamma^{(4)}(p_1, \ldots, p_4) = \underbrace{-i\lambda_0 + \Gamma(s_0) + \Gamma(t_0) + \Gamma(u_0)}_{=: -i Z_\lambda^{-1} \lambda_0} + \underbrace{\tilde{\Gamma}(s) + \tilde{\Gamma}(t) + \tilde{\Gamma}(u)}_{\text{endlich}}$$

„Vertex - Renormierungskonstante"

$\Rightarrow$ renormierte Vertexfunktion:

$$\Gamma_R^{(4)}(p_1, \ldots, p_4) = Z_\phi^2 \, \Gamma^{(4)}(p_1, \ldots, p_4)$$

$$= \underbrace{-i Z_\lambda^{-1} Z_\phi^2 \lambda_0}_{\substack{\text{am Renormierungs-} \\ \text{punkt gemessene} \\ \text{Kopplungsstärke:}}} + Z_\phi^2 \underbrace{\left[\tilde{\Gamma}(s) + \tilde{\Gamma}(t) + \tilde{\Gamma}(u)\right]}_{\substack{\text{verschwindet am} \\ \text{Renormierungspunkt}}}$$

$$\left| \mathcal{M}(p_1, p_2 \to p_3, p_4) \right|^2 \Big|_{\substack{s = s_0 \\ t = t_0 \\ u = u_0}} = \left| Z_\lambda^{-1} Z_\phi^2 \lambda_0 \right|^2$$

$\Rightarrow$ physikal. Kopplungskonstante am Renormierungspunkt: $\boxed{\lambda = Z_\lambda^{-1} Z_\phi^2 \lambda_0}$

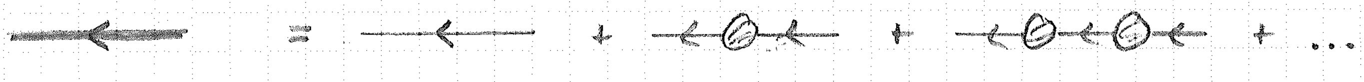
$$\Rightarrow \Gamma_R^{(4)}(p_1, \ldots, p_4) = -i\lambda + Z_\phi^2 \left[\tilde{\Gamma}(s) + \tilde{\Gamma}(t) + \tilde{\Gamma}(u)\right]$$

$$Z_\phi = 1 + \mathcal{O}(\lambda_0), \quad \tilde{\Gamma} = \mathcal{O}(\lambda_0^2), \quad \lambda = \lambda_0 + \mathcal{O}(\lambda_0^2)$$

$$\Rightarrow \boxed{\Gamma_R^{(4)}(p_1, \ldots, p_4) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Messwert am} \\ \text{Renormierungspkt.}}}{-i\lambda} + \underbrace{\tilde{\Gamma}(s) + \tilde{\Gamma}(t) + \tilde{\Gamma}(u)}_{\substack{\text{nicht-triviale Aussage der} \\ \text{Theorie über die Kopplungsstärke} \\ \text{an anderen kinematischen Punkten}}} + \mathcal{O}(\lambda^3)}$$

VII, 2 Loop-Korrekturen in der QED

1. gedresster Elektron-Propagator

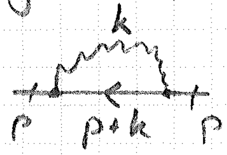


$$iS(p) = iS_0(p) + iS_0(p)\left(-i\Sigma(p)\right) iS(p)$$

$$\Leftrightarrow \quad S^{-1}(p) = S_0^{-1}(p) - \Sigma(p)$$

$$= \not p - m_0 - \Sigma(p) + i\varepsilon$$

Selbstenergie ($\mathcal{O}(e^2)$)

$-i\Sigma(p) =$ 

$$= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} (-ie\gamma^\mu)\, iS_0(p+k)(-ie\gamma^\nu)\, iD^{(0)}_{\mu\nu}(k)$$

$$\Rightarrow \quad \Sigma(p) = ie^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \gamma^\mu \frac{\not p + \not k + m_0}{(p+k)^2 - m_0^2 + i\varepsilon} \gamma^\nu \frac{-g_{\mu\nu}}{k^2 + i\varepsilon}$$

(Eigentlich müssten wir die nackte Kopplung e_0 verwenden, aber die stimmt in niedrigster Ordnung mit der physikal. Ladung e überein, s.u.)

Oberflächlicher Divergenzgrad:

$S_0(p) \sim \frac{1}{p} \quad \rightarrow D = -1$

$D^{(0)}_{\mu\nu}(k) \sim \frac{1}{k} \quad \rightarrow D = -2$

$\Rightarrow \quad D = 4 - 2 - 1 = 1 \quad \rightsquigarrow$ linear divergent

Aufgrund von Symmetrien ist die Divergenz aber nur logarithmisch allgemeine Struktur:

- 4x4-Matrix im Dirac-Raum
- kann nur von p abhängen
- keine ausgezeichnete Komponente

$\rightarrow \cancel{\gamma^\mu}, \cancel{p^\mu}, p^2 \checkmark, \not{p} = \gamma^\mu p_\mu \checkmark$

$$\Rightarrow \Sigma(p) = A(p^2)\not{p} + B(p^2)$$

$$\Rightarrow S^{-1}(p) = (1 - A(p^2))\not{p} - m_0 + B(p^2) + i\varepsilon$$

$$= (1 - A(p^2))\left[\not{p} - \frac{m_0 + B(p^2)}{1 - A(p^2)} + i\varepsilon\right]$$

$\Rightarrow$ Propagator hat Pol bei $p^2 = m^2$

mit $$m = \frac{m_0 + B(m^2)}{1 - A(m^2)}$$ Massenrenormierung

Wellenfunktionsrenormierungskonstante:

$$Z_2^{-1} := (1 - A(m^2))$$

$$\Rightarrow m = Z_2(m_0 + B(m^2))$$

$$\Sigma(p) = \Sigma\big|_{p^2 = m^2} + \tilde{\Sigma}(p)$$

$$\Rightarrow S(p) = \frac{Z_2}{\not{p} - m - \tilde{\Sigma}(p) + i\varepsilon}$$

renormierte Felder: $\psi_R = Z_2^{-\frac{1}{2}}\psi$

$$\Rightarrow S_R(p) = \frac{1}{\not{p} - m - \tilde{\Sigma}(p) + i\varepsilon}$$