$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} &\langle t_f, \vec{x}_f | t_i, \vec{x}_i \rangle = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\vec{x} \; \exp\{ i S[\vec{x}(t)] \} \\ &\text{sofern} \quad H(\hat{\vec{x}}, \hat{\vec{p}}) = \frac{\hat{\vec{p}}^2}{2m} + V(\hat{\vec{x}}) \\ &\text{mit } \mathcal{N} = \lim_{N \to \infty} \left(\frac{m}{2\pi i \delta t} \right)^{\frac{3N}{2}} = \lim_{N \to \infty} \left(\frac{N m}{2\pi i (t_f - t_i)} \right)^{\frac{3N}{2}} \\ &S = \int_{t_i}^{t_f} dt \; L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}) = \int_{t_i}^{t_f} dt \left(\frac{m}{2} \dot{\vec{x}}^2(t) - V(\vec{x}(t)) \right) \end{aligned}}$$

Als nächstes betrachten wir das Matrix-Element

$$\langle t_f, \vec{x}_f | \hat{X}_H^{\alpha_m}(t_m) \hat{X}_H^{\alpha_n}(t_n) | t_i, \vec{x}_i \rangle ,$$

wobei α_m und α_n die jeweiligen Komponenten des Ortsoperators bezeichnen.

Wir schreiben wieder $N-1$ vollständige Systeme ein und verwenden

$$\hat{X}_H^{\alpha_j}(t_j) | t_j, \vec{x}_j \rangle = x_j^{\alpha_j} | t_j, \vec{x}_j \rangle \equiv x^{\alpha_j}(t_j) | t_j, \vec{x}_j \rangle$$

Im letzten Schritt haben wir lediglich eine neue Notation

$$\vec{x}(t_j) \equiv \vec{x}_j$$

eingeführt, die praktischer ist, wenn wir am Ende den Limes $N \to \infty$ durchführen und die diskreten Zeitschritte kontinuierlich werden. Aber schon auf S. VIII-4 hat $\vec{x}_j$ ja den Ort zur Zeit t_j bezeichnet.

Für $t_f > t_m > t_n > t_i$ ergibt sich dann

$$\langle t_f, \vec{x}_f | \hat{x}_H^{\alpha_m}(t_m)\, \hat{x}^{\alpha_n}(t_n) | t_i, \vec{x}_i \rangle$$

$$= \int \prod_{k=1}^{N-1} d^3x_k \langle t_f, \vec{x}_f | t_{N-1}, \vec{x}_{N-1}\rangle \langle t_{N-1}, \vec{x}_{N-1} | t_{N-2}, \vec{x}_{N-2}\rangle \ldots$$
$$\ldots \langle t_{m+1}, \vec{x}_{m+1} | \hat{x}_H^{\alpha_m}(t_m) | t_m, \vec{x}_m \rangle \ldots$$
$$\ldots \langle t_{n+1}, \vec{x}_{n+1} | \hat{x}_H^{\alpha_n}(t_n) | t_n, \vec{x}_n \rangle \ldots \langle t_1, \vec{x}_1 | t_i, \vec{x}_i \rangle$$

$$= \int \prod_{k=1}^{N-1} d^3x_k \; x^{\alpha_m}(t_m)\, x^{\alpha_n}(t_n)$$
$$\times \langle t_f, \vec{x}_f | t_{N-1}, \vec{x}_{N-1}\rangle \ldots \langle t_1, \vec{x}_1 | t_i, \vec{x}_i \rangle$$

$$= \int \mathcal{D}\vec{p}\, \mathcal{D}\vec{x} \; x^{\alpha_m}(t_m)\, x^{\alpha_n}(t_n) \exp\left\{ i \int_{t_i}^{t_f} dt \left[\vec{p}\cdot\dot{\vec{x}} - H(\vec{x},\vec{p}) \right] \right\}$$

Für $t_n > t_m$ (also $t_f > t_n > t_m > t_i$) funktioniert das nicht auf diese Weise, da die eingeschobenen vollständigen Systeme zeitlich geordnet sind. In diesem Fall könnten wir aber das Matrixelement $\langle t_f, \vec{x}_f | \hat{x}_H^{\alpha_n}(t_n)\, \hat{x}^{\alpha_m}(t_m) | t_i, \vec{x}_i \rangle$ berechnen, was offensichtlich auf das gleiche Ergebnis führt wie das oben berechnete Matrixelement.

$$\Rightarrow \langle t_f, \vec{x}_f | T\left\{ \hat{x}_H^{\alpha_m}(t_m)\, \hat{x}^{\alpha_n}(t_n) \right\} | t_i, \vec{x}_i \rangle$$
$$= \int \mathcal{D}\vec{p}\, \mathcal{D}\vec{x} \; x^{\alpha_m}(t_m)\, x^{\alpha_n}(t_n) \exp\left\{ i \int_{t_i}^{t_f} dt \left[\vec{p}\cdot\dot{\vec{x}} - H(\vec{x},\vec{p}) \right] \right\}$$

Für $H(\vec{x},\vec{p}) = \frac{\vec{p}^2}{2m} - V(\vec{x})$ kann man die $\mathcal{D}\vec{p}$-Integration wieder ausführen

Wir hatten definiert

$$|t,\vec{x}\rangle = U^{+}(t,t_0)|\vec{x}\rangle = e^{iH(t-t_0)}|\vec{x}\rangle$$

Im Folgenden wählen wir $t_0 = 0$ sowie $t_i = -\tau$ und $t_f = \tau$

$$\Rightarrow \langle t_f,\vec{x}_f| T\{\hat{x}_H^{\alpha_m}(t_m)\,\hat{x}_H^{\alpha_n}(t_n)\}|t_i,\vec{x}_i\rangle$$

$$= \langle \vec{x}_f| e^{-iH\tau}\, T\{\ldots\}\, e^{-iH\tau}|\vec{x}_i\rangle$$

Wir sind hauptsächlich an Grundzustands-erwartungswerten interessiert. Dazu gehen wir analog zu Kap. V vor:

$$H|n\rangle = E_n|n\rangle \quad , \quad H|\Omega\rangle = E_0|\Omega\rangle$$

$$e^{-iH\tau}|\vec{x}_i\rangle = \sum_n e^{-iE_n\tau}|n\rangle\langle n|\vec{x}_i\rangle$$

$$\Rightarrow \lim_{\tau\to(1-i\varepsilon)\infty} e^{-iH\tau}|\vec{x}_i\rangle = \lim_{\tau\to(1-i\varepsilon)\infty}|\Omega\rangle\langle\Omega|\vec{x}_i\rangle\, e^{-iE_0\tau}$$

$$\lim_{\tau\to(1-i\varepsilon)\infty}\langle\vec{x}_f|e^{-iH\tau} = \lim_{\tau\to(1-i\varepsilon)\infty}\langle\vec{x}_f|\Omega\rangle\langle\Omega|e^{-iE_0\tau}$$

$\langle\vec{x}_f|\Omega\rangle = \Psi_0(\vec{x}_f)$, $\langle\Omega|\vec{x}_i\rangle = \Psi_0^*(\vec{x}_i)$,
$\Psi_0(\vec{x})$ = Grundzustandswellenfkt. in Ortsraumdarst.

$$\Rightarrow \lim_{\tau\to(1-i\varepsilon)\infty}\langle\tau,\vec{x}_f|T\{\ldots\}|-\tau,\vec{x}_i\rangle$$

$$= \langle\Omega|T\{\ldots\}|\Omega\rangle\,\Psi_0(\vec{x}_f)\,\Psi_0^*(\vec{x}_i)\lim_{\tau\to(1-i\varepsilon)\infty} e^{-2iE_0\tau}$$

Analog finden wir

$$\lim_{\tau \to (1-i\varepsilon)\infty} \langle \tau, \vec{x}_f | -\tau, \vec{x}_i \rangle = \underbrace{\langle \Omega | \Omega \rangle}_{=1} \psi_0(\vec{x}_f) \psi_0^*(\vec{x}_i) \times \lim_{\tau \to (1-i\varepsilon)\infty} e^{-2iE_0\tau}$$

$$\Rightarrow \langle \Omega | T\{\ldots\} | \Omega \rangle = \lim_{\tau \to (1-i\varepsilon)\infty} \frac{\langle \tau, \vec{x}_f | T\{\ldots\} | -\tau, \vec{x}_i \rangle}{\langle \tau, \vec{x}_f | -\tau, \vec{x}_i \rangle}$$

Die rechte Seite können wir nun durch die entsprechenden Pfadintegralausdrücke ersetzen:

$$\boxed{\begin{aligned} \Rightarrow \; & \langle \Omega | T\{ \hat{X}_H^{\alpha_m}(t_m) \, \hat{X}_H^{\alpha_n}(t_n) \} | \Omega \rangle \\ &= \lim_{\tau \to (1-i\varepsilon)\infty} \frac{\int \mathcal{D}\vec{p} \, \mathcal{D}\vec{x} \; x^{\alpha_m}(t_m) \, x^{\alpha_n}(t_n) \exp\{ i \int_{-\tau}^{\tau} dt \, [\vec{p}\cdot\dot{\vec{x}} - H(\vec{x},\vec{p})] \}}{\int \mathcal{D}\vec{p} \, \mathcal{D}\vec{x} \exp\{ i \int_{-\tau}^{\tau} dt \, [\vec{p}\cdot\dot{\vec{x}} - H(\vec{x},\vec{p})] \}} \\ &= \lim_{\tau \to (1-i\varepsilon)\infty} \frac{\int \mathcal{D}\vec{x} \; x^{\alpha_m}(t_m) \, x^{\alpha_n}(t_n) \exp\{ i \int_{-\tau}^{\tau} dt \, L(\vec{x},\dot{\vec{x}}) \}}{\int \mathcal{D}\vec{x} \exp\{ i \int_{-\tau}^{\tau} dt \, L(\vec{x},\dot{\vec{x}}) \}} \end{aligned}}$$

wobei die letzte Zeile gilt, wenn $H = \frac{p^2}{2m} + V(\vec{x})$ gilt.

<u>Bemerkungen:</u>

- Durch die infinitesimale Drehung des Integrationsweges in die komplexe Ebene wird auch die Konvergenz des Gauß'schen Integrals bei der $\mathcal{D}\vec{p}$ - Integration sichergestellt:

$$e^{-a p_n^2 + b p_n}, \quad a = i\frac{\delta t}{2m} = i\frac{|\delta t|(1-i\varepsilon)}{2m} \rightsquigarrow \text{Dämpfungsfaktor } e^{-\frac{|\delta t|\varepsilon}{2m} p_n^2}$$

- Durch die Quotientenbildung fallen auch die divergenten Normierungsfaktoren $\mathcal{N}$ beim Pfadintegral heraus.

- Höhere Korrelationsfunktionen

$$\langle \Omega | T \{ \hat{X}_H^{\alpha_1}(t_1) \ldots \hat{X}_H^{\alpha_n}(t_n) | \Omega \rangle$$

können analog berechnet werden.

VIII. 2 Funktionale Quantisierung von Skalarfeldern

Wir verallgemeinern die Vorgehensweise jetzt auf skalare Quantenfelder, die durch eine Lagrange-Dichte der Form

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - V(\phi)$$

beschrieben wird.

Bsp.: • $V(\phi) = \frac{1}{2} m^2 \phi^2$ freies Klein-Gordon-Feld

• $V(\phi) = \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \frac{\lambda}{4!} \phi^4$ ϕ^4-Theorie

$$\leadsto \quad \pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \dot{\phi}(x)$$

$$\Rightarrow H(\phi, \pi) = \int d^3x \, \mathcal{H}(\vec{x}) = \int d^3x \left(\frac{1}{2} \pi^2 + (\vec{\nabla} \phi)^2 + V(\phi) \right)$$

Um die Analogie zur Quantenmechanik auszunutzen, ist es oft hilfreich, sich ein (zunächst klassisches) Feld $\phi(t,\vec{x})$ als ein mechanische System mit unendlich vielen Freiheitsgraden – den Werten des Feldes an jedem Ort $\vec{x}$, $\phi(t,\vec{x}) \equiv \phi_{\vec{x}}(t)$ – vorzustellen. Daraus ergeben sich folgende „Transfer-Regeln":

(i) Koordinaten $\vec{x}(t) \longrightarrow$ Felder $\phi(t,\vec{x})$

(ii) Impulse $\vec{p}(t) \longrightarrow$ kan. konj. Felder $\pi(t,\vec{x})$

(iii) Ortsraum-Zustände $|\vec{x}\rangle$
$\longrightarrow$ Feld- " $|\phi(\vec{x})\rangle$

Im Schrödinger-Bild gilt dann:

$$\hat{\phi}_s(\vec{x})\,|\phi(\vec{x})\rangle = \phi(\vec{x})\,|\phi(\vec{x})\rangle$$

Vollständigkeit:

$$\mathbb{1} = \underbrace{\int \prod_{\vec{x}} d\phi(\vec{x})}\,|\phi(\vec{x})\rangle\langle\phi(\vec{x})|$$

Um das sauber zu definieren, muss man den Raum zunächst diskretisieren und am Ende den Gitterabstand gegen null gehen lassen.

Orthonormiertheit (analog zu verstehen):

$$\langle\phi_a(\vec{x})|\phi_b(\vec{x})\rangle = \prod_{\vec{x}} \delta(\phi_a(\vec{x})-\phi_b(\vec{x})) \equiv \delta[\phi_a-\phi_b]$$

„funktionale δ-Fkt."

(iv) Impuls-Zust. $|\vec{p}\rangle \to$ kan. konj. Feld-Zust. $|\pi(\vec{x})\rangle$

$$\hat{\pi}_S(\vec{x})\,|\pi(\vec{x})\rangle = \pi(\vec{x})\,|\pi(\vec{x})\rangle$$

$$\mathbb{1} = \int \prod_{\vec{x}} \frac{d\pi(\vec{x})}{2\pi}\, |\pi(\vec{x})\rangle\langle\pi(\vec{x})|$$

$$\langle \pi_a(\vec{x})|\pi_b(\vec{x})\rangle = \prod_{\vec{x}} 2\pi\, \delta(\pi_a(\vec{x}) - \pi_b(\vec{x})) \equiv \delta[\pi_a - \pi_b]$$

$$\langle \phi(\vec{x})|\pi(\vec{x})\rangle = \prod_{\vec{x}} e^{i\pi(\vec{x})\phi(\vec{x})} = e^{i\int d^3x\, \pi(\vec{x})\,\phi(\vec{x})}$$

(v) Eigenzustände im Heisenberg-Bild

$$|t,\vec{x}\rangle = U^\dagger(t,t_0)\,|\vec{x}\rangle = U(t_0,t)\,|\vec{x}\rangle$$

mit $\vec{x}_H(t)\,|t,\vec{x}\rangle = \vec{x}\,|t,\vec{x}\rangle$

$$\to |t,\phi(\vec{x})\rangle = U(t_0,t)\,|\phi(\vec{x})\rangle = e^{-iH(t_0-t)}\,|\phi(\vec{x})\rangle$$

Wir betrachten nun die quantenfeldtheoretische Übergangsamplitude zwischen zwei solchen Zuständen:

$$\langle t_f, \phi_f(\vec{x})|t_i,\phi_i(\vec{x})\rangle = \langle\phi_f(\vec{x})|\, e^{-iH(t_f-t_i)}\,|\phi_i(\vec{x})\rangle$$

Analoges Vorgehen wie in der QM liefert dann

$$\int D\phi\, D\pi\, \exp\left[i\int_{t_i}^{t_f} dt \int d^3x \left(\pi\dot{\phi} - \tfrac{1}{2}\pi^2 - \tfrac{1}{2}(\vec{\nabla}\phi)^2 - V(\phi)\right)\right]$$

Die Pfadintegrale sind dabei zu verstehen als die Grenzfälle

$$\mathcal{D}\phi = \lim_{N\to\infty} \int \prod_{k=1}^{N-1} \prod_{\vec{x}} d\phi_k(\vec{x})$$

diskrete Zeitschritte

Orte

$$\mathcal{D}\pi = \lim_{N\to\infty} \int \prod_{k=1}^{N} \prod_{\vec{x}} \frac{d\pi_k(\vec{x})}{2\pi}$$

und wie im QM-Fall sind

$\phi_k(\vec{x}) \equiv \phi(t_k, \vec{x})$ und $\pi_k(\vec{x}) \equiv \pi(t_k, \vec{x})$

klassische Felder (keine Operatoren).

Da die Hamilton-Dichte quadratisch in π ist, kann die $\mathcal{D}\pi$-Integration wieder mittels der Gauß'schen Formel ausgeführt werden.

2)
$$\boxed{\begin{aligned} &\langle \phi_f(\vec{x}) | e^{-iH(t_f - t_i)} | \phi_i(\vec{x}) \rangle \\ &= \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi \exp\left\{ i \int_{t_i}^{t_f} dt \int d^3x \, \mathcal{L}[\phi(x)] \right\} \end{aligned}}$$