VIII.4 Pfadintegral-Quantisierung von Dirac-Spinoren

In der QFT-I haben wir gesehen, dass Spin-$\frac{1}{2}$-Felder antikommutieren, $\{\psi_a(t,\vec{x}), \psi_b^\dagger(t,\vec{y})\} = \delta^3(\vec{x}-\vec{y})\delta_{ab}$, etc. Insbesondere gilt auch für die Korrelationsfunktionen (z.B. Propagatoren)

$$\langle\Omega| T(\psi_a(x)\bar{\psi}_b(y))|\Omega\rangle = -\langle\Omega| T(\bar{\psi}_b(y)\psi_a(x))|\Omega\rangle$$

Um diese Eigenschaft im Pfadintegralformalismus beschreiben zu können, bei dem - wie im Spin-0-Fall gesehen - Operatoren durch klassische Felder ersetzt werden, müssen wir auf antikommutierende Zahlen („Graßmann-Zahlen") zurückgreifen.

Graßmann-Zahlen

- θ, η Graßmann-Zahlen $\Rightarrow$ $\theta\eta = -\eta\theta$

  $\Rightarrow \theta^2 = \eta^2 = 0$

  $\Rightarrow$ Taylor-Reihen brechen nach dem linearen Term ab:

  $$f(\theta) = f_0 + \theta f_1$$

(Falls $f(\theta)$ eine gewöhnliche Zahl ist, ist f_0 ebenfalls eine gewöhnliche Zahl und f_1 eine Graßmann-Zahl
$\Rightarrow f(\theta) = f_0 - f_1\theta$.)

- Addition von Graßmann-Zahlen und Multiplikation mit gewöhnlichen Zahlen wie bei Vektoren.

- Ableitungen:

$$\frac{d}{d\theta}\,\theta\eta = \eta \quad , \quad \frac{d}{d\eta}\,\theta\eta = -\frac{d}{d\eta}\,\eta\theta = -\theta$$

- Integrale:

  - Wir können Integrale nicht über die Umkehrung der Integration definieren:

$$\frac{d}{d\theta}\int_{\theta_0}^{\theta} d\theta'\, f(\theta') \overset{?}{=} f(\theta) = f_0 + \theta f_1 \quad \Rightarrow \frac{d^2}{d\theta^2}\int d\theta' \ldots = f_1$$

andererseits:

$$\int_{\theta_0}^{\theta} d\theta'\, f(\theta') = F(\theta) = F_0 + \theta F_1 \quad \Rightarrow \frac{d^2}{d\theta^2}\int d\theta' \ldots = 0$$

$$\lightning$$

  - Statt dessen definieren wir das Integral so, dass es Eigenschaften besitzt, die für unsere Zwecke wichtig sind. Insbesondere benötigen wir nur uneigentliche Integrale $\int d\theta = \int_{-\infty}^{\infty} d\theta$.

wichtige Eigenschaft:

Invarianz unter Variablenverschiebung $\theta \to \theta + \eta$

$$\Rightarrow \int d\theta\,(A + B\theta) \overset{!}{=} \int d\theta\,((A + B\eta) + B\theta)$$

$$\Rightarrow \int d\theta\, A = 0 \quad , \quad \int d\theta\, B\theta \text{ keine Einschränkung}$$

2) Def.: $\left.\begin{aligned} \int d\theta &= 0 \\ \int d\theta\, \theta &= 1 \end{aligned}\right\}$ $\hat{=}$ Ableitung

("Berezin-Integral")

$$\Rightarrow \int d\theta\, (A + B\theta) = \pm \int d\theta\, \theta B = \pm B \quad \begin{cases} B \text{ gew. Zahl} \\ B \text{ Graßm.-Z.} \end{cases}$$

Betrachte nun $\theta' := a + b\theta$, a: Graßm.-Z.
b: gew. Z.

$$\Rightarrow \int d\theta' f(\theta') = \int d\theta' (f_0 + \theta' f_1) = f_1$$

$$\int d\theta\, f(\theta') = \int d\theta \left(f_0 + (a + b\theta) f_1 \right) = b f_1$$

$$\Rightarrow \int d\theta' f(\theta') = \int d\theta\, \frac{1}{b} f(\theta') = \int d\theta \left(\frac{d\theta'}{d\theta} \right)^{-1} f(\theta'(\theta))$$

inverses Verhalten

vgl. gewöhnl. Zahlen:

$$\int dx' f(x') = \int dx \left(\frac{dx'}{dx} \right) f(x'(x))$$

- n-dimensionale Graßmann-Algebra:

$$\theta \equiv (\theta_1, \dots, \theta_n)^T$$

$$\{\theta_i, \theta_j\} = 0$$

$$\{d\theta_i, d\theta_j\} = 0$$

$$\int d\theta_i = 0$$

$$\int d\theta_n \int d\theta_{n-1} \dots \underbrace{\int d\theta_1\, \theta_1}_{=1} \theta_2 \dots \theta_n = +1$$

$$f(\theta) = c_0 + \sum_{i=1}^{n} \theta_i c_i^{(1)} + \sum_{i<j} \theta_i \theta_j c_{ij}^{(2)} + \dots + \theta_1 \dots \theta_n c^{(n)}$$

$$\Rightarrow \int d\theta_n \dots d\theta_1 \; f(\theta) = c^{(n)}$$

Sei $\theta' = B\,\theta \iff \theta_i' = B_{ij}\,\theta_j$

$$\Rightarrow c^{(n)} = \int d\theta_n' \dots d\theta_1' \; f(\theta')$$

$$= \int d\theta_n' \dots d\theta_1' \; \theta_1' \dots \theta_n' \; c^{(n)}$$

$$= \int d\theta_n' \dots d\theta_1' \; B_{1j_1} \dots B_{nj_n} \underbrace{\theta_{j_1} \dots \theta_{j_n}}_{\substack{\text{tragen nur bei, wenn} \\ j_1, \dots, j_n \text{ alle verschieden}}} c^{(n)}$$

$$= \int d\theta_n' \dots d\theta_1' \; B_{1j_1} \dots B_{nj_n} \, \varepsilon_{j_1 \dots j_n} \, \theta_1 \dots \theta_n \, c^{(n)}$$

↑ n-dim ε-Tensor

$$= \int d\theta_n' \dots d\theta_1' \; \det B \;\; \theta_1 \dots \theta_n \;\; c^{(n)}$$

$$c^{(n)} = \int d\theta_n \dots d\theta_1 \; \theta_1 \dots \theta_n \; c^{(n)}$$

$$\Rightarrow \int d\theta_n' \dots d\theta_1' = \int (\det B)^{-1} \, d\theta_n \dots d\theta_1$$

inverse Jacobi-Determinante

vgl. gewöhnliche Zahlen:

$$\int d^n x' = \int d^n x \, \det\left(\frac{\partial x_i'}{\partial x_j}\right)$$

Gauß'sche Integrale:

$$G(A) = \int d\theta_n \dots d\theta_1 \, \exp\left[-\tfrac{1}{2}\theta^T A \, \theta\right]$$

mit einer antisymm. Matrix A, $A_{ij} = -A_{ji}$ (gewöhnl. Zahlen)

$n = 2$: $A = \begin{pmatrix} 0 & A_{12} \\ -A_{12} & 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow G(A) = \int d\theta_2 \, d\theta_1 \, \exp\left[-\theta_1\theta_2 A_{12}\right]$$

$$= \int d\theta_2 \, d\theta_1 \, (1 - \theta_1\theta_2 A_{12}) = -A_{12} = \underset{\uparrow -\mathrm{sign}(A_{12})}{\pm}\sqrt{\det A}$$

Allgemein gilt:

$\exp\left[-\frac{1}{2}\theta^T A \theta\right] = \sum$ Terme mit gerader Anzahl von Komponenten θ:

$\Rightarrow G(A) = 0$ für n ungerade

Für n gerade findet man (für A antisymm.)

$$G(A) = \pm\sqrt{\det A} \qquad \text{(Vorz. in der GFT irrelevant)}$$

(Beweisidee:
unitäre Transf $\quad U A U^T = \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} & & \\ & \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} & \\ & & \ddots \end{bmatrix}$)

vgl. gew. Zahlen:

$$\int d^n x \, e^{-\frac{1}{2}x^T A x} = \frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\det A}}$$

• komplexe Graßmann-Zahlen

- $\theta = \mathrm{Re}\,\theta + i\,\mathrm{Im}\,\theta$
  $\theta^* = \mathrm{Re}\,\theta - i\,\mathrm{Im}\,\theta$ } wie üblich

- Konvention: $(\theta\eta)^* = \eta^*\theta^*$

- Subst.:

$$\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}(\theta_1 + i\theta_2), \quad \theta^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(\theta_1 - i\theta_2)$$

(θ_1, θ_2 reelle Graßmann-Zahlen)

$$\Rightarrow \theta\theta^* = -i\,\theta_1\theta_2 = -\theta^*\theta$$

↳ Betrachte θ und θ^* als unabh. Variable

$$\int d\theta^* d\theta = \int d\theta_2 d\theta_1 \left[\det\begin{pmatrix} \frac{\partial\theta}{\partial\theta_1} & \frac{\partial\theta}{\partial\theta_2} \\ \frac{\partial\theta^*}{\partial\theta_1} & \frac{\partial\theta^*}{\partial\theta_2}\end{pmatrix}\right]^{-1} = i\int d\theta_2 d\theta_1$$

$$\Rightarrow \int d\theta^* d\theta\ \theta\theta^* = \int d\theta_2 d\theta_1\ \theta_1\theta_2 = 1$$

$$\Rightarrow \int d\theta^* d\theta\ \exp[-\theta^* b\,\theta] = \int d\theta^* d\theta\,[1 - \theta^* b\,\theta]$$
$$= \int d\theta^* d\theta\,[1 + \theta\theta^* b] = b$$

$$\int d\theta^* d\theta\ \theta\theta^*\exp[-\theta^* b\,\theta] = 1 = \frac{1}{b}\cdot b$$

vgl. gew. komplexe Zahlen:

$$\int dz^* dz\ e^{-z^* b z} = \frac{2\pi}{b}, \quad \int dz^* dz\ z z^* e^{-z^* b z} = \frac{2\pi}{b^2}$$

- n-dim komplexe Graßmann-Algebra:

$$\left(\prod_i \int d\theta_i^* \, d\theta_i\right) e^{-\theta^{*T} B \theta} = \det B$$

$$\left(\prod_i \int d\theta_i^* \, d\theta_i\right) \theta_k \theta_l^* \, e^{-i\theta^{*T} B \theta} = (\det B)(B^{-1})_{kl}$$

zurück zur QFT:

Graßmann-Feld: $\psi(x) = \sum_i \psi_i \, \phi_i(x)$

ψ_i : Graßmann-Zahlen

$\phi_i(x)$: orthonormale Basis-Funktionen
= klassische Felder, keine Operatoren
(hier: Basis für 4-komp. Dirac-Spinoren
z.B. $u_s(p)\, e^{-ip\cdot x}$, $v_s(p)\, e^{ip\cdot x}$, $s = 1, 2$)

→ Dirac-Zweipunkt-Funktion:

$$\langle \Omega | T(\psi_\mu(x_1) \bar{\psi}_\nu(x_2)) | \Omega \rangle = \frac{\int D\bar{\psi} D\psi \, e^{i\int d^4x \, \mathcal{L}} \, \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2)}{\int D\bar{\psi} D\psi \, e^{i\int d^4x \, \mathcal{L}}}$$

- $D\bar{\psi} = D\psi^\dagger \gamma^0$ äquivalent zu $D\psi^*$
- Zeitintegration wie üblich $\lim\limits_{T \to \infty(1-i\varepsilon)} \int_{-T}^{T} dx^0$
- höhere n-Punkt-Funktionen analog
(nur ungleich null für gleich viele ψ und $\bar{\psi}$)

erzeugendes Funktional:

$$\boxed{Z[\bar{\eta},\eta] = \int \mathcal{D}\bar{\psi}\,\mathcal{D}\psi \, \exp\left[i\int d^4x \left[\mathcal{L} + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta + i\varepsilon\right]\right]}$$

$\eta, \bar{\eta}$: Graßmann-wertige Quellen

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} &\langle \Omega | T(\psi_H(x_1)\,\bar{\psi}_H(x_2)) | \Omega \rangle \\ &= \frac{1}{Z[0,0]} \left(-i\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}(x_1)}\right)\left(+i\frac{\delta}{\delta\eta(x_2)}\right) Z[\bar{\eta},\eta] \Big|_{\bar{\eta}=\eta=0} \end{aligned}}$$

freies Dirac-Feld: $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 = \bar{\psi}(i\partial\!\!\!/ - m)\psi$

Dirac-Propagator: $i(\partial\!\!\!/ - m + i\varepsilon)\, S_F(x-y) = i\delta^4(x-y)$

$\hookrightarrow$ verschobene Felder: $\psi'(x) = \psi(x) - i\int d^4y \; S_F(x-y)\,\eta(y)$

$\bar{\psi}'(x) = \bar{\psi}(x) + i\int d^4y \; \bar{\eta}(y)\, S_F(y-x)$

$$\hookrightarrow \boxed{Z_0[\eta,\bar{\eta}] = Z_0[0,0]\, \exp\left[-\int d^4x \int d^4y \; \bar{\eta}(x)\, S_F(x-y)\,\eta(y)\right]}$$

$\Rightarrow \langle 0 | T(\psi_H(x_1)\,\bar{\psi}_H(x_2)) | 0 \rangle =$

$$\left(\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}(x_1)}\frac{\delta}{\delta\eta(x_2)} \exp[\ldots]\right)\Big|_{\eta=\bar{\eta}=0}$$

$$= \frac{\delta}{\delta\bar{\eta}(x_1)} \int d^4x \; \bar{\eta}(x)\, S_F(x-x_2)\, \exp[\ldots]\Big|_{\eta=\bar{\eta}=0} = S_F(x_1-x_2)$$

✓