VIII.5 Pfadintegral-Quantisierung des elektromagnetischen Feldes

Wir haben schon in QFT-I gesehen, dass die naive Quantisierung des elektromagnetischen Feldes auf Probleme führt, die mit der Eichinvarianz der Lagrange-Dichte zusammenhängen. Diese Probleme begegnen uns auch im Pfadintegral-Formalismus.

Naiv würden wir erwarten, dass das erzeugende Funktional des freien Photon-Feldes durch

$$Z_0^{(naiv)}[J] = \int \mathcal{D}A \; \exp\left[i \int d^4x \left(\mathcal{L}_0 + J_\mu A^\mu\right)\right]$$

mit

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

gegeben ist.

$$\int d^4x \, \mathcal{L}_0 = -\frac{1}{4} \int d^4x \, (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)$$

$$= -\frac{1}{2} \int d^4x \, (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)\, \partial^\mu A^\nu$$

$$= \frac{1}{2} \int d^4x \left[A_\nu \partial_\mu \partial^\mu A^\nu - A_\mu \partial^\mu \partial_\nu A^\nu\right]$$

$$= \frac{1}{2} \int d^4x \, A_\mu \left(\Box g^{\mu\nu} - \partial^\mu \partial^\nu\right) A_\nu$$

$\Rightarrow$ Green'sche Funktion (Photon-Propagator)

$$\left(\Box g^{\mu\nu} - \partial^\mu \partial^\nu\right) D_\nu{}^\sigma(x-y) = i\,\delta^4(x-y)\, g^{\mu\sigma}$$

2) $Z_0^{(main)}[J] = Z_0^{(main)}[0] \quad \exp\left[-\frac{1}{2}\int d^4x \int d^4y \, J^\mu(x)\, \mathcal{D}_{\mu\nu}(x-y)\, J^\nu(y)\right]$

Fourier-Transformation:

$$\mathcal{D}_{\mu\nu}(x-y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \, \mathcal{D}_{\mu\nu}(k) \, e^{-ik\cdot(x-y)}$$

$$\Rightarrow (\Box g^{\mu\nu} - \partial^\mu\partial^\nu)\, \mathcal{D}_\nu{}^\sigma(x-y)$$

$$= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left(-k^2 g^{\mu\nu} + k^\mu k^\nu\right) \mathcal{D}_\nu{}^\sigma(k)\, e^{-ik\cdot(x-y)}$$

$$= -\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \, k^2 T^{\mu\nu} \mathcal{D}_\nu{}^\sigma(k) \, e^{-ik\cdot(x-y)}$$

$$\stackrel{!}{=} i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \, e^{-ik\cdot(x-y)} \, g^{\mu\sigma}$$

Erinnerung: $T^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2}$ (transversaler Projektor)

$$\Rightarrow -k^2 T^{\mu\nu} \mathcal{D}_{\nu\sigma} = i g^\mu{}_\sigma = i (\mathbb{1})^\mu{}_\sigma$$

$$\Rightarrow \mathcal{D}_{\mu\nu} = -\frac{i}{k^2} \left(T^{-1}\right)_{\mu\nu}$$

Problem: $\det(T^{\mu\nu}) = 0$, d.h. $T^{\mu\nu}$ ist nicht invertierbar

(z.B. Ruhesyst. $k = \begin{pmatrix} k^0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (T^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix}$)

allgemein: $A^{\mu\nu} = A_L L^{\mu\nu} + A_T T^{\mu\nu}$

$$\Rightarrow \det(A^{\mu\nu}) = -A_L A_T^3$$

2) Problem $\Leftrightarrow$ fehlender longitudinaler Anteil

Im Kap. IV haben wir die Lorenz-Eichung verwendet

$\Rightarrow \mathcal{L}_{0,\,\text{Lorenz}} = -\frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu)(\partial^\mu A^\nu)$

$\Rightarrow \Box g^{\mu\nu} \mathcal{D}_\nu{}^\sigma (x-y) = i\,\delta(x-y)\, g^{\mu\sigma}$

$\Rightarrow \mathcal{D}_{\mu\nu}(k) = -\frac{i}{k^2}(g^{-1})_{\mu\nu} = -i\,\frac{g_{\mu\nu}}{k^2}$ ✓

Dass das Problem mit der Eichfreiheit zusammenhängt, kann man auch folgendermaßen sehen: $F^{\mu\nu}$ und damit auch

$$S = \int d^4x\, \mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}\int d^4x\, A_\mu(x)(\Box g^{\mu\nu} - \partial^\mu\partial^\nu) A_\nu(x)$$

sind invariant unter Eichtransformationen

$$A_\mu(x) \to A_\mu(x) + \frac{1}{e}\partial_\mu \alpha(x) \equiv A_\mu^{(\alpha)}(x)$$

Insbesondere findet man für ein „reines Eichfeld"

$$A_\mu(x) = \frac{1}{e}\partial_\mu \alpha(x),$$

das eich-äquivalent zu $A_\mu(x) = 0$ ist,

$$\frac{1}{2e^2}\int d^4x\, (\partial_\mu\alpha)\underbrace{(\Box g^{\mu\nu} - \partial^\mu\partial^\nu)\partial_\nu\alpha}_{\Box\partial^\mu\alpha - \partial^\mu\Box\alpha} = 0 .$$

Im Pfadintegral $\int \mathcal{D}A\; e^{iS}$ gibt es daher eine ganze Klasse von Feldern (die eich-äquivalenten Felder zu $A^\mu = 0$), für die $S=0$ $\Rightarrow e^{iS} = 1$ gilt. Die Integration über dies Felder divergiert daher dramatisch

→ Ziel: Schreibe das Pfadintegral als Produkt

$$\int \mathcal{D}A_\mu \, F(A_\mu) = \int \mathcal{D}\alpha \int \mathcal{D}\bar{A}_\mu \, F(A_\mu = \bar{A}_\mu^{(\alpha)})$$

↑ eich-inäquivalente Felder

F eichinvariant: $F(\bar{A}_\mu^{(\alpha)}) = F(\bar{A}_\mu)$

⇒ $\int \mathcal{D}\alpha \;\hat{=}$ konstanter Normierungsfaktor, kürzt sich heraus

Faddeev - Popov - Methode

allgemeine kovariante Bedingung zur Eichfixierung:

$$G(A) = 0 \quad , \quad G: \text{skalare Funktion}$$

(z.B. Lorenz-Eichung: $G(A) = \partial_\mu A^\mu$)

Idee: Implementiere Eichfixierung über eine funktionale δ-Funktion

Schiebe dazu eine 1 ein:

1-dim: $\quad 1 = \int dy \, \delta(y) = \int dx \, \frac{dy}{dx} \, \delta(y(x))$

n-dim: $\quad 1 = \int d^n x \, \det\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right) \delta^n(y(x))$

⇒ funktional: $\quad 1 = \int \mathcal{D}\alpha \, \det\left[\frac{\delta G(A^{(\alpha)})}{\delta \alpha}\right] \delta[G(A^{(\alpha)})]$

Funktional-Determinante:
allgemein darstellbar als Pfadintegral über komplexe Graßmann-Felder → „Faddeev-Popov-Geister"
(wichtig in nicht-abelschen Eichtheorien, z.B. QCD)

Schreibe $G(A) = \partial_\mu A^\mu(x) - \omega(x)$,

$\omega(x)$: beliebige skalare Funktion

$\Rightarrow G(A^{(\alpha)}) = \partial_\mu A^\mu + \frac{1}{e} \Box\alpha - \omega(x)$

$\Rightarrow \det\left[\frac{\delta G(A^{(\alpha)})}{\delta\alpha}\right] = \det\left[\frac{1}{e}\Box\right]$ hängt nicht von A ab!

$$\Rightarrow \int \mathcal{D}A \, e^{iS[A]}$$

$$= \int \mathcal{D}A \, e^{iS[A]} \int \mathcal{D}\alpha \det\left[\frac{1}{e}\Box\right] \delta[G(A^{(\alpha)})]$$

$$= \det\left[\frac{1}{e}\Box\right] \int \mathcal{D}\alpha \int \mathcal{D}A \, e^{iS[A]} \delta[G(A^{(\alpha)})]$$

$$S[A] = S[A^{(\alpha)}] \quad , \quad \mathcal{D}A = \mathcal{D}A^{(\alpha)}$$

Integriere über $A^{(\alpha)}$ und benenne $A^{(\alpha)}$ in A um:

$$= \underbrace{\det\left[\frac{1}{e}\Box\right] \int \mathcal{D}\alpha}_{\text{Normierungsfaktor}} \; \underbrace{\int \mathcal{D}A \, e^{iS[A]} \delta[\partial^\mu A_\mu - \omega(x)]}_{\text{eichfixiertes Pfadintegral}}$$

Dies gilt für beliebige $\omega(x)$

$\rightarrow$ Integriere über ω (Gauß-artig um $\omega = 0$ verteilt)

$$\mathcal{N}(\xi) \int \mathcal{D}\omega \exp\left[-i \int d^4x \frac{\omega^2}{2\xi}\right] \mathcal{N}' \int \mathcal{D}A \, e^{iS[A]} \delta[\partial^\mu A_\mu - \omega(x)]$$

$$= \mathcal{N} \int \mathcal{D}A \exp\left[i \int d^4x \left(\mathcal{L}_0 - \underbrace{\frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2}_{\text{„Eichfixierungsterm"}}\right)\right]$$

$\rightarrow$ Korrelationsfunktionen:

$$\boxed{\langle \Omega | T\, \hat{O}_H(A) | \Omega \rangle = \frac{\int \mathcal{D}A\; O(A) \exp\left[i \int d^4x \left(\mathcal{L}_0 - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2\right)\right]}{\int \mathcal{D}A\; \exp\left[i \int d^4x \left(\mathcal{L}_0 - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2\right)\right]}}$$

für eichinvariante Operatoren $\hat{O}_H(A)$
(andernfalls funktioniert die Herleitung nicht)

- wie üblich: $\int d^4x = \lim\limits_{T\to\infty(1-i\varepsilon)} \int\limits_{-T}^{T} dx^0 \int d^3x$

- spezielle Eichungen:

$\xi = 0$ Landau-Eichung

$\xi = 1$ Feynman-Eichung

zurück zum Anfangsproblem:
Mit dem Eichfixierungsterm wird das erzeugende Funktional

$$Z_0^{(\xi)}[J] = Z_0^{(\xi)}[0] \exp\left[-\frac{1}{2}\int d^4x\, d^4y\, J^\mu(x)\, \mathcal{D}^{(\xi)}_{\mu\nu}(x-y)\, J^\nu(y)\right]$$

mit

$$\left[\Box g^{\mu\nu} - \underbrace{\left(1-\frac{1}{\xi}\right)\partial^\mu\partial^\nu}_{\text{longitudinaler Anteil}}\right] \mathcal{D}_\nu{}^\sigma(x-y) = i\,\delta^4(x-y)\, g^{\mu\sigma}$$

$$\Rightarrow \left(T^{\mu\nu} + \frac{1}{\xi} L^{\mu\nu}\right) \mathcal{D}^{(\xi)}_{\nu\sigma}(k) = -\frac{i}{k^2}\, g^\mu{}_\sigma$$

$$\Rightarrow \mathcal{D}^{(\xi)}_{\mu\nu}(k) = \frac{-i}{k^2}\left(T_{\mu\nu} + \xi L_{\mu\nu}\right)$$

$(T_{\mu\nu} + L_{\mu\nu} = g_{\mu\nu})$