mit Feynman-Randbedingungen:

$$\boxed{D^{(\xi)}_{\mu\nu}(k) = \frac{-i}{k^2+i\varepsilon}\left(g^{\mu\nu} - (1-\xi)\frac{k^\mu k^\nu}{k^2}\right)}$$

↳ Feynman-Eichung:

$$D^{(\xi=1)}_{\mu\nu}(k) = \frac{-i g_{\mu\nu}}{k^2+i\varepsilon} \equiv D^{\text{Lorenz}}_{\mu\nu}(k)$$

VIII.6 Symmetrien im Pfadintegralformalismus

Betrachte die n-Punkt-Korrelationfunktion

$$\langle\Omega| T(\phi(x_1)\dots\phi(x_n))|\Omega\rangle$$

$$= \frac{1}{Z[0]}\int D\phi\, e^{i\int d^4x\, \mathcal{L}[\phi]}\, \phi(x_1)\dots\phi(x_n)$$

und eine infinitesimale Variation des Feldes

$$\phi(x) \to \phi'(x) = \phi(x) + \varepsilon(x) .$$

Das können wir zunächst einmal als Umbenennung der Variablen auffassen. Das (Pfad-) Integral ändert sich natürlich nicht, wenn wir überall ϕ durch ϕ' ersetzen (also auch $D\phi$ durch $D\phi'$).

Andererseits gilt auch $D\phi' = D\phi$,
da die obige Variation ja nur eine konstante (d.h. für alle Felder gleiche) Verschiebung ist.

Es gilt also:

$$\int \mathcal{D}\phi \; e^{i\int d^4x \, \mathcal{L}[\phi]} \phi(x_1) \ldots \phi(x_n)$$

$$= \int \mathcal{D}\phi \; e^{i\int d^4x \, \mathcal{L}[\phi']} \phi'(x_1) \ldots \phi'(x_n)$$

Wir untersuchen die Konsequenzen zunächst für ein freies Klein-Gordon-Feld

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \quad ,$$

$$\Rightarrow \int d^4x \, \mathcal{L}[\phi'] = -\frac{1}{2}\int d^4x \, \phi'(x) (\Box + m^2) \phi'(x)$$

$$= \int d^4x \left\{ \mathcal{L}[\phi] - \varepsilon(x) (\Box + m^2) \phi(x) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \right\}$$

$\Rightarrow$ Änderung des Pfadintegrals in $\mathcal{O}(\varepsilon)$:

$$0 = \int \mathcal{D}\phi \; e^{i\int d^4x \, \mathcal{L}[\phi]} \cdot \Big\{ -i \int d^4x \; \varepsilon(x) (\Box + m^2) \phi(x) \phi(x_1) \ldots \phi(x_n)$$
$$+ \varepsilon(x_1) \phi(x_2) \ldots \phi(x_n) + \phi(x_1) \varepsilon(x_2) \phi(x_3) \ldots \phi(x_n)$$
$$+ \ldots + \phi(x_1) \ldots \phi(x_{n-1}) \varepsilon(x_n) \Big\}$$

$$= \int \mathcal{D}\phi \; e^{i\int d^4x \, \mathcal{L}[\phi]} \cdot (-i) \int d^4x \; \varepsilon(x) \Big[(\Box + m^2) \phi(x) \phi(x_1) \ldots \phi(x_n)$$
$$+ i \delta^4(x - x_1) \phi(x_2) \ldots \phi(x_n)$$
$$+ \ldots \Big]$$

Das gilt für beliebige infinitesimale $\varepsilon(x)$

$$\Rightarrow \int \mathcal{D}\phi \; e^{i\int d^4x \, \mathcal{L}[\phi]} \Big[(\Box + m^2) \phi(x) \phi(x_1) \ldots \phi(x_n)$$
$$+ i \delta(x - x_1) \phi(x_2) \ldots \phi(x_n)$$
$$+ \ldots \Big] = 0$$

$\Rightarrow$ „Bewegungsgleichung" für Korrelationsfunktionen:

$$(\Box + m^2) \langle 0 | T(\phi(x)\phi(x_1)\dots\phi(x_n)) | 0 \rangle$$
$$= \sum_{j=1}^{n} \langle 0 | T(\phi(x_1)\dots\underset{\substack{\uparrow \\ \text{„Kontakt-Terme"}}}{(-i\delta^4(x-x_j))}\dots\phi(x_n)) | 0 \rangle$$

$\hat{=}$ Klein-Gordon-Gl. bis auf Kontakt-Terme

$\underline{n = 1}$:

$$(\Box + m^2) \langle 0 | T(\phi(x)\phi(x_1)) | 0 \rangle = -i\,\delta^4(x - x_1)$$

(freier Propagator = Green'sche Funktion ✓)

wechselwirkendes Feld:

$$\int d^4x\, \mathcal{L}[\phi'] = \int d^4x \left\{ \mathcal{L}[\phi] + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}\varepsilon(x) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi}\partial_\mu \varepsilon(x) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \right\}$$

$$= \int d^4x \left\{ \mathcal{L}(\phi] + \varepsilon(x)\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi}\right] + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \right\}$$

Analoges Vorgehen wie im freien Fall

$\hookrightarrow$ <u>Dyson-Schwinger-Gleichungen</u> (auch „Schwinger-Dyson-" Gln.")

$$\boxed{\begin{aligned} &\left\langle \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}(x) - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi}(x)\right)\phi(x_1)\dots\phi(x_n)\right\rangle \\ &\quad = \sum_{j=1}^{n} \langle \Omega | T(\phi(x_1)\dots(i\delta^4(x-x_j))\dots\phi(x_n) | \Omega \rangle \end{aligned}}$$

$\hat{=}$ Euler-Lagrange-Gln. bis auf Kontakt-Terme

Notation: $\langle \dots \rangle$ = zeitgeordnete Korrelationsfkt.,
Ableitungen auf $\phi(x)$ außerhalb der Zeitordnung

Als nächstes betrachten wir die Variation

$$\phi(x) \rightarrow \phi(x) + \alpha(x)\, \Delta\phi(x)$$

mit einer <u>Symmetrietransformation</u> $\Delta\phi(x)$ und $\alpha(x)$ infinitesimal.

$$\Rightarrow \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \alpha \Delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \partial_\mu (\alpha\, \Delta\phi)$$

$$= \mathcal{L} + \alpha \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \Delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \partial_\mu \Delta\phi \right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \Delta\phi\, \partial_\mu \alpha$$

Bei der Herleitung des Noether-Theorems in Kap. II haben wir uns auf den Fall $\alpha = \text{const}$ ($\Rightarrow \partial_\mu \alpha = 0$) beschränkt und Symmetrietransformationen als Variationen definiert, die in diesem Fall die Wirkung invariant lassen:

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} + \alpha\, \partial_\mu J^\mu \quad \text{für } \alpha = \text{const.}$$

$$\Rightarrow \partial_\mu J^\mu \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \Delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \partial_\mu \Delta\phi$$

$$= \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \Delta\phi \right) + \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \right) \Delta\phi$$

Für Lösungen der Euler-Lagrange-Gleichungen verschwindet der zweite Term, und wir haben

$\partial_\mu j^\mu = 0$ mit dem Noether-Strom

$$j^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \Delta\phi - J^\mu$$

Für x-abhängiges α ergibt sich mit diesen Definitionen:

$$\mathcal{L} \to \mathcal{L} + \alpha\, \partial_\mu J^\mu + (j^\mu + J^\mu)\, \partial_\mu \alpha$$

$$\Rightarrow \int d^4x\, \mathcal{L} \to \int d^4x\, (\mathcal{L} - \alpha\, \partial_\mu j^\mu)$$

Für diesen Fall betrachten wir nun wieder das Verhalten der Korrelationsfunktionen. Nullsetzen des $\mathcal{O}(\alpha)$-Terms liefert dann die Dyson-Schwinger-Gleichungen

$$\boxed{\begin{aligned} &\langle \partial_\mu j^\mu(x)\, \phi(x_1) \ldots \phi(x_n) \rangle \\ &= -i \sum_{j=1}^{n} \langle \phi(x_1) \ldots (\delta(x-x_j)\, \Delta\phi(x_j)) \ldots \phi(x_n) \rangle \end{aligned}}$$

(„<u>verallgemeinerte Ward-Takahashi-Identitäten</u>")

Obwohl wir bislang nur skalare Felder betrachtet haben, verläuft für Fermionen und Photonen alles analog. Als konkretes Beispiel betrachten wir nun die QED-Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L}_{QED} = \bar{\psi}(i\partial\!\!\!/ - m)\psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu$$

$\mathcal{L}_{QED}$ ist invariant unter globalen Phasen-Transformationen $\psi \to e^{-i\alpha}\psi$, $\bar{\psi} \to \bar{\psi} e^{+i\alpha}$.

Für eine entsprechende infinitesimale <u>lokale</u> Transformation

$$\psi(x) \to \psi'(x) = (1 - i\alpha(x))\,\psi(x)$$
$$\bar\psi(x) \to \bar\psi'(x) = \bar\psi(x)\,(1 + i\alpha(x))$$

<u>ohne</u> gleichzeitige Eichtransformation des elektromagnetischen Feldes ergibt sich

$$\mathcal{L}_{QED} \to \mathcal{L}_{QED} + (\partial_\mu \alpha(x))\,\bar\psi(x)\gamma^\mu\psi(x)$$
$$= \mathcal{L}_{QED} + (\partial_\mu \alpha(x))\,j^\mu(x)$$

mit dem Noetherstrom $j^\mu(x) = \bar\psi(x)\gamma^\mu\psi(x)$

(Dies ist eine alternative Methode, den Noetherstrom zu berechnen. Für die globale Symmetrietransformation ergibt sich $\mathcal{L}_{QED} \to \mathcal{L}_{QED} \Rightarrow j^\mu = 0$.)

Zwei-Punkt-Korrelator:

$$\int D\bar\psi\, D\psi\, DA\; e^{i\int d^4x\, \mathcal{L}_{QED}[\bar\psi', \psi', A]}\, \psi'(x_1)\, \bar\psi'(x_2)$$
$$= \int D\bar\psi\, D\psi\, DA\; e^{i\int d^4x\,(\mathcal{L}_{QED}[\bar\psi,\psi,A] - \alpha\,\partial_\mu j^\mu)} \times (1 - i\alpha(x_1))\,\psi(x_1)\,(1 + i\alpha(x_2))\,\bar\psi(x_2)$$

$$\Rightarrow 0 = \int D\bar\psi\, D\psi\, DA\; e^{i\int d^4x\, \mathcal{L}_{QED}[\bar\psi,\psi,A]}$$
$$\times \Big\{ -\partial_\mu j^\mu(x)\,\psi(x_1)\,\bar\psi(x_2)$$
$$- \delta^4(x - x_1)\,\psi(x_1)\,\bar\psi(x_2)$$
$$+ \delta^4(x - x_2)\,\psi(x_1)\,\bar\psi(x_2) \Big\}$$

$$\Rightarrow \quad \partial_\mu \langle \Omega | T(j^\mu(x) \; \psi(x_1) \, \bar\psi(x_2)) | \Omega \rangle$$

$$= \; -\delta^4(x-x_1) \, \langle \Omega | T(\psi(x_1) \, \bar\psi(x_2) | \Omega \rangle$$

$$\quad + \delta^4(x-x_2) \, \langle \Omega | T(\psi(x_1) \, \bar\psi(x_2) | \Omega \rangle$$

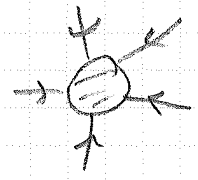
Fourier-Transformation:

allgemeine Regel für n-Punkt-Funktionen

$$\int \left(\prod d^4x_i \; e^{-ip_i \cdot x_i} \right) G^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$$

$$= (2\pi)^4 \, \delta^4(p_1 + \dots + p_n) \, G^{(n)}(p_1, \dots, p_n)$$

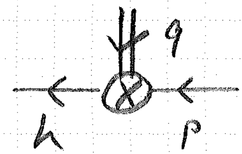
mit p_i = einlaufende Impulse



hier:

- einlaufendes Fermion bei x_2 $\rightarrow \int d^4x_2 \; e^{-ip \cdot x_2}$
- auslaufendes " " x_1 $\rightarrow \int d^4x_1 \; e^{+ik \cdot x_1}$
- einlaufender Strom " x $\rightarrow \int d^4x \; e^{-iq \cdot x}$

$$\Rightarrow \quad i q_\mu \, (2\pi)^4 \delta^4(p+q-k) \, G^{(3)\mu}(q; k, p)$$



$$= (2\pi)^4 \delta^4(p+q-k) \left[- G^{(2)}(k-q, p) + G^{(2)}(k, p+q) \right]$$

$$\Rightarrow \quad i q_\mu \, G^{(3)\mu}(q; p+q, p) = G^{(2)}(p+q, p+q) - G^{(2)}(p, p)$$

$$G^{(2)}(p,p) \equiv iS(p)$$

$$G^{(3)\mu}(q;p+q,p) \equiv iS(p+q)\,\Gamma^{\mu}(p+q,p)\,iS(p)$$

amputierte Vertexfunktion

$$\Rightarrow \boxed{q_\mu \Gamma^\mu(p+q,p) = S^{-1}(p+q) - S^{-1}(p)}$$

(„Ward - Takahashi - Identität")

- gilt auch für die Elektron - Photon - Vertex-funktion

Bsp.: nackter Vertex, nackter Propagator

$$q_\mu \gamma^\mu = \not{q} = [\not{p} + \not{q} - m + i\varepsilon] - [\not{p} - m + i\varepsilon]$$

$$= S_0^{-1}(p+q) - S_0^{-1}(p)$$