

Wie wir schon früher festgestellt haben, wird die Ladung also nun durch die Selbstenergie des Photons („Vakuumpolarisation“) renormiert. Dies verallgemeinern können wir eine „laufende Kopplung“ definieren, die uns die effektive Ladung bei von Null verschiedenen Photon-Impulsen angibt:

$$e(q^2) = (1 + \Pi_2(q^2))^{1/2} e_0$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha(q^2)}{\alpha(0)} = \frac{1 + \Pi_2(q^2)}{1 + \Pi_2(0)} = \frac{1}{1 - \underbrace{(\Pi_2(q^2) - \Pi_2(0))}_{\Pi_2(q^2) - \delta_3 = \Pi(q^2)}} + \mathcal{O}(\alpha^2)$$

$$\Rightarrow \alpha(q^2) = \frac{\alpha(0)}{1 - \Pi(q^2)} + \mathcal{O}(\alpha^2),$$

$$= \frac{\alpha}{1 - \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^1 dx x(1-x) \ln\left(1 - x(1-x) \frac{q^2}{m^2} - i\epsilon\right)} + \mathcal{O}(\alpha^2)$$

$$\text{mit } \alpha \equiv \alpha(0) = \frac{1}{137}$$

große räumliche Impulse: $q^2 = -Q^2$, $Q \gg m$

$$\Rightarrow \int_0^1 dx x(1-x) \ln\left(1 + x(1-x) \frac{Q^2}{m^2}\right)$$

$$= \int_0^1 dx x(1-x) \left(\ln \frac{Q^2}{m^2} + \ln x + \ln(1-x) + \mathcal{O}\left(\frac{m^2}{Q^2}\right) \right)$$

$$= \frac{1}{6} \left(\ln \frac{Q^2}{m^2} - \frac{5}{3} \right) + \mathcal{O}\left(\frac{m^2}{Q^2}\right)$$

$$\Rightarrow \alpha(q^2 = -Q^2) \approx \frac{\alpha}{1 - \frac{\alpha}{3\pi} \left(\ln \frac{Q^2}{m^2} - \frac{5}{3} \right)}$$

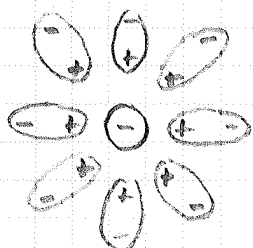
$\leadsto \alpha$ wächst mit wachsendem Q an, wenn auch sehr langsam.

Zahlenbeispiel:

$$Q = m_Z = 91 \text{ GeV}, \quad m = 511 \text{ keV} \leadsto \alpha(-M_Z^2) \approx \frac{1}{134,6}$$

Für eine realistischere Rechnung müssen wir allerdings neben den Elektronen auch die anderen Leptonen (μ, τ) und Quarks berücksichtigen. Der Effekt ist daher größer ($\alpha(-M_Z^2) \approx \frac{1}{127}$)

Interpretation der anwachsenden Kopplung:



Die nackte Ladung wird durch virtuelle Elektron-Positron-Paare (\rightarrow Vakuum-Polarisation) abgeschirmet.
größeres $Q \hat{=}$ kleinere Abstände

\rightarrow weniger Abschirmung \rightarrow größere Ladung

Bei sehr großem Q divergiert der obige Ausdruck für $\alpha(q^2)$ („Landau-Pol“). In diesem Bereich ist aber die störungstheoretische Behandlung nicht mehr zulässig.

IX.4 Spektraldarstellung des Propagators

Propagator eines freien Klein-Gordon-Feldes:

$$D_F(x-y) = \langle 0 | T \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-ip \cdot (x-y)}$$

$\hat{=}$ Amplitude für die Propagation eines Teilchens von y nach x .

Welche Information steckt in dem gedrehten Propagator

$$\langle \Omega | T \phi(x) \phi(y) | \Omega \rangle$$

der wechselwirkenden Theorie?

Vorgehensweise: Schreibe ein vollständiges System von Zuständen ein.

$[\vec{P}, H] = 0 \Rightarrow$ gemeinsame Eigenzustände des Impuls- und Energie (= Hamilton-) Operators existieren.

Sei $|\Omega_0\rangle$ ein Zustand mit Impuls 0 und Energie m_η , d. h.

$$H |\Omega_0\rangle = m_\eta |\Omega_0\rangle, \quad \vec{P} |\Omega_0\rangle = \vec{0}$$

Lorentz-Boosts:

$$|\Omega_0\rangle \rightarrow |\Omega_{\vec{p}}\rangle \quad \text{mit} \quad \vec{P} |\Omega_{\vec{p}}\rangle = \vec{p} |\Omega_{\vec{p}}\rangle$$

$$H |\Omega_{\vec{p}}\rangle = \sqrt{m_\eta^2 + \vec{p}^2} |\Omega_{\vec{p}}\rangle \\ \hat{=} E_{\vec{p}}(\eta) |\Omega_{\vec{p}}\rangle$$

Auf diese Weise lassen sich aus $|\Omega\rangle$ Zustände mit beliebigem Impuls $|\vec{p}\rangle$ erzeugen (außer für den Grundzustand $|\Omega\rangle$).

Entsprechend kann man aus der Menge aller Eigenzustände von H mit Impuls null, $\{|\Omega\rangle\}$, durch Boosts ein vollständiges System von Zuständen konstruieren.

Analog zu der Vollständigkeitsrelation für die Ein-Teilchen-Zustände

$$(\mathbb{1})_{1\text{-Teilchen}} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{p}}} |\vec{p}\rangle \langle \vec{p}|$$

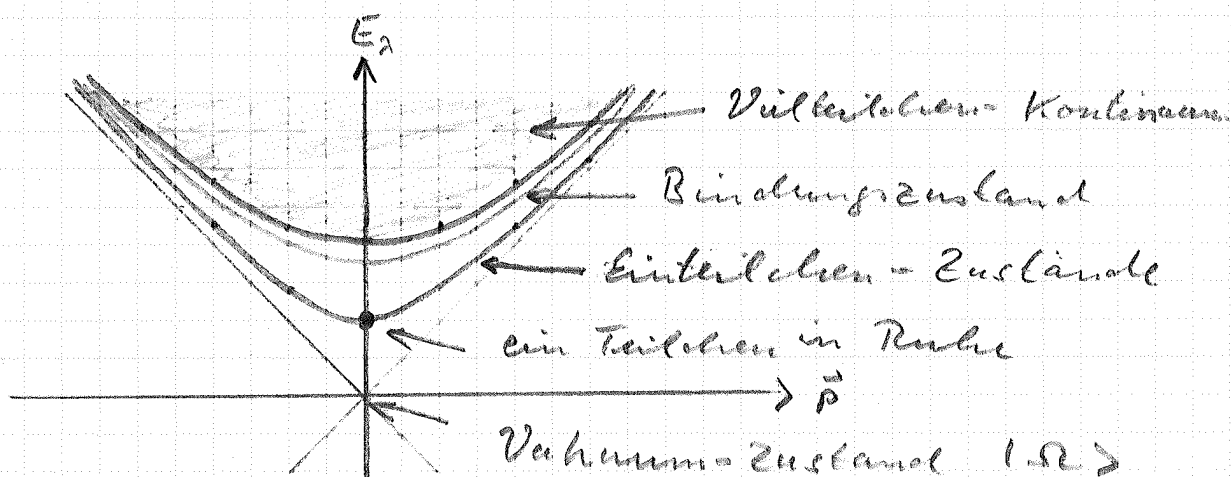
(vgl. Kap. II.3)

gilt dann für den gesamten Hilbert-Raum

$$\mathbb{1} = |\Omega\rangle \langle \Omega| + \sum_{\vec{p}} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{p}}(\vec{p})} |\vec{p}\rangle \langle \vec{p}|,$$

wobei die Summe über alle Impuls-0-Eigenzustände $|\Omega\rangle$ läuft und in der Regel auch ein Integral ist (z.B. über Zweiteilchen-Kontinuumzustände, bei denen die Teilchen die Impulse \vec{p} und $-\vec{p}$ haben). Es kann aber auch diskrete Summen über Bindungszustände geben.

Typischer Weise ergibt sich also folgendes Bild:



Wir nehmen im Folgenden an, dass $\langle \Omega | \phi(x) | \Omega \rangle = 0$ gilt, was in der Regel der Fall ist. (Auf den interessanten Fall, dass das nicht gilt, kommen wir im nächsten Kapitel zu sprechen.)

Sei außerdem zunächst $x^0 > x^0$.

$$\Rightarrow \langle \Omega | \phi(x) \phi(y) | \Omega \rangle$$

$$= \sum_\lambda \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_\vec{p}(\lambda)} \langle \Omega | \phi(x) | \lambda_\vec{p} \rangle \langle \lambda_\vec{p} | \phi(y) | \Omega \rangle$$

$$\langle \Omega | \phi(x) | \lambda_\vec{p} \rangle = \langle \Omega | e^{i p \cdot x} \phi(0) e^{-i p \cdot x} | \Omega \rangle$$

↑ Kap. II.4, $p = \begin{pmatrix} E \\ \vec{p} \end{pmatrix}$

$$= \langle \Omega | \phi(0) | \lambda_\vec{p} \rangle e^{-i p \cdot x} \Big|_{p^0 = E_\vec{p}(\lambda)}$$

Sei U die unitäre Transformation, die $|\lambda_\vec{p}\rangle$ nach $|\lambda_0\rangle$ zurückboostet:

$$U |\lambda_\vec{p}\rangle = |\lambda_0\rangle$$

Lorentz-Invarianz des Vakuums und skalare
Felder: $U|\Omega\rangle = |\Omega\rangle$

$$U\phi(x)U^{-1} = \phi(\Lambda^{-1}x) \Rightarrow U\phi(0)U^{-1} = \phi(0)$$

↑ Lorentz-Transf.
der Koordinaten

$$\begin{aligned} \Rightarrow \langle \Omega | \phi(x) | \lambda_{\vec{p}} \rangle &= \langle \Omega | U^{-1} U \phi(0) U^{-1} U | \lambda_{\vec{p}} \rangle e^{-ip \cdot x} \Big|_{p^0 = E_{\vec{p}}(\lambda)} \\ &= \langle \Omega | \phi(0) | \lambda_0 \rangle e^{-ip \cdot x} \Big|_{p^0 = E_{\vec{p}}(\lambda)} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \langle \Omega | \phi(x) \phi(y) | \Omega \rangle$$

$$= \sum_{\lambda} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{p}}(\lambda)} e^{-ip \cdot (x-y)} \Big|_{p^0 = E_{\vec{p}}(\lambda)} |\langle \Omega | \phi(0) | \lambda_0 \rangle|^2$$

$$= \sum_{\lambda} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m_{\lambda}^2 + i\epsilon} e^{-ip \cdot (x-y)} |\langle \Omega | \phi(0) | \lambda_0 \rangle|^2$$

↑ Feynman-Propagator eines "Teilchens"
mit "Masse" m_{λ} .

(Erinnerung:

$$\frac{1}{p^2 - m_{\lambda}^2 + i\epsilon} = \frac{1}{2E_{\vec{p}}(\lambda)} \left(\frac{1}{p_0 - E_{\vec{p}}(\lambda) + i\epsilon} - \frac{1}{p_0 + E_{\vec{p}}(\lambda) - i\epsilon} \right)$$

$$x^0 > y^0 \quad \Rightarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty} dp_0 = \int_{\infty}^{-\infty} dp_0 \rightarrow \text{Pol bei } p_0 = E_{\vec{p}}(\lambda) - i\epsilon$$

↪ ... ✓)

Für $y^0 > x^0$ erhält man das gleiche Ergebnis,
 (Man muss dann anders herum integrieren
 2) $p_0 = -E_{\vec{p}}(\lambda) + i\epsilon$. Substitution $\vec{p} \rightarrow -\vec{p}$ liefert
 dann einen Faktor $e^{-i\vec{p} \cdot (y-x)} \Big|_{p_0 = E_{\vec{p}}(\lambda)}$ ✓)

Das lässt sich dann schreiben als

$$\langle \Omega | T \phi(x) \phi(y) | \Omega \rangle = \int_0^{\infty} \frac{dM^2}{2\pi} \mathcal{S}(M^2) \mathcal{D}_F(x-y; M^2)$$

(„Källén-Lehmann-Darstellung“)

mit der spektralen Dichtefunktion

$$\mathcal{S}(M^2) = \sum_{\lambda} (2\pi) \delta(M^2 - m_{\lambda}^2) |\langle \Omega | \phi(0) | \lambda_0 \rangle|^2$$

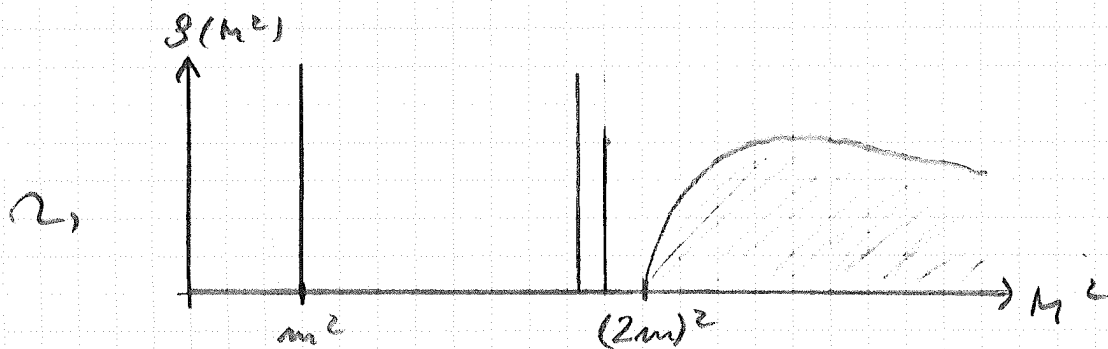
und dem Feynman-Propagator eines freien
 skalaren Teilchens mit Masse m

$$\mathcal{D}_F(x-y; m) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} e^{-i\vec{p} \cdot (x-y)}$$

Der gebrochene Propagator lässt sich also als
 Summe (oder Integral) über freie Propagatoren
 von „Teilchen“ mit Masse m_{λ} auffassen, die
 jeweils das Gewicht $|\langle \Omega | \phi(0) | \lambda_0 \rangle|^2$ haben.
 Diese „Teilchen“ entsprechen, wie wir gesehen haben,
 natürlich nicht nur echten Einteilchen-Zustän-
 den, sondern in der wechselwirkenden Theorie auch
 Mehrteilchenzuständen, sofern sie vom Operator $\phi(0)$
 aus dem Vakuum $|\Omega\rangle$ angeregt werden können.

gemäß unserer vorangehenden Diskussion besitzt die Theorie typischer Weise

- Einleitonen-Zustände bei der physikalischen Masse, $m_1 = m$
- gebundene Zustände mit $m_1 < 2m$
- ein Mehrleitonen-Kontinuum für $m_1 \geq 2m$



$$\Rightarrow S(M^2) = 2\pi \delta(M^2 - m^2) \cdot Z + S_{\text{höhere Zustände}}(M^2)$$

$$\text{mit } Z = |\langle R | \phi(0) | \phi_0(m_1 = m) \rangle|^2$$

Fourier-Transformation:

$$\int d^4x e^{ip \cdot x} \langle R | T \phi(x) \phi(0) | R \rangle$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{dM^2}{2\pi} S(M^2) \frac{i}{p^2 - M^2 + i\epsilon}$$

$$= \frac{iZ}{p^2 - m^2 + i\epsilon} + \int_{(2m)^2}^{\infty} \frac{dM^2}{2\pi} S(M^2) \frac{i}{p^2 - M^2 + i\epsilon}$$

2, $Z =$ Wellenfunktionsrenormierungskonstante

Vergleich mit der freien Theorie:

$$\int d^4x e^{i p \cdot x} \langle 0 | T \phi(x) \phi(0) | 0 \rangle = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$

→ Durch die Wechselwirkung kann der Operator $\phi(0)$ zusätzliche Zustände aus dem Vakuum $|0\rangle$ anregen. Dafür bekommen die Ein-Teilchen-Zustände ein anderes Gewicht.

Anschaulich kann ein propagierendes Teilchen durch die Wechselwirkungen zwischenzeitlich in verschiedene Anregungszustände übergehen, wodurch die Wahrscheinlichkeit, es im Ein-Teilchen-Zustand anzutreffen, sinkt.

Bei der Berechnung von S-Matrix-Elementen wollen wir jedoch sicherstellen, dass die in- und out-Zustände mit räumlich lokalisierten Ein-Teilchen-Zuständen zusammenhängen. Für die korrekte Normierung müssen wir daher die ein- und auslaufenden Felder durch renormierte Felder ersetzen, also die renormierten amputierten n -Punkt-Funktionen verwenden, die wir in Kap. VII.1 eingeführt haben.