

Notation (in der Literatur nicht einheitlich, aber konsistent mit Kap. IV.1):

$$iD(p) = \int dx e^{ip \cdot x} \langle \Omega | T \phi(x) \phi(0) | \Omega \rangle$$

$$\Rightarrow D(p) = \int_0^{\infty} \frac{dM^2}{2\pi} S(M^2) \frac{1}{p^2 - M^2 + i\epsilon}$$

Sokhotski-Plendj-Formel

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_a^b dx \frac{f(x)}{x \pm i\epsilon} = \mp i\pi f(0) + P \int_a^b dx \frac{f(x)}{x}; \quad a < 0 < b$$

$$\Rightarrow \text{Im} \frac{1}{x + i\epsilon} = -\pi \delta(x)$$

$S(M^2)$  = reell

$$\Rightarrow \text{Im} D(p) = \int_0^{\infty} \frac{dM^2}{2\pi} S(M^2) \text{Im} \frac{1}{p^2 - M^2 + i\epsilon} = -\frac{1}{2} S(p^2)$$

$$\Rightarrow \boxed{S(p^2) = -2 \text{Im} D(p)}$$

Sei nun

$$D(p) = \frac{1}{p^2 - m^2 - \Sigma(p^2) + i\epsilon}$$

mit bereits renormierter Masse,  
jedoch unrenormierten Feldern,  
in der physikalischen Masse  $m$   
gilt also

$$\Sigma(m^2) = 0, \quad \Sigma'(m^2) = \left. \frac{d\Sigma}{dp^2} \right|_{m^2} \neq 0$$

• In der Umgebung des Massenpols gilt

$$D(p^2 \approx m^2) = \frac{1}{(p^2 - m^2)(1 - \Sigma'(m^2)) + i\epsilon}$$

$$\Rightarrow S(p^2 \approx m^2) = Z 2\pi \delta(p^2 - m^2), \quad Z = (1 - \Sigma'(m^2))^{-1}$$

• Oberhalb der Schwellenenergie  $M_{th}$  zur Produktion reeller Mehrteilchensysteme hat  $\Sigma(p^2)$  einen Imaginärteil (vgl. QED-Rechnungen).

$$\text{Im } \Sigma(p^2 > M_{th}^2) < 0$$

$$\Rightarrow S(p^2 > M_{th}^2) = -i \frac{\text{Im } \Sigma(p^2)}{(p^2 - m^2 - \text{Re } \Sigma(p^2))^2 + (\text{Im } \Sigma(p^2))^2} > 0$$

• Bindungszustände entsprechen weiteren Polen des Propagators unterhalb von  $M_{th}$ :

$$m_i^2 = m^2 + \Sigma(m_i^2), \quad m < m_i < M_{th}$$

Insgesamt erhalten wir also

$$S(p^2) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Einteilchenzust.}}}{Z} 2\pi \delta(p^2 - m^2) + \sum_i \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Bindungszust.}}}{Z_i} 2\pi \delta(p^2 - m_i^2) + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Mehnteilchen-} \\ \text{Kontinuum}}}{S_{cont}}(p^2)$$

mit  $Z = (1 - \Sigma'(m^2))^{-1}$

$$Z_i = (1 - \Sigma'(m_i^2))^{-1}, \quad m_i^2 = m^2 + \Sigma(m_i^2)$$

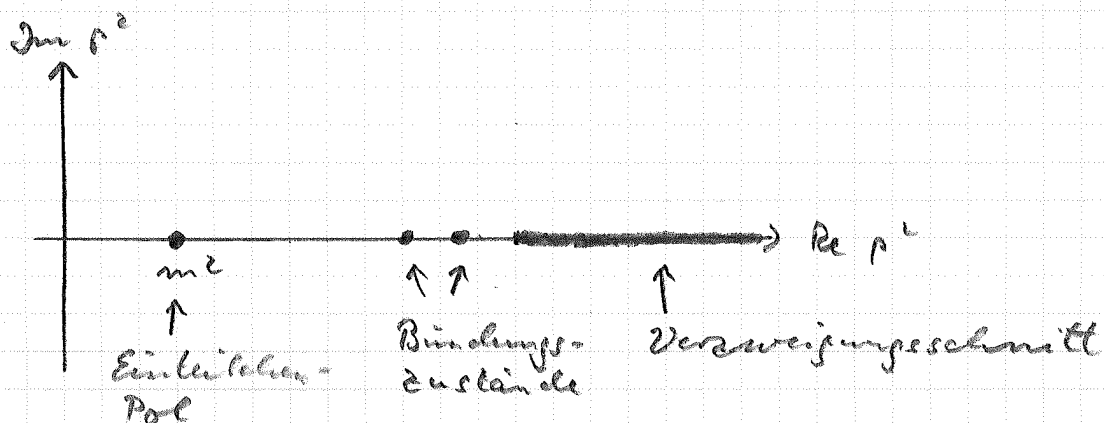
$$S_{cont}(p^2) = \frac{-2 \text{Im } \Sigma(p^2)}{(p^2 - m^2 - \text{Re } \Sigma(p^2))^2 + (\text{Im } \Sigma(p^2))^2}$$

Das entspricht genau der Skizze auf S. IX-41.

Die Spektralzerlegung von Fermionen ist ähnlich. Auf Grund der Dirac-Struktur gibt es hier zwei unabhängige spektrale Dichtefunktionen.

Wie wir bei den QED-Beispielen gesehen haben, hängt das Vorzeichen von  $\text{Im } \Sigma$  mit der  $i\varepsilon$ -Vorschrift der Propagatoren im Loop zusammen (z.B.  $\Sigma \sim \ln(\Delta(x) - i\varepsilon)$ ). Insbesondere hat  $\Sigma(p^2)$  - und damit der Propagator - einen Verzweigungsschnitt („branch cut“) entlang der reellen Achse für  $p^2 > 4M^2$ . Allgemein besitzen gedrehte Propagatoren also

- Pole bei der physikalischen Einleitellenmasse und Bindungszuständen
- einen Schnitt entlang der reellen Achse für  $p^2 > 4M^2$ , also oberhalb der Schwellenenergie zur Produktion von zwei oder mehreren reellen Teilchen.



X. Spontane Symmetriebrechung

X.1 Spontane Symmetriebrechung in der klassischen Feldtheorie

Beispiel: Das lineare Sigma-Modell

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \vec{\phi}) \cdot (\partial^\mu \vec{\phi}) + \frac{1}{2} \mu^2 \vec{\phi}^2 - \frac{\lambda}{4} (\vec{\phi}^2)^2, \quad \vec{\phi} = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_N \end{pmatrix}$$

↑  
Massenterm mit  
"falschem" Vorzeichen

symmetrisch unter  $N$ -dim Rotationen

$$\vec{\phi} \rightarrow R \vec{\phi}, \quad R \in O(N)$$

( $N \times N$ -Matrizen,  $R^T R = \mathbb{1}$ )

$$H = \int d^3x \left[ \frac{1}{2} \vec{\pi}^2 + \frac{1}{2} (\nabla_i \vec{\phi}) \cdot (\nabla_i \vec{\phi}) + V(\vec{\phi}^2) \right]$$

$\vec{\pi} = \dot{\vec{\phi}}$  kanonische konj. Impulsdichten

$$V(\vec{\phi}^2) = -\frac{1}{2} \mu^2 \vec{\phi}^2 + \frac{\lambda}{4} (\vec{\phi}^2)^2 \quad (\text{wollte nach unten beschränkt sein} \rightarrow \lambda > 0)$$

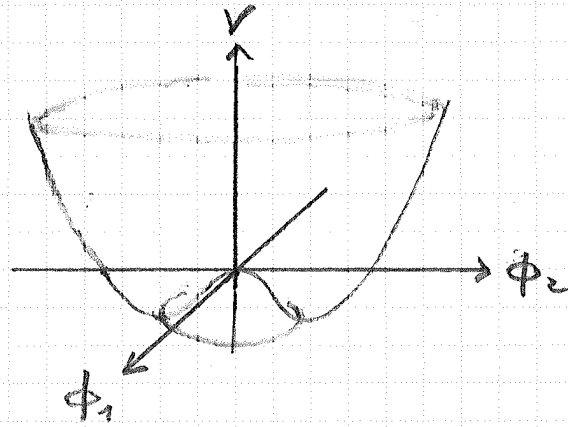
klassischer Grundzustand:

konstantes Feld ( $\partial_\mu \phi = 0$ ) mit  $\frac{\partial V}{\partial \vec{\phi}^2} = 0$

$$\Rightarrow \vec{\phi}^2 = \vec{\phi}_0^2 = \frac{\mu^2}{\lambda} \quad \left( \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = \frac{\lambda}{2} > 0 \rightarrow \text{Minimum} \right)$$

Die Bedingung schränkt nur die Länge des Vektors  $\vec{\phi}$  ein, nicht seine Richtung  
 $\rightarrow$  Der Grundzustand ist nicht eindeutig.

anschaulich für  $N=2$ :



wähle willkürlich  $\vec{\phi}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ v \end{pmatrix}$ ,  $v = \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}}$

Jede andere Wahl wäre genauso gut, aber man kann immer eine  $O(N)$ -Transformation der internen Koordinaten durchführen, die  $\vec{\phi}_0$  auf die obige Form bringt.

Dies bedeutet aber auch, dass  $\vec{\phi}_0$  nicht unter allen  $O(N)$ -Transformationen invariant ist, sondern nur unter der  $O(N-1)$ -Untergruppe, die  $\phi_1, \dots, \phi_{N-1}$  in einander überführt.

→ spontane Symmetriebrechung:

Der Grundzustand ist nicht unter allen Symmetrietransformationen der Lagrange-Dichte invariant.

Definiere „verschobene Felder“:

$$\vec{\phi}(x) = \begin{pmatrix} \pi_1(x) \\ \vdots \\ \pi_{N-1}(x) \\ v + \sigma(x) \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} \pi_i &\equiv \phi_i, & i=1, \dots, N-1 \\ \sigma &= \phi_N - v \end{aligned}$$

Die Bezeichnung ist historisch bedingt:

Im OLY-Modell kann man  $\pi_1, \pi_2, \pi_3$  mit den drei Pionen in Verbindung bringen.

Insbesondere sollten die Felder  $\pi_i$  nicht mit den kanonisch konjugierten Impulsdichten  $\pi_i$  verwechselt werden.

Mit den neuen Feldern ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} (\partial_\mu \vec{\pi}) \cdot (\partial^\mu \vec{\pi}) + \frac{1}{2} (\partial_\mu \sigma) (\partial^\mu \sigma) \\ &+ \frac{1}{2} \mu^2 \left[ \vec{\pi}^2 + (\sigma + v)^2 \right] - \frac{g}{4} \left[ \vec{\pi}^2 + (\sigma + v)^2 \right]^2 \\ &= \dots \\ &= \frac{1}{2} (\partial_\mu \vec{\pi}) \cdot (\partial^\mu \vec{\pi}) + \frac{1}{2} (\partial_\mu \sigma) (\partial^\mu \sigma) - \frac{1}{2} (2\mu^2) \sigma^2 \\ &- \mu \sqrt{\lambda} (\sigma^3 + \vec{\pi}^2 \sigma) - \frac{g}{4} (\sigma^4 + 2\vec{\pi}^2 \sigma^2 + (\vec{\pi}^2)^2) \\ &+ \frac{1}{4} \frac{\mu^4}{\lambda} \leftarrow \text{irrelevante Konstante,} \\ &\text{kann weggelassen werden} \end{aligned}$$

- $N-1$  masselose "Pionen"
- 1  $\sigma$ -Meson" mit Masse  $m_\sigma = \sqrt{2} \mu$
- 3- und 4-Punkt-Vertizes (in der quantisierten Theorie, s.u.)

Interpretation:

- $\sigma$  entspricht einer Anregung von  $\vec{\phi}_0$  in radiale Richtung. Das kostet Energie  $\rightarrow$  massive Mode
- $\pi_i$  sind Verschiebungen entlang des "Tals". Das kostet keine Energie  $\rightarrow$  masselose Moden

Verallgemeinerung: "Goldstone-Theorem"

Für jede spontan gebrochene kontinuierliche Symmetrie existiert ein masseloses Teilchen ("Goldstone-Boson")

in unserem Beispiel:

Die Elemente der  $O(N)$  können aus Drehungen in allen zu einander senkrechten Ebenen erzeugt werden (z.B.  $O(3)$ : Drehungen in der  $xy$ -, der  $xz$ - und der  $yz$ -Ebene).

$O(N)$ :  $\frac{1}{2} N(N-1)$  Generatoren

spontan gebrochen zu

$O(N-1)$ :  $\frac{1}{2} (N-1)(N-2)$  Generatoren

$$\rightarrow \frac{1}{2} N(N-1) - \frac{1}{2} (N-1)(N-2) = N-1 \text{ Goldstone-Bosonen} \checkmark$$

Formaler Beweis (für die klassische Theorie):

Entwickle  $V$  um das Minimum  $\vec{\phi}_0$ :

$$V(\vec{\phi}) = V(\vec{\phi}_0) + \frac{1}{2} m_{ab}^2 (\phi - \phi_0)_a (\phi - \phi_0)_b$$

mit  $m_{ab}^2 = \left. \frac{\partial^2 V}{\partial \phi_a \partial \phi_b} \right|_{\vec{\phi} = \vec{\phi}_0}$  symmetrische Matrix

Eigenwerte von  $(m_{ab}^2) = \text{Massen}^2$  der Felder

Betrachte infinitesimale Symmetrietransformation, die  $V$  invariant lässt:

$$\vec{\phi} \rightarrow \vec{\phi} + \alpha \vec{\Delta}(\vec{\phi}), \quad \alpha \text{ infinitesimal}$$

$$\Rightarrow V(\vec{\phi}) \rightarrow V(\vec{\phi}) + \frac{\partial V}{\partial \phi_a} \alpha \Delta_a(\vec{\phi}) \stackrel{!}{=} V(\vec{\phi}) \quad \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial \phi_b} \Delta_b(\vec{\phi}) = 0$$

$$\Rightarrow 0 = \underbrace{\frac{\partial^2 V}{\partial \phi_a \partial \phi_b}}_{m_{ab}^2} \Big|_{\vec{\phi} = \vec{\phi}_0} \Delta_b(\vec{\phi}_0) + \underbrace{\frac{\partial V}{\partial \phi_b}}_{=0} \Big|_{\vec{\phi} = \vec{\phi}_0} \frac{\partial \Delta_b}{\partial \phi_a} \Big|_{\vec{\phi} = \vec{\phi}_0}$$

da  $\vec{\phi}_0$  Minimum

$$\Rightarrow m_{ab}^2 \Delta_b(\vec{\phi}_0) = 0$$

triviale Fall:  $\vec{\Delta}(\vec{\phi}_0) = 0$

spontane Symmetriebrechung:  $\vec{\Delta}(\vec{\phi}_0) \neq 0$

Dann ist  $\vec{\Delta}(\vec{\phi}_0)$  ein Eigenvektor der Matrix  $(m_{ab}^2)$  mit Eigenwert 0, entspricht also eine masselosen Mode.



## X.2 Renormierung des linearen Sigma-Modells

Im Folgenden schreiben wir:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{\Phi}_{\text{unren.}} : \text{unrenormierte Felder} \\ \vec{\phi} : \text{renormierte Felder} \end{array} \right\} \vec{\Phi}_{\text{unren.}} = z^{\frac{1}{2}} \vec{\phi}$$

$\mu_0^2, \lambda_0$  : nackte Kopplungen

$$\Rightarrow \mathcal{L} = \frac{1}{2} z (\partial_\mu \vec{\phi}) \cdot (\partial^\mu \vec{\phi}) + \frac{1}{2} \mu_0^2 z \vec{\phi}^2 - \frac{\lambda_0}{4} z^2 (\vec{\phi}^2)^2$$

$$\text{Def.: } z =: 1 + \delta_z, \quad -\mu_0^2 z =: -\mu^2 + \delta_\mu, \quad \lambda_0 z^2 =: \lambda + \delta_\lambda$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mathcal{L} &= \frac{1}{2} (\partial_\mu \vec{\phi}) \cdot (\partial^\mu \vec{\phi}) + \frac{1}{2} \mu^2 \vec{\phi}^2 - \frac{\lambda}{4} (\vec{\phi}^2)^2 \\ &+ \frac{1}{2} \delta_z (\partial_\mu \vec{\phi}) \cdot (\partial^\mu \vec{\phi}) - \frac{1}{2} \delta_\mu \vec{\phi}^2 - \frac{\delta_\lambda}{4} (\vec{\phi}^2)^2 \end{aligned}$$

oberflächlicher Divergenzgrad:

$$\mathcal{D} = 4L - 2P = 4 - N$$

Symmetrie: nur Diagramme mit  $N$  gerade

$\Rightarrow$  primitiv divergente 1PI-Ampfeln



$$\mathcal{D} = 4$$

(unbeobachtbar)



$$\mathcal{D} = 2$$

$$a_0 \Lambda^2 + a_2 p^2 \ln \Lambda$$



$$\mathcal{D} = 0$$

$$\sim \ln \Lambda$$

3 Divergenzen, 3 Counterterme ✓