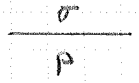
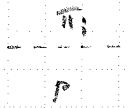
Wie wir gesehen haben, ist der klassische Grundzustand des Modells jedoch nicht durch $\vec{\Phi} = \vec{0}$ gegeben, sondern durch $\vec{\Phi}^2 = v^2 = \frac{\mu^2}{\lambda}$, also z.B. durch $\vec{\Phi} = \vec{\Phi}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ v \end{pmatrix}$.
Dieser Punkt ist daher auch der geeignete Ausgangspunkt für die störungstheoretische Behandlung der quantisierten Theorie.

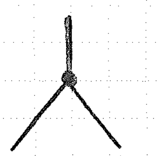
$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \mathcal{L} = {} & \tfrac{1}{2}(\partial_\mu \vec{\pi})\cdot(\partial^\mu \vec{\pi}) + \tfrac{1}{2}(\partial_\mu \sigma)(\partial^\mu \sigma) - \tfrac{1}{2}(2\mu^2)\sigma^2 \\
& - \underbrace{\mu\sqrt{\lambda}}_{=\lambda v}(\sigma^3 + \vec{\pi}^2\sigma) - \frac{\lambda}{4}(\sigma^4 + 2\vec{\pi}^2\sigma^2 + (\vec{\pi}^2)^2) \\
& + \tfrac{1}{2}\delta_Z(\partial_\mu \vec{\pi})\cdot(\partial^\mu \vec{\pi}) - \tfrac{1}{2}(\delta_\mu + \delta_\lambda v^2)\vec{\pi}^2 \\
& + \tfrac{1}{2}\delta_Z(\partial_\mu \sigma)(\partial^\mu \sigma) - \tfrac{1}{2}(\delta_\mu + 3\delta_\lambda v^2)\sigma^2 \\
& - (\delta_\mu v + \delta_\lambda v^3)\sigma \\
& - \delta_\lambda v(\sigma^3 + \vec{\pi}^2\sigma) - \tfrac{1}{4}\delta_\lambda(\sigma^4 + 2\vec{\pi}^2\sigma^2 + (\vec{\pi}^2)^2)
\end{aligned}
$$

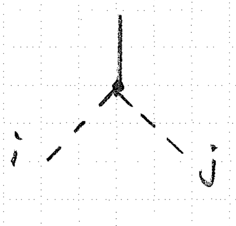
$\rightarrow$ Propagatoren:

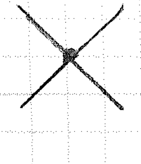

$= i D_\sigma(p^2) = \dfrac{i}{p^2 - 2\mu^2 + i\varepsilon}$

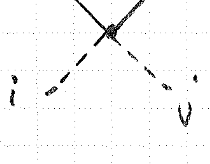

$= i D_\pi(p^2) = \dfrac{i}{p^2 + i\varepsilon}$ (für alle π_i, $i = 1, \dots, N-1$)

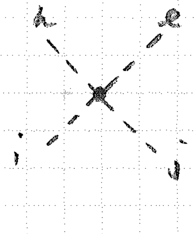
Tree-level-Vertizes:


$= -6i\lambda v$

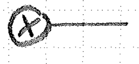

$= -2i\lambda v\,\delta^{ij}$

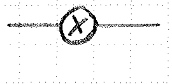

$= -6i\lambda$


$= -2i\lambda\,\delta^{ij}$

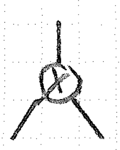
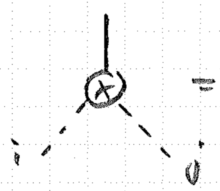

$= -2i\lambda\,[\delta^{ij}\delta^{kl} + \delta^{ik}\delta^{jl} + \delta^{il}\delta^{jk}]$

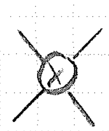
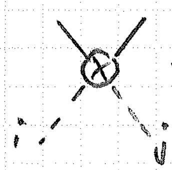
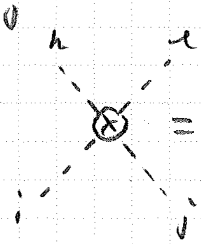
Counter-Terme:

 $= -i\,(\delta_\mu v + \delta_\lambda v^3)$

 $= i\,(\delta_Z p^2 - \delta_\mu - 3\delta_\lambda v^2)$

 $= i\,(\delta_Z p^2 - \delta_\mu - \delta_\lambda v^2)$

 $= -6i\delta_\lambda v$  $= -2i\delta_\lambda v\,\delta^{ij}$

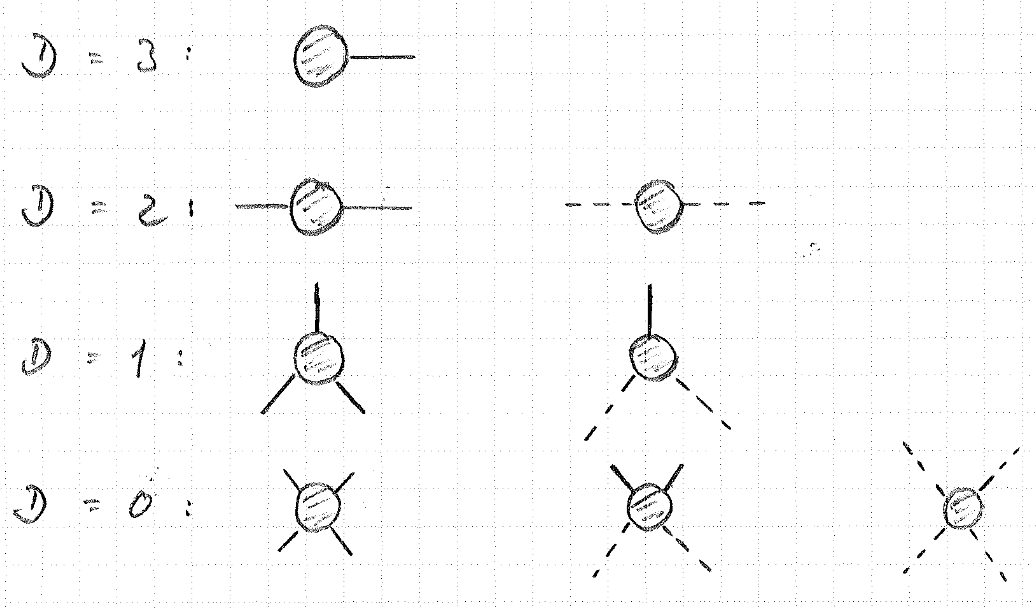
 $= -6i\delta_\lambda$  $= -2i\delta_\lambda \delta^{ij}$  $= -2i\delta_\lambda\,[\delta^{ij}\delta^{kl} + \delta^{ik}\delta^{jl} + \delta^{il}\delta^{jk}]$

Ausgedrückt durch die „verschobenen Felder" wirkt die Struktur der Theorie komplizierter als in den ursprünglichen Feldern ϕ_i:

- Die Symmetrie ist nicht mehr offensichtlich.
- σ und π haben unterschiedliche Tree-level-Massen → unterschiedliche Propagatoren und 2-Punkt-Counterterme
- Ebenso muss bei den Vertizes zwischen σ und π unterschieden werden
- Es gibt Dreipunkt-Vertizes und Counterterme sowie einen Einpunkt-Counterterm

→ N-Punkt-Funktionen mit ungeradem N möglich

→ 8 primitiv divergente 1PI-Amplituden



Dem gegenüber stehen 8 Counterterme, aber diese hängen nur von 3 unabhängigen Parametern, δ_Z, δ_μ, δ_λ, ab. Funktioniert das?

Antwort: Ja, weil die 8 divergenten Amplituden auch nicht unabhängig sind. Trotzdem ist das nicht offensichtlich.

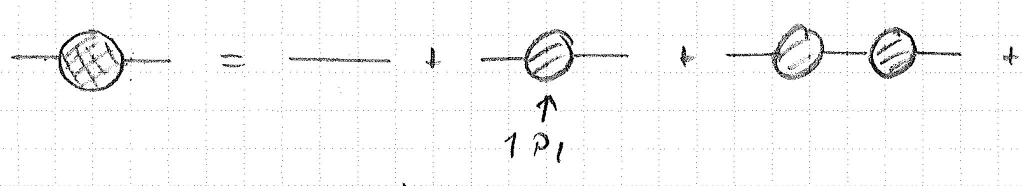
Renormierungsbedingungen

Zur Fixierung von δ_Z, δ_μ und δ_λ benötigen wir wieder drei Renormierungsbedingungen. In der ursprünglichen Version des Modells mit den unverschobenen Feldern würden wir dazu typischer Weise den Pol (= Masse) und das Residuum der ϕ-Propagatoren und den Wert der $\phi\phi$-Streuamplitude an einem bestimmten Renormierungspunkt heranziehen.

Mit den verschobenen Feldern stehen uns mehrere sinnvolle Varianten zur Verfügung.

Variante 1:

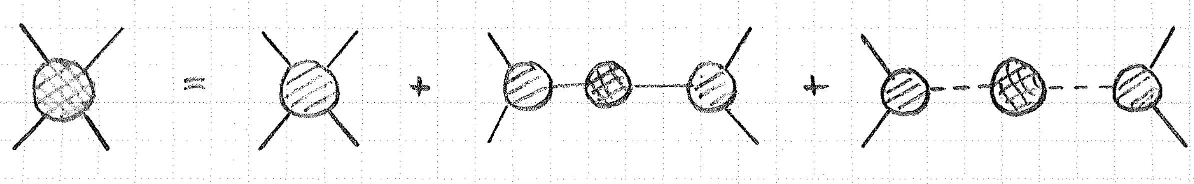
Fixiere Pol und Residuum des σ-Propagators und die $\sigma\sigma$-Streuamplitude an der Schwelle:



$$= \frac{i}{p^2 - m_\sigma^2 - \Sigma(p^2) + i\varepsilon}$$

$2\mu^2$

- $\Sigma(p^2 = m_\sigma^2) \stackrel{!}{=} 0$,
- $\left.\frac{d\Sigma}{dp^2}\right|_{p^2 = m_\sigma^2} \stackrel{!}{=} 0$



$= -i\mathcal{M}_{\sigma\sigma}(s,t,u)$

- $-i\mathcal{M}_{\sigma\sigma}(s = 4m_\sigma^2, t = 0, u = 0) \stackrel{!}{=} -6i\lambda$

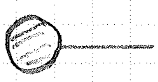
$\rightarrow$ μ und λ werden so gewählt, dass

$2\mu^2 = m_\sigma^2$ = „physikalische" σ-Masse

$-i\lambda$ = „physikalische $\sigma\sigma$-Streuamplitude an der Schwelle.

Der interessante Aspekt ist, dass nach der Fixierung der Renormierungsbedingungen alle anderen Amplituden festgelegt sind. Sie sollten dann nicht nur endlich sein, sondern die Theorie liefert auch eine Vorhersage für den endlichen Wert. Insbesondere gibt es Vorhersagen für die Pion-Masse und die $\pi\pi$- und $\pi\sigma$-Streuamplituden.

Anders als beispielsweise in der QED sind im Linearen-Sigma-Modell (mit verschobenen Feldern) auch nichtverschwindende Ein-Punkt-Funktionen möglich.


$$= \langle \Omega | \sigma(x) | \Omega \rangle \equiv \langle \sigma \rangle$$

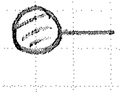
Für die ursprünglichen Felder bedeutet das

$$\langle \phi_N \rangle = \langle v + \sigma \rangle = \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}} + \langle \sigma \rangle$$

↳ Der Erwartungswert des Feldes kann vom klassischen Wert (= Minimum von V) abweichen.

→ <u>Variante 2:</u>

Renormiere so, dass $\langle \sigma \rangle = 0$ und damit $\langle \phi_N \rangle = \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}}$ bleibt:

- $\langle \sigma \rangle =$  $\overset{!}{=} 0$

Wir können dann noch zwei weitere Bedingungen stellen, z.B. wie vorher

- $$\left.\frac{d\Sigma}{dp^2}\right|_{p^2=m_\sigma^2} \stackrel{!}{=} 0$$

- $$-iM_{\sigma\sigma}(s=4m_\sigma^2, t=0, u=0) \stackrel{!}{=} -6i\lambda$$

In diesem Fall ist die σ-Masse m_σ nicht fixiert, sondern ist (wie die Pion-Masse) eine Vorhersage der Theorie.

Bemerkung:

Eine störungstheoretische Behandlung des ursprünglichen Modells in den unverschobenen Feldern ϕ_i, würde stets den Erwartungswert $\langle\vec{\phi}\rangle = \vec{0}$ liefern.

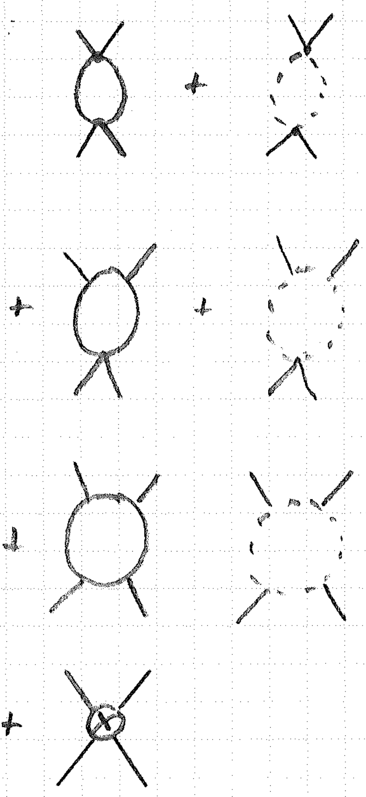
→ Die spontane Symmetriebrechung, insbesondere auch schon der klassische Erwartungswert $\langle\phi_N\rangle = v$, sind nicht-störungstheoretische Effekte.

Etwas konkretere Analyse in 1-Loop-Ordnung:

(explizite Rechnungen → Peskin/Schroeder)

- **σσ-Streuamplitude**

$-i\mathcal{M}_{\sigma\sigma}^{(1\text{-Loop})} =$



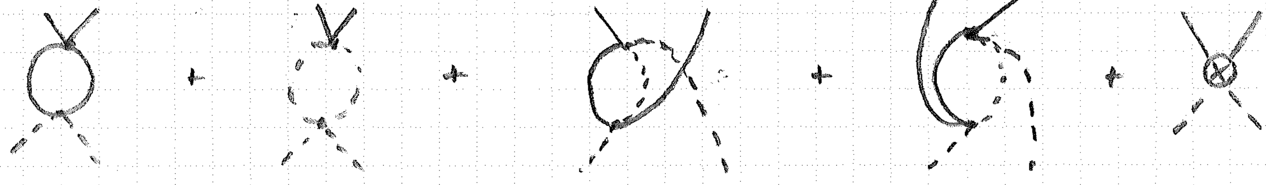
+ (Crossing-Terme)

Nur die Diagramme der ersten Zeile (und der Counterterm) sind divergent, da die anderen Diagramme mindestens drei Propagatoren besitzen, die die Diagramme endlich machen ($\sim \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left(\frac{1}{k^2}\right)^3$).

→ Der divergente Anteil der ersten Zeile (impulsunabhängig) bestimmt den divergenten Anteil von δ_λ. (Zur Festlegung des konvergenten Teils von δ_λ müssen alle obigen Loop-Diagramme + Tree-level-Diagramme bis zur Ordnung $O(\lambda^2)$ ausgewertet werden.)

- <u>πσ - Amplitude</u>

Die divergenten Diagramme sind die

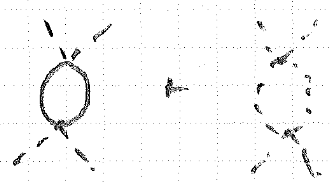
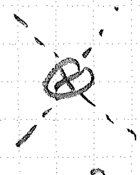


Der Counterterm ist ebenfalls proportional zu δ_λ und liegt daher nach Renormierung der σσ - Amplitude fest.

Explizite Rechnung: Amplitude endlich.

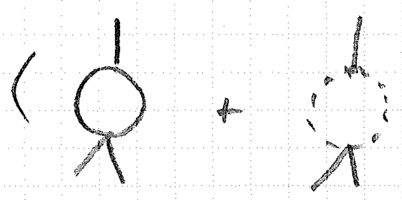
- <u>ππ - Amplitude</u>

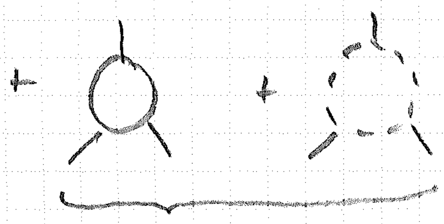
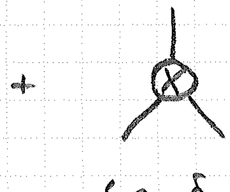
analog:

 + Crossing-Terme +  = endlich

($\sim \delta_\lambda$)

- <u>3σ - Vertex</u>

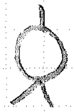
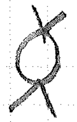
( + Crossing-Terme)

 + 

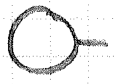
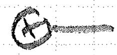
endlich ($\sim \delta_\lambda$)

= endlich

• <u>σππ-Vertex</u> : analog

Die divergenten Diagramme der 3σ-Vertexfunktion (σππ-Vertexfunktion) verhalten sich wie v mal die divergenten Anteile der 4σ- (σσππ-) Amplitude.
Grund: 3- und 4-Punkt-Vertizes stammen ursprünglich aus der $\lambda(\vec{\Phi}^2)^2$-Wechselwirkung, wobei bei den 3-Punkt-Vertizes ein Feld durch v ersetzt wurde. Analog kann z.B.  auf  zurückgeführt werden, indem man eine äußere Linie durch v ersetzt.

• <u>Ein-Punkt-Amplitude</u>

$\langle\sigma\rangle =$  +  + 

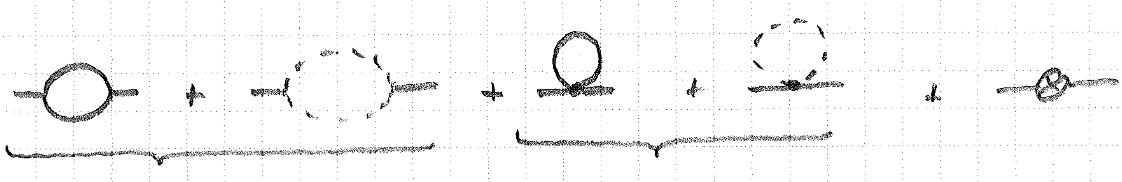
$-i(\delta_\mu v + \delta_\lambda v^3)$

In Variante 2 soll $\langle\sigma\rangle = 0$ gelten.

→ legt δ_μ fest.

In Variante 1 wird δ_μ durch die σ-Masse fixiert (s.u.), und $\langle\sigma\rangle$ ist eine Vorhersage.

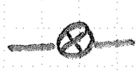
• σ - Selbstenergie

$-i\Sigma_\sigma =$ 

(a) (b)

$+$ 

„Tadpoles" $\sim \lambda v \langle\sigma\rangle = 0$ in Variante 2
(= Kaulquappen)

 $= i(\delta_Z p^2 - \delta_\mu - 3\delta_\lambda v^2)$

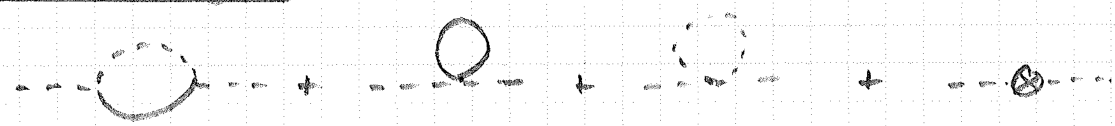
$= -i(2v^2\delta_\lambda) - i(\delta_\mu + v^2\delta_\lambda) + ip^2\delta_Z$

↓ eliminiert Divergenz von (a)

↓ eliminiert Divergenz von (b)

↑ endlich

• π - Selbstenergie

$-i\Sigma_\pi =$ 

$+$ Tadpoles

Ergebnis: - endlich

- $\Sigma_\pi(p^2=0) = 0 \Rightarrow m_\pi = 0$

Das Pion bleibt masselos, d.h. das Goldstone-Theorem „überlebt" die Quantenkorrektur (zumindest in 1-Loop-Ordnung)