

### X.3 Die effektive Wirkung

In der klassischen Feldtheorie, die wir in Abschnitt X.1 diskutiert haben, hatten wir eine geometrische Anschauung der spontanen Symmetriebrechung und des Goldstone-Theorems über das Potential  $V$ :

- Die Symmetrie der Theorie, d.h. der klassischen Wirkung ist als Symmetrie von  $V$  erkennbar.
- Feldkonfigurationen, für die  $V$  minimal ist, sind nicht invariant unter diesen Symmetrietransformationen  $\rightarrow$  spontane Symmetriebr.
- Das Minimum von  $V$  ist kontinuierlich entartet  $\rightarrow$  Goldstone-Theorem

In der Behandlung der quantisierten Theorie in Abschnitt X.2 ging diese geometrische Anschauung verloren.

- Durch die Entwicklung um einen ausgewählten Minimumspunkt von  $V$  ist die Symmetrie nicht mehr offensichtlich
- Durch Quanteneffekte kann der Erwartungswert, der die spontane Symmetriebrechung signalisiert (in unserem Beispiel  $\langle \sigma \rangle$ ) vom Wert am Minimum von  $V$  abweichen.

2) Gibt es eine Funktion in der QFT, der man die Symmetrie des Problems „ansieht“ und dessen Minimum den Vakuumwartungswert des Quantenfeldes ergibt?

Antwort: Ja, das „effektive Potential“  $V_{\text{eff}}$ , das wiederum mit der „effektiven Wirkung“ zusammenhängt

(Die folgende Vorgehensweise kann durch eine Analogie zur statistischen Physik motiviert werden, vgl. Peskin/Schwartz.)

Erzeugendes Funktional einer skalaren QFT:

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi \exp \left[ i \int d^4x (\mathcal{L}[\phi] + J\phi) \right]$$

(Dabei können  $\phi$  und  $J$  auch mehrere Komponenten besitzen wie im QM-Modell.)

Wir schreiben nun

$$Z[J] = e^{-iW[J]} \quad (\Leftrightarrow) \quad W[J] = i \log Z[J]$$

(  $\log \equiv \ln$  )

$$\Rightarrow \frac{\delta}{\delta J(x)} W[J] = i \frac{1}{Z[J]} \frac{\delta}{\delta J(x)} Z[J]$$

$$= - \frac{\int \mathcal{D}\phi e^{i \int d^4y (\mathcal{L} + J\phi)} \phi(x)}{\int \mathcal{D}\phi e^{i \int d^4y (\mathcal{L} + J\phi)}}$$

$$\equiv - \langle \Omega | \phi(x) | \Omega \rangle_J = \text{Vakuumwartungswert von } \phi(x) \text{ in Anwesenheit der Quelle } J(x)$$

Diese Größe bezeichnet man auch als "klassisches Feld"

$$\phi_{cl}(x) \equiv \langle \Omega | \phi(x) | \Omega \rangle$$

Dabei ist es wichtig im Hinterkopf zu behalten, dass  $\phi_{cl}(x)$  nicht nur eine Funktion von  $x$  ist, sondern vor allem auch ein Funktional von  $J(x)$ . Dies wollen wir nun umkehren: Wie kann man aus einem vorgegebenen  $\phi_{cl}(x)$  die zugehörige Quelle  $J(x)$  berechnen?

2) Legendre-Transformation:

$$\Gamma[\phi_{cl}] = -W[J] - \int d^4y J(y) \phi_{cl}(y)$$

= "effektive Wirkung"

$$\Rightarrow \frac{\delta}{\delta \phi_{cl}(x)} \Gamma[\phi_{cl}] = - \frac{\delta}{\delta \phi_{cl}(x)} W[J] - \int d^4y \frac{\delta J(y)}{\delta \phi_{cl}(x)} \phi_{cl}(y) - J(x)$$

$$= - \int d^4y \left\{ \underbrace{\frac{\delta W[J]}{\delta J(y)}}_{= -\phi_{cl}(y)} \frac{\delta J(y)}{\delta \phi_{cl}(x)} + \frac{\delta J(y)}{\delta \phi_{cl}(x)} \phi_{cl}(y) \right\} - J(x)$$

$$\Rightarrow \frac{\delta}{\delta \phi_{cl}(x)} \Gamma[\phi_{cl}] = -J(x)$$

Für den Fall einer verschwindenden Quelle,  
 $J(x) = 0$ , gilt also

$$\frac{\delta}{\delta \phi_{ce}} \Gamma[\phi_{ce}] = 0$$

→ Die Vakuum-Erwartungswerte  $\langle \phi(x) \rangle$  der Theorie sind Lösungen dieser Gleichung.

Translationsinvarianz des Vakuums

2)  $\phi_{ce}$   $x$ -unabhängig

(Manchmal existieren zusätzlich lokalisierte, also  $x$ -abhängige Lösungen („Solitonen“), die wir hier aber nicht betrachten wollen.)

Für große, aber endliche Raumzeit-Volumina  $VT$  ist  $\Gamma$  eine extensive Größe, d. h. für  $x$ -unabhängige  $\phi_{ce}$  gilt

$$\Gamma[\phi_{ce}] \sim VT$$

Man definiert dann

$$\Gamma[\phi_{ce}] = - (VT) V_{\text{eff}}(\phi_{ce}),$$

$V_{\text{eff}}$ : „effektives Potential“,

und die Vakuum-Erwartungswerte  $\phi_{ce} = \langle \phi \rangle$  sind die Lösungen der Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial \phi_{ce}} V(\phi_{ce}) = 0$$

Interpretation:

Bei der Herleitung des Pfadintegral-Formalismus hatten wir gefunden:

$$\langle \Omega | e^{-iHT} | \Omega \rangle \sim \int \mathcal{D}\phi e^{i \int d^4x \mathcal{L}[\phi(x)]}$$

$$\text{mit } \int d^4x = \int_{-(1-i\epsilon)\frac{T}{2}}^{(1-i\epsilon)\frac{T}{2}} dt \int_V d^3x$$

Entsprechend gilt

$$Z[J] = e^{-iW[J]} \sim \langle \Omega | e^{-iHT} | \Omega \rangle_J$$

$$\Rightarrow W[J] = E_0[J]T + \text{const.} = \mathcal{E}_0[J]VT + \text{const.}$$

$E_0[J]$  = Vakuum-Energie in Anwesenheit von  $J$

$\mathcal{E}_0[J]$  = " - Energiedichte " " " " "

const. = physikalisch irrelevante Konstante

Für  $J=0$  gilt

$$\Gamma[\phi_{cl}] = -W[0] = -\mathcal{E}_0[0]VT - \text{const.}$$

$$\Rightarrow V_{\text{eff}}(\phi_{cl}) = \mathcal{E}_0[0] + \text{const.}'$$

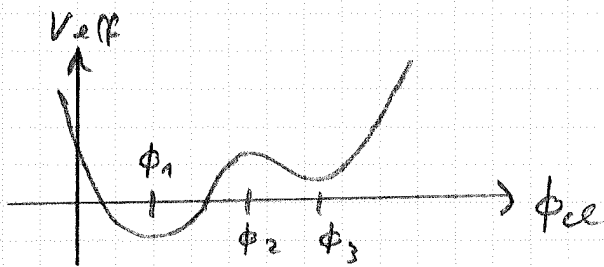
Das effektive Potential entspricht der Vakuum-Energiedichte. Der stabile Grundzustand ist die Feldkonfiguration, die die Vakuum-energiesdichte minimiert, und  $\frac{\partial V_{\text{eff}}}{\partial \phi_{cl}} = 0$  ist die notwendige Bedingung dafür.

Wie angekündigt übernimmt  $V_{\text{eff}}$  in der quantisierten Theorie also die Rolle von  $V$  in der klassischen Theorie.

→ spontane Symmetriebrechung:

$V_{\text{eff}}$  hat mehrere entartete absolute Minima, die nicht unter der Symmetrietransformation invariant sind.

Wenn wir davon festhalten, dass  $\phi_{\text{cl}}$   $x$ -unabhängig ist, kann  $V_{\text{eff}}$  insbesondere mehrere lokale Minima und Maxima haben, z.B.



- $\phi_1$ : Grundzustand
- $\phi_2$ : instabiler Zustand
- $\phi_3$ : metastabiler "

Das ist allerdings nicht ganz richtig:

- Betrachten wir die Situation, dass das System aus makroskopischen Domänen besteht mit
 
$$\langle \phi \rangle = \phi_1 \quad \text{in } \xi \cdot VT$$

$$\langle \phi \rangle = \phi_3 \quad \text{in } (1-\xi) VT, \quad 0 < \xi < 1$$

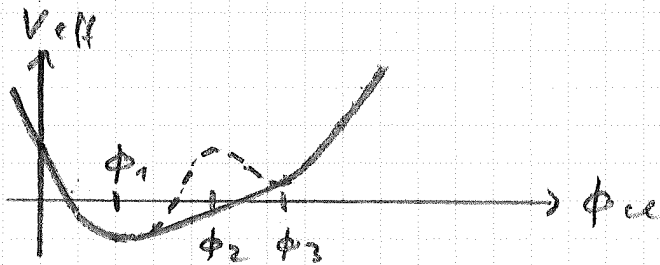
Daraus ergibt sich insgesamt in  $VT$ :

$$\langle \phi \rangle = \xi \phi_1 + (1-\xi) \phi_3 \equiv \phi_{\text{cl}}$$

und

$$V_{\text{eff}}(\phi_{\text{cl}}) = \xi V(\phi_1) + (1-\xi) V(\phi_3),$$

was im größten Teil des Intervalls zwischen den beiden Minima kleiner ist als der ursprünglichen Wert. Genauer gesagt ergibt sich der korrekte Verlauf des effektiven Potentials durch eine „Maxwell-Konstruktion“



(für Details siehe e.g. [Y. Fujimoto et al., Effective Potential for Nonconvex Potentials, Nucl. Phys. B212 (1983) 269-300])

→  $V_{eff}$  ist eine konvexe Funktion von  $\phi_{ce}$ .

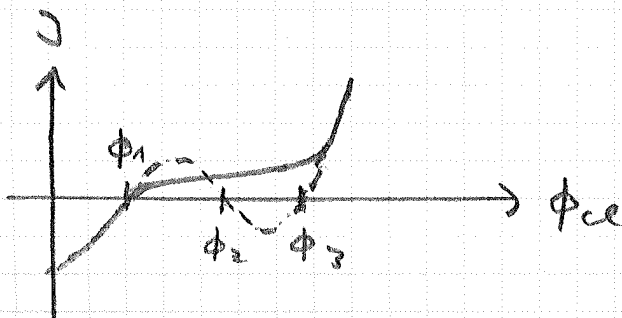
- Tatsächlich kann man allgemein zeigen, dass  $V_{eff}(\phi_{ce})$  konvex sein muss. Das hängt mit der ursprünglichen Definition von  $\Gamma[\phi_{ce}]$  über die Legendre-Transformation zusammen.

etwas vereinfachtes Argument

(für  $x$ -unabh.  $\phi_{ce}$  und  $J$ ):

$$J = - \frac{\delta \Gamma}{\delta \phi_{ce}} \sim \frac{\partial V_{eff}}{\partial \phi_{ce}}$$

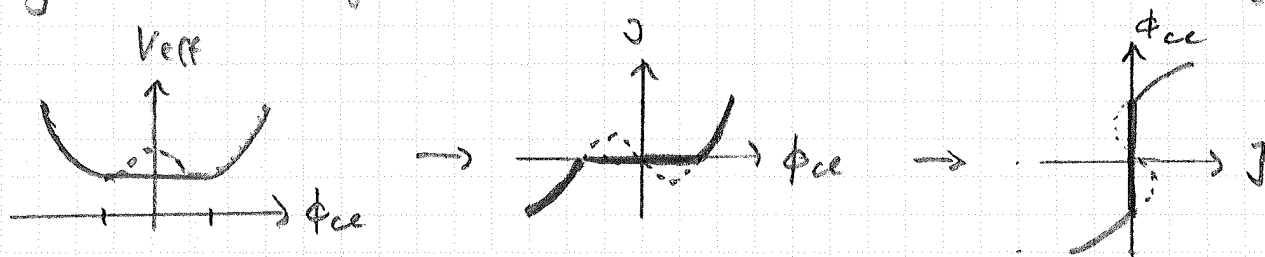
Für das obige Beispiel ergibt sich damit (qualitativ)



Umkehrung  $\rightarrow \phi_{ce} [J] \equiv \langle \Omega | \phi | \Omega \rangle_J$

Für die ursprüngliche (= gestrichelte) Kurve wäre dies im nicht-konvexen Bereich nicht eindeutig, was im Widerspruch zum Pfadintegral-Resultat  $\langle \Omega | \phi | \Omega \rangle_J = \frac{\delta W}{\delta J}$  steht (WCSJ ist eindeutig). Für die konvexe Kurve besteht dieses Problem nicht.

Nur bei der spontanen Brechung einer exakten Symmetrie gibt es noch eine Mehrdeutigkeit:



Diese kann man formal dadurch umgehen, dass man zunächst eine kleine explizite Symmetriebrechung einführt, die das effektive Potential leicht „kippt“, und diese dann gegen null gehen lässt.



## X.4 Erzeugende Funktionale

Im Kap. VIII, 3 haben wir  $Z[J]$  als erzeugendes Funktional für Korrelationsfunktionen eingeführt:

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi \, e^{i \int d^4x (\mathcal{L}[\phi] + J\phi)}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{\delta}{\delta J(x_1)} \dots \frac{\delta}{\delta J(x_n)} Z[J] &= i^n \int \mathcal{D}\phi \, \phi(x_1) \dots \phi(x_n) e^{i \int d^4x (\mathcal{L} + J\phi)} \\ &= i^n Z[J] \langle \phi(x_1) \dots \phi(x_n) \rangle_J \end{aligned}$$

↑  
(zeitgeordnetes Produkt der Heisenberg-Operatoren)

In der Regel interessieren wir uns nur für den Fall  $J \rightarrow 0$ , aber wir können die folgende Diskussion auch allgemeiner halten. Dabei lassen wir den Index  $J$  der Einfachheit halber weg.

Wir betrachten nun die Funktionalableitungen von  $W[J] = i \log Z[J]$

$$\Rightarrow \frac{\delta W}{\delta J(x)} = i \frac{1}{Z} \frac{\delta Z}{\delta J(x)} = i \frac{1}{Z} i Z \langle \phi(x) \rangle = - \langle \phi(x) \rangle$$

in Übereinstimmung mit S. X-18.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{\delta^2 W}{\delta J(x) \delta J(y)} &= \frac{\delta}{\delta J(x)} \left( i \frac{1}{z} \frac{\delta z}{\delta J(y)} \right) \\ &= i \frac{1}{z} \frac{\delta^2 z}{\delta J(x) \delta J(y)} - i \frac{1}{z^2} \frac{\delta z}{\delta J(x)} \frac{\delta z}{\delta J(y)} \\ &= i^3 (\langle \phi(x) \phi(y) \rangle - \langle \phi(x) \rangle \langle \phi(y) \rangle) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \phi(x) \phi(y) \rangle &= x \text{---} \textcircled{\otimes} \text{---} y + x \text{---} \textcircled{\otimes} \textcircled{\otimes} \text{---} y \\ &\equiv \langle \phi(x) \phi(y) \rangle_{\text{conn}} + \langle \phi(x) \rangle \langle \phi(y) \rangle \\ &\quad \uparrow \qquad \qquad \qquad \uparrow \\ &\quad \text{verbundene} \qquad \text{unverbundene} \\ &\quad \qquad \qquad \qquad \text{Diagramme} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{\delta^2 W}{\delta J(x) \delta J(y)} = -i \langle \phi(x) \phi(y) \rangle_{\text{conn}}$$

Analoges ergibt sich für höhere Ableitungen

$$2) \quad \boxed{\frac{\delta^n W[J]}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_n)} = i^{n+1} \langle \phi(x_1) \dots \phi(x_n) \rangle_{\text{conn}}}$$

2,  $W[J]$  = erzeugendes Funktional für verbundene Diagramme

Als nächstes betrachten wir die effektive Wirkung.

$$\frac{\delta \Gamma}{\delta \phi_{cl}(x)} = -J(x)$$

$$\Rightarrow \frac{\delta}{\delta J(y)} \frac{\delta \Gamma}{\delta \phi_{cl}(x)} = - \frac{\delta J(x)}{\delta J(y)} = -\delta(x-y)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \delta(x-y) &= - \int d^4z \frac{\delta \phi_{cl}(z)}{\delta J(y)} \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \phi_{cl}(z) \delta \phi_{cl}(x)} \\ &= \int d^4z \frac{\delta^2 W}{\delta J(y) \delta J(z)} \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \phi_{cl}(z) \delta \phi_{cl}(x)} \\ &\equiv \left( \frac{\delta^2 W}{\delta J \delta J} \right)_{yz} \left( \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \phi_{cl} \delta \phi_{cl}} \right)_{zx} \end{aligned}$$

↑  
formale Matrix-Notation  
in diskretisierter Raumzeit

In diesem Sinne gilt

$$\left( \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \phi_{cl} \delta \phi_{cl}} \right) = \left( \frac{\delta^2 W}{\delta J \delta J} \right)^{-1}$$

$$\frac{\delta^2 W}{\delta J(x) \delta J(y)} = -i \langle \phi(x) \phi(y) \rangle_{\text{conn}} \equiv -i \mathcal{D}(x,y)$$

↑  
geordneter Propagator

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \phi_{cl}(x) \delta \phi_{cl}(y)} &= i \mathcal{D}^{-1}(x,y) \\ &= i \text{ inverser (geordneter) Propagator} \end{aligned}$$

Fourier-Transformation (translationsinv. Vakuum)

$$D(x, y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-i p \cdot (x - y)} i D(p)$$

$$\leadsto \tilde{D}(p) = p^2 - m^2 - \sum(p) \quad (\text{vgl. S. VII-3})$$

↑  
|p| - Selbstenergie

Um höhere Ableitungen zu berechnen, verwenden wir

$$\frac{\delta}{\delta J(z)} = \int d^4 w \underbrace{\frac{\delta \phi_{ce}(w)}{\delta J(z)}}_{\frac{\delta^2 W}{\delta J(z) \delta J(w)}} \frac{\delta}{\delta \phi_{ce}(w)} = i \int d^4 w D(z, w) \frac{\delta}{\delta \phi_{ce}(w)}$$

und die Regel zur Ableitung inverser Matrizen:

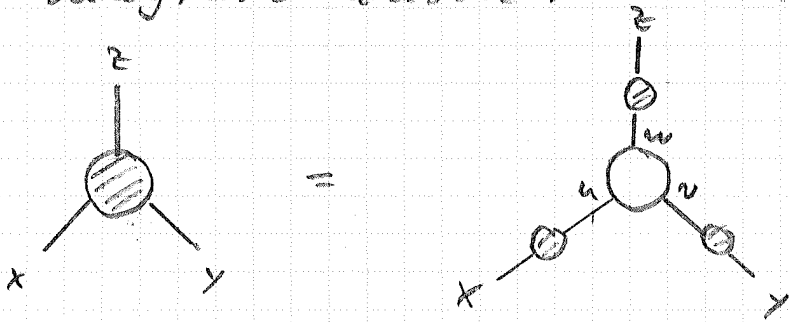
$$0 = \frac{d}{d\alpha} (M(\alpha) M^{-1}(\alpha)) = \frac{dM}{d\alpha} M^{-1} + M \frac{dM^{-1}}{d\alpha}$$

$$\Leftrightarrow \frac{dM^{-1}}{d\alpha} = -M^{-1} \frac{dM}{d\alpha} M^{-1}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{\delta^3 W[J]}{\delta J(x) \delta J(y) \delta J(z)} &= i \int d^4 w D(z, w) \frac{\delta}{\delta \phi_{ce}(w)} \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(x) \delta J(y)} \\ &\equiv i D_{zw} \frac{\delta}{\delta \phi_{ce}^w} \left( \frac{\delta^2 W}{\delta J \delta J} \right)_{xy} \\ &= i D_{zw} \frac{\delta}{\delta \phi_{ce}^w} \left( \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \phi_{ce} \delta \phi_{ce}} \right)_{xy}^{-1} \\ &= -i D_{zw} \underbrace{\left( \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \phi_{ce} \delta \phi_{ce}} \right)_{xz}^{-1}}_{-i D_{xz}} \frac{\delta^3 \Gamma}{\delta \phi_{ce}^z \delta \phi_{ce}^w \delta \phi_{ce}^y} \underbrace{\left( \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \phi_{ce} \delta \phi_{ce}} \right)_{xy}^{-1}}_{-i D_{xy}} \end{aligned}$$

$$\equiv i \int d^4u d^4v d^4w \mathcal{D}(x-u) \mathcal{D}(y-v) \mathcal{D}(z-w) \frac{\delta^3 \Gamma}{\delta \phi_{ce}(u) \delta \phi_{ce}(v) \delta \phi_{ce}(w)}$$

diagrammatisch:



mit  $x \text{---} \textcircled{\cdot} \text{---} y = \mathcal{D}(x,y) = \text{gedrehter Propagator}$

$\hookrightarrow$  = 1PI-Anteil des Diagramms

$$\frac{\delta^3 W}{\delta J(x) \delta J(y) \delta J(z)} = \langle \phi(x) \phi(y) \phi(z) \rangle_{\text{conn}}$$

$$= \int d^4u d^4v d^4z \mathcal{D}(x-u) \mathcal{D}(y-v) \mathcal{D}(z-w) \langle \phi(u) \phi(v) \phi(z) \rangle_{1PI}$$

$$\Rightarrow \frac{\delta^3 \Gamma}{\delta \phi_{ce}(x) \delta \phi_{ce}(y) \delta \phi_{ce}(z)} = -i \langle \phi(x) \phi(y) \phi(z) \rangle_{1PI}$$

Analoges ergibt sich auch wieder für höhere Ableitungen:

$$\frac{\delta^n \Gamma[\phi_{ce}]}{\delta \phi_{ce}(x_1) \dots \delta \phi_{ce}(x_n)} = -i \langle \phi(x_1) \dots \phi(x_n) \rangle_{1PI}; n \geq 3$$

2)  $\Gamma$  = erzeugendes Funktional für 1PI-Korrelationsfunktionen