Zusammenfassung

$Z[J]$: erzeugendes Funktional der vollen Korrelationsfunktionen

$W[J]$: " " " verbundenen "

$\Gamma[\phi_{cl}]$: " " " 1PI "

Γ enthält :
- Grundzustand der Theorie als Minimum von V_{eff}
- Information über spontane Symmetriebrechung ($\Leftrightarrow$ Entartung des Grundzustands)
- $\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta\phi_{cl}\,\delta\phi_{cl}} = i\mathcal{D}^{-1}$ ⤳ Teilchenmassen
- 1PI - Amplituden

⇒ Γ enthält alle physikalischen Vorhersagen der Theorie

Goldstone - Theorem

Herleitung aus V_{eff} analog zum klassischen Fall mit V.

Insbesondere :

$$\mathcal{D}^{-1}_{ij}(p) \sim \int d^4x\, e^{ip\cdot x} \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta\phi^i_{cl}(x)\,\delta\phi^j_{cl}(0)}$$

$$\Rightarrow \mathcal{D}^{-1}_{ij}(0) \sim \int d^4x \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta\phi^i_{cl}(x)\,\delta\phi^j_{cl}(0)} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{konstante Felder}}}{\sim} \frac{\partial^2 V_{eff}}{\partial\phi^i\,\partial\phi^j}$$

flache Richtung von V_{eff} $\hat{=}$ Eigenwert 0 ⤳ $\mathcal{D}^{-1}(0) = 0$

$\Rightarrow \mathcal{D}(p)$ hat Pol bei $p^2 = 0$ $\hat{=}$ Masse 0 ✓

XI Die Renormierungsgruppe

XI.1 Die Callan-Symanzik-Gleichung

Wir haben gesehen, dass wir für die Renormierung Renormierungsbedingungen festlegen müssen. Beispielsweise haben wir den Wert der Vierpunktvertexfunktion an einem im Prinzip willkürlich gewählten Renormierungspunkt (s_0, t_0, u_0), z.B. $(s_0 = 4M^2, t_0 = 0, u_0 = 0)$, festgelegt. Der Wert der Kopplung λ hängt von diesem Renormierungspunkt ab. Die renormierten Größen erhalten dadurch eine Abhängigkeit von einer dimensionsbehafteten Größe – der „Renormierungsskala", die in der unrenormierten Theorie, d.h. in der ursprünglichen Lagrangedichte, nicht vorhanden war.

Betrachten wir die unrenormierten und renormierten amputierten (= 1PI) n-Punkt-Funktionen

$$\Gamma_0^{(n)} \quad \text{bzw.} \quad \Gamma_R^{(n)}$$

und eine Skalentransformation

$$M \to e^s M \quad , \quad s \in \mathbb{R}$$

Die Skalentransformationen bilden eine Gruppe, die Renormierungsgruppe.

Da die unrenormierten Größen nicht von der Renormierungsskala M abhängen, gilt

$$\frac{\partial \Gamma_0^{(n)}}{\partial M} = 0$$

und somit auch

$$\frac{\partial \Gamma_0^{(n)}}{\partial \ln M} = M \frac{\partial \Gamma_0^{(n)}}{\partial M} = 0 .$$

Was bedeutet das für die renormierte Vertexfunktion?

Die unrenormierten Vertexfunktionen hängen (außer von den externen Impulsen) von den nackten Massen und Kopplungskonstanten ab,

$$\Gamma_0^{(n)} = \Gamma_0^{(n)}(m_0, \lambda_0) \quad ,$$

die renormierten Vertexfunktionen von den renormierten Massen und Kopplungskonstanten sowie von der Renormierungsskala M:

$$\Gamma_R^{(n)} = \Gamma_R^{(n)}(m_R, \lambda_R, M)$$

Außerdem hatten wir den Zusammenhang (s. VII. 8)

$$\Gamma_R^{(n)} = Z_\phi^{n/2} \, \Gamma_0^{(n)}$$

$$\Rightarrow \quad \Gamma_0^{(n)}(m_0, \lambda_0) = Z_\phi^{-n/2}\, \Gamma_R^{(n)}(m_R, \lambda_R, M)$$

$Z_\phi^{n/2} M \frac{\partial}{\partial M}$ angewendet auf diese Gleichung:

$$0 = Z_\phi^{n/2} M \frac{\partial}{\partial M} \left[Z_\phi^{-n/2}\, \Gamma_R^{(n)}(m_R, \lambda_R, M) \right]$$

$$= \Big[-\frac{n}{2} M \frac{\partial \ln Z_\phi}{\partial M} + M \frac{\partial m_R}{\partial M} \frac{\partial}{\partial m_R} + M \frac{\partial \lambda_R}{\partial M} \frac{\partial}{\partial \lambda_R} + M \frac{\partial}{\partial M} \Big] \Gamma_R^{(n)}$$

Dabei haben wir verwendet, dass Z_ϕ, m_R und λ_R ebenfalls von M abhängen.

Wir definieren nun

$$\beta := M \frac{\partial \lambda_R}{\partial M} \qquad \text{„beta-Funktion"}$$

$$\gamma := M \frac{\partial}{\partial M} \ln \sqrt{Z_\phi} = \frac{M}{2} \frac{\partial}{\partial M} \ln Z_\phi$$

$$m_R \gamma_m := M \frac{\partial m_R}{\partial M}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\Big[M \frac{\partial}{\partial M} + \beta \frac{\partial}{\partial \lambda_R} - n\gamma + m_R \gamma_m \frac{\partial}{\partial m_R} \Big] \Gamma_R^{(n)} = 0}$$

„Renormierungsgruppengleichung"

(„Callan-Symanzik-Gleichung")

(Achtung: Peskin/Schroeder betrachten die nicht-amputierten Korrelationsfunktionen $G_0^{(n)} = Z_\phi^{+n/2} G_R^{(n)}$ $\Rightarrow$ $-n\gamma \to +n\gamma$)

Wir betrachten nun explizit die Vertexfunktionen im Impulsraum

$$\Gamma_R^{(n)} = \Gamma_R^{(n)}(\{p_i\}; m_R, \lambda_R, M) \quad , \quad \{p_i\} \equiv \{p_1, \dots p_n\}$$

und eine <u>Skalentransformation</u>, bei der alle Größen der Dimension [Masse] mit einem Faktor t multipliziert werden:

$$p_i \to t\, p_i \quad , \quad m_R \to t\, m_R \quad , \quad M \to t M$$

$$[\lambda_R] = 1 \quad \Rightarrow \quad \lambda_R \to \lambda_R$$

$\Gamma_R^{(n)}$ hat i.d. auch eine Massendimension, die wir mit D bezeichnen

$$[\Gamma_R^{(n)}] = [\text{Masse}]^D \quad , \quad D: \text{„kanonische Dimension“}$$

(Für skalare Felder gilt:

$$[\phi(x)] = [\text{Masse}]$$

$$\Rightarrow [\langle\Omega|\phi(x_1)\dots\phi(x_n)|\Omega\rangle] = [\text{Masse}]^n$$

$$G(p_1,\dots,p_n) = \int \prod_{j=1}^{n} d^4x_j \, e^{ip_j\cdot x_j} \langle\Omega|\phi(x_1)\dots\phi(x_n)|\Omega\rangle$$

$$\Gamma(p_1,\dots,p_n) = G(p_1,\dots,p_n) D^{-1}(p_1)\dots D^{-1}(p_n)$$

$$\Rightarrow D = n(1-4+2) = -n$$)

Es folgt also

$$\Gamma_R^{(n)}(\{t p_i\}; t m_R, \lambda_R, t M)$$
$$= t^D \, \Gamma_R^{(n)}(\{p_i\}; m_R, \lambda_R, M)$$

(Am einfachsten kann man sich das klar machen, indem man sich vorstellt, dass man $\Gamma_R^{(n)}$ z.B. mit dem Computer ausrechnet und alle Input-Variablen statt in MeV in GeV angibt $\Rightarrow t = 10^{-3}$.)

$$\Leftrightarrow \Gamma_R^{(n)}(\{t p_i\}, m_R, \lambda_R, M)$$
$$= t^D \, \Gamma_R^{(n)}\left(\{p_i\}; \frac{m_R}{t}, \lambda_R, \frac{M}{t}\right)$$

$$\Rightarrow t \frac{\partial}{\partial t} \Gamma_R^{(n)}(\{t p_i\}; m_R, \lambda_R, M)$$
$$= \left[D + t \frac{\partial(m_R/t)}{\partial t} \frac{\partial}{\partial(m_R/t)} + t \frac{\partial(M/t)}{\partial t} \frac{\partial}{\partial(M/t)}\right]$$
$$\cdot \, t^D \, \Gamma_R^{(n)}\left(\{p_i\}; \frac{m_R}{t}, \lambda_R, \frac{M}{t}\right)$$
$$= \left[D + t\left(-\frac{m_R}{t^2}\right) t \frac{\partial}{\partial m_R} + t\left(-\frac{M}{t^2}\right) M \frac{\partial}{\partial M}\right]$$
$$* \, \Gamma_R^{(n)}(\{t p_i\}; m_R, \lambda_R, M)$$

$$= \left(D - m_R \frac{\partial}{\partial m_R} - M \frac{\partial}{\partial M}\right) \Gamma_R^{(n)}(\{t p_i\}; m_R, \lambda_R, M)$$

$$\Rightarrow \quad M\frac{\partial}{\partial M}\Gamma_R^{(n)}(\{tp_i\}; m_R, \lambda_R, M)$$

$$= \left(-t\frac{\partial}{\partial t} - m_R\frac{\partial}{\partial m_R} + D\right)\Gamma_R^{(n)}(\{tp_i\}; m_R, \lambda_R, M)$$

Andererseits gilt nach Callan-Symanzik

$$= \left(-\beta\frac{\partial}{\partial \lambda_R} + n\gamma - m_R\gamma_m\frac{\partial}{\partial m_R}\right)\Gamma_R^{(n)}(\ \dots\ )$$

$$\Rightarrow \quad \left[-t\frac{\partial}{\partial t} + \beta\frac{\partial}{\partial \lambda_R} - n\gamma + m(\gamma_m - 1)\frac{\partial}{\partial m_R} + D\right]$$
$$\cdot\ \Gamma_R^{(n)}(\{tp_i\}; m_R, \lambda_R, M) \qquad = 0 \qquad (*)$$

Falls

$\beta = \gamma = 0$ sowie $m_R \sim M \Rightarrow \gamma_m = 1$,

folgt $\quad t\frac{\partial}{\partial t}\Gamma_R^{(n)} = D\,\Gamma_R^{(n)}$,

d.h. die Skalenänderung ist durch die kanonische Dimension gegeben.

Dagegen führen $\beta \neq 0$, $\gamma \neq 0$ oder $\gamma_m \neq 1$ zu einem anderen Skalenverhalten („anomale Dimension")

Gl. (*) bedeutet, dass der Effekt einer Skalenänderung durch eine Änderung von m_R, λ_R und einen multiplikativen Faktor kompensiert wird

⇒ Ansatz:

$$\Gamma_R^{(n)}(\{tp_i\}; m_R, \lambda_R, \mu) = f(t)\,\Gamma_R^{(n)}(\{p_i\}; m_R(t), \lambda_R(t), \mu)$$

mit zu bestimmenden Funktionen
$f(t)$, $m_R(t)$, $\lambda_R(t)$

Einsetzen in (*) liefert die Bedingungsgleichungen

$$t\,\frac{\partial \lambda_R(t)}{\partial t} = \beta \qquad \rightsquigarrow \text{„laufende Kopplungskonstante"}$$

$$t\,\frac{\partial m_R(t)}{\partial t} = m_R\,[\gamma_m - 1] \rightsquigarrow \text{„laufende Masse"}$$

$$\frac{1}{f(t)}\,\frac{df}{dt} = D - n\gamma$$

$$\Rightarrow f(t) = t^D e^{-\int_1^t dt' \frac{n\gamma}{t'}}$$

Beim Lösen dieser Gleichungen ist zu beachten, dass β, γ und γ_m selbst Funktionen der Kopplungskonstante sind, also

$$\beta = \beta(\lambda_R), \quad \gamma = \gamma(\lambda_R), \quad \gamma_m = \gamma_m(\lambda_R)$$

und damit auch von t.