XI.2 Die β-Funktion

In Abschnitt XI.1 haben wir die β-Funktion zunächst über die Renormierungsskala M als

$$\beta = M \frac{\partial \lambda_R}{\partial M}$$

definiert und haben dann gesehen, dass sie eine analoge Gleichung für die Skala t erfüllt,

$$\beta = t \frac{\partial \lambda_R(t)}{\partial t} \quad ,$$

die wir auch als Impulsskala interpretieren können: Die Gleichung

$$\Gamma_R^{(n)}(\{t p_i\}; m_R, \lambda, M) = f(t)\, \Gamma_R^{(n)}(\{p_i\}; m_R(t), \lambda_R(t), M)$$

setzt die n-Punkt-Vertizes mit externen Impulsen $\{t p_i\}$ und $\{p_i\}$ miteinander in Beziehung und besagt, dass eine Impulsänderung u.a. einer Änderung der Kopplung entspricht. Diesen Effekt wollen wir jetzt qualitativ etwas vertiefen.
Wir hatten schon gesagt, dass β selbst eine Funktion der Kopplung ist, d.h. wir haben

$$\beta(\lambda_R(t)) = t \frac{\partial \lambda_R(t)}{\partial t}$$

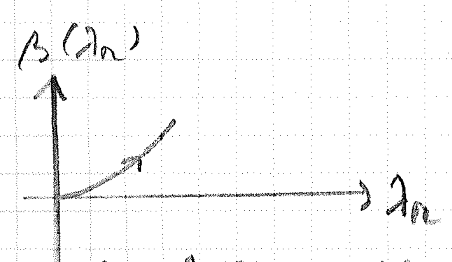
Offensichtlich gilt

$$\beta(\lambda_R = 0) = 0 ,$$

da wir es dann mit einer freien Theorie zu tun haben und die Kopplung nicht aus dem Nichts entstehen kann. (Die durch β beschriebene Änderung der Kopplung ist ja selbst ein Wechselwirkungseffekt.)

Für kleine λ_R, lässt sich β störungstheoretisch berechnen, ist also ein Polynom in λ_R, dessen konstanter Term verschwindet.

2) <u>Fall 1</u>:



$$\beta(\lambda_R > 0) > 0$$

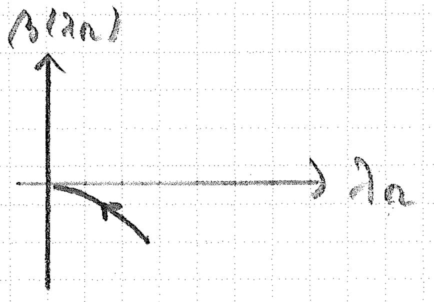
$$\Rightarrow t \frac{\partial \lambda_R}{\partial t} > 0$$

(Pfeil ≙ Flussrichtung mit steigendem t)

$\Rightarrow$ Die Kopplung wächst mit steigender Impulsskala an. Sofern sich das nicht durch höhere Terme ändert, bricht die Störungstheorie schließlich bei höheren Impulsen zusammen.

Dagegen strebt die Kopplung (und ihre Änderung) für kleine Impulse ($t \to 0$) gegen null: Die Theorie wird im IR zu einer nicht-wechselwirkenden, freien Theorie

Fall 2:



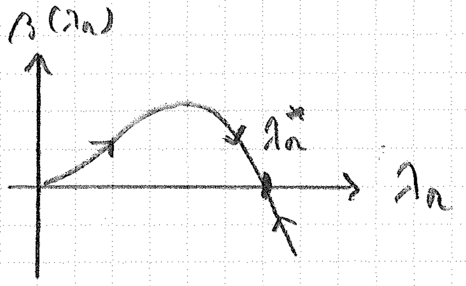
$$\beta(\lambda_\alpha > 0) < 0$$

$$\Rightarrow t \frac{\partial \lambda_\alpha}{\partial t} < 0$$

$\Rightarrow$ Die Kopplung wird mit steigender Impulsskala schwächer und geht für $t \to \infty$ gegen null: Die Theorie ist asymptotisch frei.
Dagegen wird die Kopplung bei kleinen Impulsen größer und die Störungstheorie bricht im IR zusammen.

Allerdings kann es sein, dass die β-Funktion bei höheren Werten von λ_α einen weiteren Nulldurchgang hat und ihr Vorzeichen wechselt. Allgemein bezeichnet man Kopplungen λ_α^* mit $\beta(\lambda_\alpha^*) = 0$ als Fixpunkte, da sich hier die Kopplung nicht mehr ändert, wenn man die Skala t variiert. Bislang haben wir nur die trivialen Fixpunkte $\lambda_\alpha^* = 0$ diskutiert. Wir nehmen nun an, dass es auch einen nicht-trivialen Fixpunkt gibt.

Fall 1a:

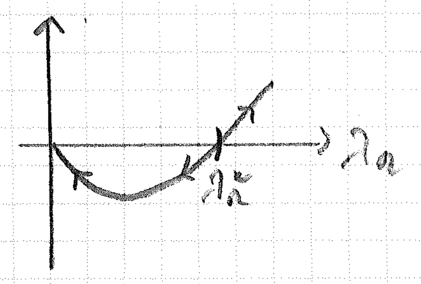


$\beta(\lambda_R < \lambda_R^*) > 0$
$\beta(\lambda_R > \lambda_R^*) < 0$

$\Rightarrow$ Für $\lambda_R < \lambda_R^*$ wächst die Kopplung mit wachsendem t an, jedoch immer langsamer, je näher $\lambda_R(t)$ bei λ_R^* liegt, d.h. die Kopplung läuft für $t \to \infty$ gegen λ_R^*.
Analoges gilt für $\lambda_R > \lambda_R^*$. Hier wird $\lambda_R(t)$ mit wachsendem t kleiner und läuft für $t \to \infty$ ebenfalls gegen λ_R^*.

$\Rightarrow$ λ_R^* ist ein nicht-trivialer UV-Fixpunkt („asymptotic safety").
Daneben gibt es wie oben besprochen einen trivialen IR-Fixpunkt bei $\lambda_R = 0$.

Fall 2a:



$\beta(\lambda_R < \lambda_R^*) < 0$
$\beta(\lambda_R > \lambda_R^*) > 0$

analog: IR-Fixpunkt bei $\lambda_R = \lambda_R^*$
UV-Fixpunkt bei $\lambda_R = 0$ (asymptot. Freiheit)

XI.3 Störungstheoretische Berechnung der β-Funktion in der QED

In Kapitel IX haben wir die QED-Lagrangedichte in einen renormierten Anteil und Counterterme aufgespalten:

$$\mathcal{L}_{QED} = \bar{\psi}_0 (i\partial\!\!\!/ - m_0)\psi_0 - \frac{1}{4}(F_0^{\mu\nu})^2 - e_0 \bar{\psi}_0 \gamma^\mu \psi_0 A_{0\mu}$$

$$= \bar{\psi}_R (i\partial\!\!\!/ - m_R)\psi_R - \frac{1}{4}(F_R^{\mu\nu})^2 - e_R \bar{\psi}_R \gamma^\mu \psi_R A_{R\mu}$$

$$+ \bar{\psi}_R (i\delta_2 \partial\!\!\!/ - \delta m)\psi_R - \frac{1}{4}\delta_3 (F_R^{\mu\nu})^2$$

$$- e_R \delta_1 \bar{\psi}_R \gamma^\mu \psi_R A_{R\mu}$$

Wir wollen nun die mit dem Laufen der Kopplung e_R verbundene β-Funktion in niedrigster Ordnung Störungstheorie berechnen. Dies soll in dimensionaler Regularisierung geschehen, für die wir das relevante Diagramm – den Photon-Polarisationsloop – schon in Kapitel IX berechnet haben. Dazu ist allerdings noch eine kleine Modifikation notwendig, über die wir in Kap. IX hinweg gegangen sind:
Damit die Wirkung

$$S = \int d^d x \, \mathcal{L}_{QED}(x)$$

in d Dimensionen dimensionslos ist, muss gelten:

$$[\bar{\Psi}_0 (i\not{\partial} - m_0)\Psi] \overset{!}{=} [\text{Masse}]^d \Rightarrow [\Psi_0] = [\text{Masse}]^{(d-1)/2}$$

$$[F_0^{\mu\nu}] = [\partial^\mu A_0^\nu - \partial^\nu A_0^\mu] \overset{!}{=} [\text{Masse}]^{\frac{d}{2}} \Rightarrow [A_0^\mu] = [\text{Masse}]^{\frac{d}{2}-1}$$

$$\Rightarrow [e_0 \bar{\Psi}_0 \gamma^\mu \Psi_0 A_{0\mu}] = [e_0][\text{Masse}]^{\frac{3}{2}d-2} \overset{!}{=} [\text{Masse}]^d$$

$$\Rightarrow [e_0] = [\text{Masse}]^{\frac{4-d}{2}} \equiv [\text{Masse}]^{\frac{\varepsilon}{2}} \quad ; \ \varepsilon = 4-d$$

$\rightarrow$ Die Kopplungskonstante ist für $d \neq 4$ nicht mehr dimensionslos!

($d < 4 \Rightarrow$ positive Massendimension der Kopplung $\Rightarrow$ super-renormierbar ✓)

Analoges gilt im Prinzip für die renormierten Felder und Kopplungen. Das widerspricht jedoch der Idee, dass wir e_R mit der gemessenen physikalischen Kopplung in Verbindung bringen will. Um diese Idee zu retten, führen wir einen zusätzlichen Faktor ein, der die Dimension trägt, so dass e_R dimensionslos bleiben kann:

$$e_R \longrightarrow M^{\varepsilon/2} e_R \quad , \quad [M] = [\text{Masse}]$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}_{QED} = \bar{\Psi}_R (i\not{\partial} - m_R)\Psi_R - \frac{1}{4}(F_R^{\mu\nu})^2 - M^{\varepsilon/2} e_R \bar{\Psi}_R \gamma^\mu \Psi_R A_{R\mu}$$

$$+ \ldots - M^{\varepsilon/2} \delta_1 \bar{\Psi}_R \gamma^\mu \Psi_R A_{R,\mu}$$

Die renormierte Lagrangedichte enthält somit eine Massenskala M, die die ursprüngliche Lagrangedichte nicht hatte und die wir mit der Renormierungsskala identifizieren können.

Für den Zusammenhang zwischen nackter und renormierter Ladung gilt mit dem zusätzlichen Skalenfaktor (vgl. S. XI-33):

$$M^{\varepsilon/2} e_R = Z_3^{1/2} e_0 = (1+\delta_3)^{1/2} e_0$$

$$\Leftrightarrow \quad e_0 = M^{\varepsilon/2} \frac{e_R}{\sqrt{Z_3}}$$

Da e_0 nicht von M abhängt, folgt

$$0 = \frac{\partial e_0}{\partial M} = \frac{\varepsilon}{2} M^{\varepsilon/2-1} \frac{e_R}{\sqrt{Z_3}} + M^{\varepsilon/2} \frac{\partial(e_R/\sqrt{Z_3})}{\partial M}$$

$$= M^{\varepsilon/2-1}\left[\frac{\varepsilon}{2}\frac{e_R}{\sqrt{Z_3}} + M\frac{\partial e_R}{\partial M}\frac{\partial(e_R/\sqrt{Z_3})}{\partial e_R}\right]$$

$$\Rightarrow \quad \beta(e_R) \equiv M\frac{\partial e_R}{\partial M} = -\frac{\varepsilon}{2}\frac{e_R}{\sqrt{Z_3}}\left(\frac{\partial(e_R/\sqrt{Z_3})}{\partial e_R}\right)^{-1}$$

$$\frac{\partial(e_R/\sqrt{Z_3})}{\partial e_R} = \frac{1}{\sqrt{Z_3}}\left(1-\frac{1}{2}\frac{e_R}{Z_3}\frac{\partial Z_3}{\partial e_R}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \beta(e_R) = -\frac{\varepsilon}{2} e_R \left(1-\frac{1}{2}\frac{e_R}{Z_3}\frac{\partial Z_3}{\partial e_R}\right)^{-1}$$

Auf S. IX-32 haben wir gefunden

$$\delta_3 = -\frac{8e_R^2}{(4\pi)^{d/2}} \underbrace{\int_0^1 dx\, x(1-x)}_{=\frac{1}{6}} \frac{\Gamma(\frac{\varepsilon}{2})}{(m_R^2)^{\varepsilon/2}} ,$$

wobei wir auch hier $e_R^2 \to M^\varepsilon e_R^2$ ersetzen müssen.

$$\Rightarrow \delta_3 = -\frac{1}{6} \frac{8e_R^2}{(4\pi)^2} \Gamma(\tfrac{\varepsilon}{2}) \left(\frac{4\pi M^2}{m_R^2}\right)^{\varepsilon/2}$$

$$Z_3 = 1+\delta_3 \Rightarrow \frac{\partial Z_3}{\partial e_R} = \frac{\partial \delta_3}{\partial e_R} = \frac{2\delta_3}{e_R}$$

$$\Rightarrow \beta(e_R) = -\frac{\varepsilon}{2} e_R \left(1 - \frac{\delta_3}{1+\delta_3}\right)^{-1}$$

$$= -\frac{\varepsilon}{2} e_R (1+\delta_3)$$

$$= -\frac{\varepsilon}{2} e_R \left[1 - \frac{e_R^2}{12\pi^2} \Gamma(\tfrac{\varepsilon}{2}) \left(\frac{4\pi M^2}{m_R^2}\right)^{\varepsilon/2}\right]$$

Jetzt betrachten wir den Limes $\varepsilon \to 0$:

$$\Gamma(\tfrac{\varepsilon}{2}) = \frac{2}{\varepsilon} + \text{endliche Terme}$$

Offensichtlich trägt nur der divergente Term bei.

$$\Rightarrow \boxed{\beta(e_R) = \frac{e_R^3}{12\pi^2}}$$ (+ Korrekturen höherer Ordnung Störungstheorie)

$\Rightarrow \beta(e_R) > 0 \Rightarrow$ Die QED ist nicht asymptotisch frei.

Im Kap. IX haben wir δ_3 durch Renormierung des Polarisationsloops am Punkt $q^2 = 0$ fixiert. Hätten wir einen anderen Renormierungspunkt gewählt, hätte sich der endliche Anteil von δ_3 geändert. Das hätte aber keinen Einfluss auf die β-Funktion gehabt (in dieser Ordnung Störungstheorie).

Mit Hilfe der β-Funktion berechnen wir zum Schluss noch die laufende Kopplung:

$$M \frac{\partial e_R}{\partial M} = \beta(e_R) = \frac{e_R^3}{12\pi^2}$$

$$\Rightarrow \frac{de_R}{e_R^3} = \frac{1}{12\pi^2} \frac{dM}{M}$$

$$\Rightarrow \int_{e_R(M_0)}^{e_R(M)} de\, e^{-3} = \frac{1}{12\pi^2} \int_{M_0}^{M} \frac{dM'}{M'}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{e_R^2(M)} - \frac{1}{e_R^2(M_0)}\right) = \frac{1}{12\pi^2} \ln \frac{M}{M_0}$$

$$\Rightarrow e_R^2(M) = \frac{e_R^2(M_0)}{1 - \frac{e_R^2(M_0)}{6\pi^2} \ln \frac{M}{M_0}}$$

oder mit $\alpha = \frac{e_R^2}{4\pi}$

$$\boxed{\alpha(M) = \frac{\alpha(M_0)}{1 - \frac{\alpha}{3\pi} \ln \frac{M^2}{M_0^2}}}$$

Vergleich mit dem Ausdruck auf S. IX-35:

$$\alpha(q^2 = -Q^2) = \frac{\alpha}{1 - \frac{\alpha}{3\pi}\left(\ln \frac{Q^2}{m^2} - \frac{5}{3}\right)} \quad , \quad Q \gg m$$

Übereinstimmung, wenn wir identifizieren

$$M^2 = Q^2$$

$$\ln \frac{M^2}{M_0^2} = \ln \frac{Q^2}{m^2} - \frac{5}{3} = \ln \frac{Q^2}{m^2} - \ln e^{5/3}$$
$$= \ln \frac{Q^2}{e^{5/3} m^2}$$

$$\Rightarrow M_0 = e^{5/6} m = 2.3\, m$$