⇒ Alle Vertices hängen von der gleichen Kopplungskonstanten g ab.

- Das Eichfeld A_μ^a hat keinen Flavour-Index ⇒ Die Kopplungsstärke g hängt nicht vom Quark-Flavour ab. Die starke Wechselwirkung ist „Flavour-blind".

- $\mathcal{L}_{QCD}$ ist invariant unter den globalen $U(1)$-Transformationen

$$\psi_f \to e^{i\alpha_f}\psi_f$$

⇒ erhaltene Noether-Ströme $\bar{\psi}_f \gamma^\mu \psi_f$
⇔ Flavour-Zahl-Erhaltung (Zahl der Quarks minus Antiquarks vom Flavour f)

Summe über alle f ⇒ Baryonenzahlerhaltung.

- Im Standard-Modell sind die Quarks auch elektrisch geladen, wobei die Ladungen nicht alle gleich sind (u, c, t: $+\frac{2}{3}e$, d, s, b: $-\frac{1}{3}e$).
Um die entsprechende Ankopplung des elektromagnetischen Feldes zu beschreiben, betrachten wir zusätzlich zur Farb-$SU(3)$ die lokalen $U(1)$-Transformationen

$$\psi_f \to e^{iQ_f\alpha(x)}\psi_f$$

mit $Q_u = Q_c = Q_t = \frac{2}{3}$, $Q_d = Q_s = Q_b = -\frac{1}{3}$

zusammen mit den kovarianten Ableitungen

$$\tilde{D}_\mu \psi_f = (\partial_\mu - i g A^a_\mu(x) T^a - i e Q_f A^{EM}_\mu(x)) \psi_f$$

Gluon-Feld $\qquad$ e.m. Feld

und der Transformationsvorschrift für das elektromagnetische Feld

$$A^{EM}_\mu(x) \to A_\mu^{EM} + \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha$$

(Die Vorschriften gehen in die von Abschnitt XII.1 über, wenn wir $Q_f = 1$ und $e \to -e$ ersetzen. Etwas konsistenter wäre es gewesen, die obigen Vorschriften zu verwenden und für Elektronen $Q_f = -1$ zu setzen. e bezeichnet dann die positive Elementarladung.)

Wir können also die elektrische Ladung mit einem Faktor Q_f skalieren und so den verschiedenen Quark-Flavours unterschiedliche Ladungen zuordnen.

Eine analoge Skalierung der starken Kopplungskonstanten g für unterschiedliche Flavours ist <u>nicht</u> möglich, da g auch im Feldstärketensor vorkommt, der Flavour-unabhängig ist.

- Sei $\vec{\phi}$ ein Feld in der adjungierten Darstellung der SU(3).

2, kovariante Ableitung:

$$D_\mu \vec{\phi} = (\partial_\mu - ig A_\mu^b T^b) \vec{\phi}$$

$$\Rightarrow (D_\mu \phi)^a = \partial_\mu \phi^a - ig A_\mu^b (T^b)^{ac} \phi^c$$

$$= \partial_\mu \phi^a + g f^{abc} A_\mu^b \phi^c$$

infinitesimale Transformation des Gluon-Feldes:

$$A_\mu^a \to A_\mu^a + \frac{1}{g} \partial_\mu \Theta^a + f^{abc} A_\mu^b \Theta^c$$

$$\equiv A_\mu^a + \frac{1}{g} (D_\mu \Theta)^a$$

XII. 4 Der Higgs - Mechanismus

Sei ϕ ein komplexes skalares Feld und

$$\mathcal{L} = (D_\mu \phi)^* (D^\mu \phi) + \mu^2 \phi^* \phi - \lambda (\phi^* \phi)^2 - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

mit

$$D_\mu \phi = (\partial_\mu - ig A_\mu) \phi$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

$\mathcal{L}$ ist invariant unter

$$\phi(x) \to e^{i\alpha(x)} \phi(x) , \quad A_\mu(x) \to A_\mu(x) + \frac{1}{g} \partial_\mu \alpha(x)$$

klassisches Potential:

$$V(\phi) = -\mu^2 \phi^* \phi + \lambda (\phi^+ \phi)^2$$

$$= -\mu^2 |\phi|^2 + \lambda |\phi|^4$$

Minimum (für $\mu^2 > 0$):

$$\frac{dV}{d|\phi|^2} = -\mu^2 + 2\lambda |\phi|^2 \overset{!}{=} 0$$

$$\curvearrowright |\phi| = \sqrt{\frac{\mu^2}{2\lambda}} \equiv \frac{v}{\sqrt{2}} \quad , \quad v = \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}}$$

Dabei bleibt die komplexe Phase unbestimmt
→ spontane Symmetriebrechung

Schreibe $\quad \phi \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (\phi_1 + i \phi_2)$

mit den reellen Feldern ϕ_1 und ϕ_2.

Wähle als Vakuum

$$\phi_1 = v \quad , \quad \phi_2 = 0$$

und definiere die verschobenen Felder

$$\phi_1' = \phi_1 - v \quad , \quad \phi_2' = \phi_2$$

Analog zum linearen Sigma-Modell würden wir erwarten, dass ϕ_2' das Goldstone-Boson der spontan gebrochenen Symmetrie ist.

Jetzt müssen wir allerdings beachten, dass ϕ auch an das Eichfeld koppelt.

$$D_\mu \phi = (\partial_\mu - ig A_\mu)\frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1' + v + i\phi_2')$$

$$\Rightarrow (D_\mu \phi)^* (D^\mu \phi)$$

$$= \frac{1}{2}(\partial_\mu + igA_\mu)(\phi_1' - i\phi_2' + v)(\partial^\mu - igA^\mu)(\phi_1' + i\phi_2' + v)$$

$$= \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_1')^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_2')^2$$

$$- g(\phi_1' \partial^\mu \phi_2' - \phi_2' \partial^\mu \phi_1') A_\mu$$

$$+ \frac{1}{2} g^2 (\phi_1'^2 + \phi_2'^2) A^\mu A_\mu$$

$$- g v \partial^\mu \phi_2' A_\mu + g^2 v \phi_1' A^\mu A_\mu + \frac{1}{2} g^2 v^2 A^\mu A_\mu$$

Die drei letzten Terme sind proportional zu v bzw. v^2 und somit Konsequenzen der spontanen Symmetriebrechung.

Der letzte Term sieht aus wie ein Massenterm für das Eichboson

$$\frac{1}{2} g^2 v^2 A^\mu A_\mu \equiv \frac{1}{2} M^2 A^\mu A_\mu \Rightarrow M = g v$$

Allerdings gibt es auch noch den Term

$-g v \partial^\mu \phi_2' A_\mu$, der die Felder ϕ_2' und A_μ koppelt

$\Rightarrow$ Die longitudinale Komponente von A^μ mischt mit ϕ_2'

Die Felder können mittels einer Eichtransformation entkoppelt werden. Dazu schreiben wir zunächst das ursprüngliche Feld als

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\,[v + \eta(x)]\, e^{i\,\xi(x)/v}$$

mit zwei neuen reellen Feldern η und ξ, die Fluktuationen des Betrags bzw. der Phase von ϕ beschreiben. Dabei ist ξ offensichtlich die Goldstone-Mode.

Für kleine Fluktuationen ergibt sich

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\,[v + \eta(x) + i\,\xi(x) + \ldots],$$

d.h. η ist eng verwandt mit ϕ_1 und ξ mit ϕ_2.

Wir können nun ξ mit Hilfe einer Eichtransformation eliminieren:

$$\phi(x) \to \tilde{\phi}(x) = e^{-i\frac{\xi(x)}{v}}\,\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\,[v + \eta(x)]$$

Für das elektromagnetische Feld ergibt sich dann

$$A_\mu(x) \to B_\mu(x) = A_\mu - \frac{1}{gv}\,\partial_\mu \xi(x)$$

$$\Rightarrow \quad D_\mu \phi = (\partial_\mu - ig A_\mu)\phi$$
$$= [\partial_\mu - ig(B_\mu + \frac{1}{gv}(\partial_\mu \xi)] e^{i\frac{\xi}{v}} \tilde{\phi}$$
$$= e^{i\xi/v} [\partial_\mu - ig B_\mu] \tilde{\phi}$$
$$= e^{i\frac{\xi}{v}} \frac{1}{\sqrt{2}} [\partial_\mu \eta - ig B_\mu (v+\eta)]$$

$$\Rightarrow \quad (D_\mu \phi)^* (D^\mu \phi)$$
$$= \frac{1}{2}[\partial_\mu \eta + ig B_\mu (v+\eta)][\partial^\mu \eta - ig B^\mu (v+\eta)]$$
$$= \frac{1}{2}(\partial_\mu \eta)^2 + \frac{1}{2} g^2 (v+\eta)^2 B_\mu B^\mu$$
$$= \frac{1}{2}(\partial_\mu \eta)^2 + \frac{1}{2} g^2 v^2 B_\mu B_\mu + g^2 v \eta B_\mu B^\mu + \frac{1}{2} g^2 \eta^2 B_\mu B^\mu$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$
$$= \partial_\mu [B_\nu + \frac{1}{gv}\partial_\nu \xi] - \partial_\nu [B_\mu + \frac{1}{gv}\partial_\mu \xi]$$
$$= \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$$

$$\phi^* \phi = \tilde{\phi}^2 = \frac{1}{2}[v+\eta]^2 \quad , \quad v^2 = \frac{\mu^2}{\lambda}$$

$$\mathcal{L} \supset \mu^2 \phi^* \phi - \lambda (\phi^* \phi)^2$$
$$= \underbrace{\frac{1}{4}\mu^2 v^2}_{\text{const.}} - \mu^2 \eta^2 - \lambda v \eta^3 - \frac{\lambda}{4}\eta^4$$

Insgesamt ergibt sich also

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{ww} + \text{const.}$$

mit

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}(\partial_\mu \eta)^2 - \mu^2 \eta^2 - \frac{1}{4}(\partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu)^2 + \frac{1}{2} g^2 v^2 B_\mu B^\mu$$

$$\mathcal{L}_{ww} = g^2 v \eta B_\mu B^\mu + \frac{1}{2} g^2 \eta^2 B_\mu B^\mu - \lambda v \eta^3 - \frac{\lambda}{4} \eta^4$$

Fazit:

- Das Vektorboson B hat eine Masse $M = gv$, die mit der schon vor der Eichtransformation gefundenen Eichboson-Masse M übereinstimmt.

  Beachte: Ein Massenterm $\frac{1}{2} M^2 A_\mu A^\mu$ in der ursprünglichen Lagrangedichte ist nicht eichinvariant und daher nicht erlaubt!

Das Auftreten massiver Eichbosonen durch spontane Symmetriebrechung nennt man Higgs - Mechanismus

(Englert und Brout; Guralnik et al.; Higgs, 1964)

und spielt vor allem in der elektroschwachen Wechselwirkung eine wichtige Rolle $\rightarrow$ Massen von $W^\pm$ und Z^0.

- Es gibt kein masseloses Goldstone-Boson mehr. Durch die Eichung ist die Goldstone-Mode $\xi(x)$ völlig eliminiert worden.

Zahl der Freiheitsgrade:

- ursprüngliche Lagrangedichte:

  2 reelle Skalarfelder
  + 2 physikalische Eichbosonpolarisationen
  = 4

- transformierte Lagrangedichte:

  1 reelles Skalarfeld ($\hat{=}$ Higgs-Boson)
  + 3 Polarisationen des massiven Vektorbosons

↳ Das „would-be-Goldstone-Boson" ξ wurde von den Vektorbosonen „gegessen".

<u>Alternative Vorgehensweise</u>

Etwas systematischer hätten wir den Mischterm

$$-gv\,\partial^\mu\phi_2'\,A_\mu = -M\,\partial^\mu\phi_2'\,A_\mu$$

auch durch Einführung eines Eichfixierungsterms

$$\mathcal{L}_{gf} = -\frac{1}{2\xi}\left(\partial_\mu A^\mu + \xi M \phi_2'\right)^2 \qquad (\text{„'t Hooft-Eichung"})$$

$$= -\frac{1}{2\xi}\left(\partial_\mu A^\mu\right)^2 - M \phi_2' \partial_\mu A^\mu - \frac{1}{2}\xi M^2 \phi_2'^2$$

eliminieren können.

Nach partieller Integration

$$-M \phi_2' \partial_\mu A^\mu \rightarrow + M \partial_\mu \phi_2' A^\mu$$

fallen die Mischterme heraus.

Das „would-be-Goldstone-Boson" ϕ_2' erhält dann eine Masse, die vom Eichparameter ξ abhängt:

$$m_2' = \sqrt{\xi}\, M$$

Landau-Eichung:	$\xi = 0$	$\Rightarrow$	$m_2' = 0$
Feynman- " :	$\xi = 1$	$\Rightarrow$	$m_2' = M$
„unitäre " :	$\xi \rightarrow \infty$	$\Rightarrow$	$m_2' \rightarrow \infty$

Der oben diskutierte Fall entspricht der unitären Eichung, da ein unendlich schweres Teilchen nicht mehr als aktiver Freiheitsgrad in Erscheinung tritt.