Pfadintegrale in der Quantenmechanik

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Eigenzustände des Ortsoperators im Schrödinger-Bild: $\hat{x}|\vec{x}\rangle = \vec{x}|\vec{x}\rangle$
- Eigenzustände des Ortsoperators im Heisenberg-Bild: $\hat{x}_H(t)|t,\vec{x}\rangle = \vec{x}|t,\vec{x}\rangle$
  - $\hat{x}_H(t) = U^\dagger(t,t_0)\,\hat{x}\,U(t,t_0) = e^{iH(t-t_0)}\,\hat{x}\,e^{-iH(t-t_0)}$
  - $|t,\vec{x}\rangle = U^\dagger(t,t_0)|\vec{x}\rangle = e^{iH(t-t_0)}\,|\vec{x}\rangle$
  - Vollständigkeit: $\int d^3x\,|\vec{x}\rangle\langle\vec{x}| = \mathbb{1} \quad\Rightarrow\quad \int d^3x\,|t,\vec{x}\rangle\langle t,\vec{x}| = \mathbb{1}$
- Übergangsamplitude: $\langle t_f,\vec{x}_f|t_i,\vec{x}_i\rangle = \langle\vec{x}_f|e^{iH(t_f-t_i)}|\vec{x}_i\rangle$
  - physikalische Bedeutung: $\psi(t,\vec{x}) = \int d^3x_i\,\underbrace{\langle t,\vec{x}|t_i,\vec{x}_i\rangle}_{\text{Propagator}}\,\psi(t_i,\vec{x}_i)$

Pfadintegrale in der Quantenmechanik

- Zerlegung in infinitesimale Zeitschritte:

$$\langle t_f, \vec{x}_f | t_i, \vec{x}_i \rangle =$$

$$\lim_{N\to\infty} \int \prod_{k=1}^{N-1} d^3x_k \langle t_f, \vec{x}_f | t_{N-1}, \vec{x}_{N-1} \rangle \langle t_{N-1}, \vec{x}_{N-1} | t_{N-2}, \vec{x}_{N-2} \rangle \dots \langle t_1, \vec{x}_1 | t_i, \vec{x}_i \rangle$$

- $\langle t_k, \vec{x}_k | t_{k-1}, \vec{x}_{k-1} \rangle = \langle \vec{x}_k | e^{-iH\delta t} | \vec{x}_{k-1} \rangle = \langle \vec{x}_k | 1 - iH\delta t | \vec{x}_{k-1} \rangle + \mathcal{O}(\delta t^2)$

- $H = H(\hat{x}, \hat{p}) \overset{\text{z.B.}}{=} \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x})$

- Impuls-Eigenzustände: $\hat{p} | \vec{p} \rangle = \vec{p} | \vec{p} \rangle$

  - $\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} | \vec{p} \rangle \langle \vec{p} | = \mathbb{1}$, $\langle \vec{p}\,' | \vec{p} \rangle = (2\pi)^3 \, \delta^3(\vec{p}\,' - \vec{p})$, $\langle \vec{x} | \vec{p} \rangle = e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}}$

$$\Rightarrow \langle \vec{x}_k | H(\hat{x}, \hat{p}) | \vec{x}_{k-1} \rangle = \int \frac{d^3p_k}{(2\pi)^3} \, e^{i\vec{p}_k\cdot(\vec{x}_k - \vec{x}_{k-1})} \, H(\tfrac{\vec{x}_k + \vec{x}_{k-1}}{2}, \vec{p}_k)$$

$\uparrow$ Hamilton-Operator

$\uparrow$ klassische Hamilton-Funktion

Pfadintegrale in der Quantenmechanik

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Ergebnis:

$$\langle t_f, \vec{x}_f | t_i, \vec{x}_i \rangle$$

$$= \lim_{N\to\infty} \int \left(\prod_{k=1}^{N} \frac{d^3 p_k}{(2\pi)^3} \right) \int \left(\prod_{k=1}^{N-1} d^3 x_k \right) \exp\left\{ i \sum_{k=1}^{N} \delta t \left[\vec{p}_k \cdot \frac{\vec{x}_k - \vec{x}_{k-1}}{\delta t} - H\left(\frac{\vec{x}_k + \vec{x}_{k-1}}{2}, \vec{p}_k\right) \right] \right\}$$

$$\equiv \int D\vec{p}\, D\vec{x}\, \exp\left\{ i \int_{t_i}^{t_f} dt \left[\vec{p} \cdot \dot{\vec{x}} - H(\vec{x}, \vec{p}) \right] \right\} \qquad \text{Pfadintegral}$$

  - $D\vec{x} = \lim_{N\to\infty} \prod_{k=1}^{N-1} d^3 x_k \;, \qquad D\vec{p} = \lim_{N\to\infty} \prod_{k=1}^{N} \frac{d^3 p_k}{(2\pi)^3}$

- Gauß-Formel: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi}\, e^{-ap^2 + bp} = \frac{1}{\sqrt{4\pi a}}\, e^{\frac{b^2}{4a}}$
  - kann auf die dp_k-Integrationen angewendet werden, wenn H quadratisch in p_k ist
  - hier: $H = \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} + V(\vec{x})$ ✓

Pfadintegrale in der Quantenmechanik

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Ergebnis:

$$\left\langle t_f, \vec{x}_f \middle| t_i, \vec{x}_i \right\rangle = \mathcal{N} \int D\vec{x} \, \exp\left\{ iS[\vec{x}(t)] \right\}$$

  - $\mathcal{N} = \lim\limits_{N\to\infty} \left(\frac{m}{2\pi i \delta t}\right)^{\frac{3N}{2}} = \lim\limits_{N\to\infty} \left(\frac{Nm}{2\pi i (t_f - t_i)}\right)^{\frac{3N}{2}}$
  - $S = \int\limits_{t_i}^{t_f} dt \, L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}) = \int\limits_{t_i}^{t_f} dt \, \left(\frac{m}{2} \, \dot{\vec{x}}^{\,2}(t) - V(\vec{x}(t))\right)$ klassische Wirkung