Pfadintegral-Quantisierung von Dirac-Spinoren

- Graßmann-Zahlen = antikommutierende Zahlen: $\theta\eta = -\eta\theta$
  - Taylor-Reihen: $f(\theta) = f_0 + \theta f_1$, da $\theta^2 = 0$
  - Ableitungen: $\frac{d}{d\theta}\theta\eta = \eta$, $\frac{d}{d\eta}\theta\eta = -\frac{d}{d\eta}\eta\theta = -\theta$
  - Integrale: Definition als Umkehrung der Ableitung nicht möglich
- Berezin-Integral: $\int d\theta = 0$, $\int \theta d\theta = 1$
  - äquivalent zur Ableitung
  - invariant unter konstanten Verschiebungen $\theta \to \theta + \eta$
- *n*-dimensionale Graßmann-Algebra: $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)^T$
  - $\{\theta_i, \theta_j\} = 0$
  - $\int d\theta_i = 0$, $\int d\theta_n \dots d\theta_1\, \theta_1 \dots \theta_n = 1$

Pfadintegral-Quantisierung von Dirac-Spinoren

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Variablen-Substitution: $\theta_i' = B_{ij}\theta_j$

$$\Rightarrow \quad \int d\theta_n' \ldots d\theta_1' = \int d\theta_n \ldots d\theta_1 \left(\det B\right)^{-1}$$

  - gewöhnliche Zahlen: $\int d^n x' = \int d^n x \, \det\left(\frac{\partial x_i'}{\partial x_j}\right)$

- komplexe Graßmann-Zahlen: $\theta = \mathrm{Re}\,\theta + i\,\mathrm{Im}\,\theta$
  - Subst.: $\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}(\theta_1 + i\theta_2), \quad \theta^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(\theta_1 - i\theta_2)$

    $\Rightarrow \quad \theta\theta^* = -\theta^*\theta \quad \rightarrow$ betrachte θ und θ^* als unabhängige Variable

- Gauß'sche Integrale:
  - komplexe Graßmann-Zahlen: $\left(\prod_i \int d\theta_i^* d\theta_i\right) e^{-\theta^T B\,\theta} = \det B$
  - gewöhnliche komplexe Zahlen: $\left(\prod_i \int dz_i^* dz_i\right) e^{-z^T B\,z} = \frac{(2\pi)^n}{\det B}$

Pfadintegral-Quantisierung von Dirac-Spinoren

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Graßmann-Felder: $\psi(x) = \sum_i \psi_i \, \phi_i(x)$
  - ψ_i: Graßmann-Zahlen
  - $\phi_i(x)$ orthonormale Basis-Funktionen (z.B. $u_s(p)e^{-ip\cdot x}$, $v_s(p)e^{ip\cdot x}$)
- Dirac-Zweipunkt-Funktionen:

$$\langle\Omega| T\left(\psi_H(x_1)\overline{\psi}_H(x_2)\right)|\Omega\rangle = \frac{\int D\overline{\psi}\, D\psi\, e^{i\int d^4x\, \mathscr{L}}\, \psi(x_1)\overline{\psi}(x_2)}{\int D\overline{\psi}\, D\psi\, e^{i\int d^4x\, \mathscr{L}}}$$

$$= \frac{1}{Z[0,0]}\left(-i\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}(x_1)}\right)\left(+i\frac{\delta}{\delta\eta(x_2)}\right) Z[\bar{\eta},\eta]\Big|_{\bar{\eta}=\eta=0}$$

- erzeugendes-Funktional:

$$Z[\bar{\eta},\eta] = \int D\overline{\psi}\, D\psi\, \exp\left[i\int d^4x\, \mathscr{L} + \bar{\eta}\psi + \overline{\psi}\eta + i\varepsilon\right]$$

- freies Dirac-Feld:

$$Z_0[\bar{\eta},\eta] = Z_0[0,0]\, \exp\left[-\int d^4x \int d^4y\, \bar{\eta}(x)\, S_F(x-y)\, \eta(y)\right]$$