Pfadintegral-Quantisierung des elektromagnetischen Feldes

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Naives Vorgehen:
  - Erzeugendes Funktional: $Z_0^{(\text{naiv})}[J] = \int DA \exp\left[i \int d^4x \, (\mathscr{L}_0 + J_\mu A^\mu)\right]$
  - Lagrange-Dichte: $\mathscr{L}_0 = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$
  - Wirkung: $\int d^4x \, \mathscr{L}_0 = \frac{1}{2} \int d^4x \, A_\mu \left(\Box \, g^{\mu\nu} - \partial^\mu \partial^\nu\right) A_\nu$

→ Green'sche Funktion: $\left(\Box \, g^{\mu\nu} - \partial^\mu \partial^\nu\right) D_\nu{}^\sigma(x-y) = i\delta^4(x-y) g^{\mu\sigma}$

$$\Leftrightarrow \quad -k^2 T^{\mu\nu} D_{\nu\sigma}(k) = i(\mathbb{1})^\mu{}_\sigma \,, \qquad T^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2}$$

Pfadintegral-Quantisierung des elektromagnetischen Feldes

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Naives Vorgehen:
  - Erzeugendes Funktional: $Z_0^{(\text{naiv})}[J] = \int DA \exp\left[i \int d^4x \left(\mathscr{L}_0 + J_\mu A^\mu\right)\right]$
  - Lagrange-Dichte: $\mathscr{L}_0 = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$
  - Wirkung: $\int d^4x\, \mathscr{L}_0 = \frac{1}{2} \int d^4x\, A_\mu \left(\Box g^{\mu\nu} - \partial^\mu \partial^\nu\right) A_\nu$

  → Green'sche Funktion: $\left(\Box g^{\mu\nu} - \partial^\mu \partial^\nu\right) D_\nu{}^\sigma(x-y) = i\delta^4(x-y) g^{\mu\sigma}$

$$\Leftrightarrow \quad -k^2 T^{\mu\nu} D_{\nu\sigma}(k) = i(\mathbb{1})^\mu{}_\sigma\,, \qquad T^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2}$$

- Problem: $\det\left(T^{\mu\nu}\right) = 0 \quad \Rightarrow$ nicht invertierbar
- Ursache:

  Invarianz von $\mathscr{L}_0$ unter Eichtransformationen $A_\mu \to A_\mu^{(\alpha)} = A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu \alpha$
  - singuläre Moden: $\leftrightarrow$ eich-äquivalente Felder zu $A_\mu = 0$

Pfadintegral-Quantisierung des elektromagnetischen Feldes

- Idee: $\int DA\, F(A_\mu) = \int D\alpha \int D\overline{A}\, F(A_\mu = \overline{A}_\mu^{(\alpha)})$
  - $\int D\overline{A}$: Integral über eich-inäquivalente Felder
  - F eichinvariant $\Rightarrow$ $F(\overline{A}_\mu^{(\alpha)}) = F(\overline{A}_\mu)$
  - $\int D\alpha$ konstanter Normierungsfaktor

Pfadintegral-Quantisierung des elektromagnetischen Feldes

- Idee: $\int DA\, F(A_\mu) = \int D\alpha \int D\overline{A}\, F(A_\mu = \overline{A}_\mu^{(\alpha)})$
  - $\int D\overline{A}$: Integral über eich-inäquivalente Felder
  - F eichinvariant $\Rightarrow$ $F(\overline{A}_\mu^{(\alpha)}) = F(\overline{A}_\mu)$
  - $\int D\alpha$ konstanter Normierungsfaktor
- Umsetzung (Faddeev-Popov-Methode):
  - kovariante Eichfixierung: $G(A) \overset{!}{=} 0, \quad G(A) = \partial_\mu A^\mu(x) - \omega(x)$
  - Implementierung: $1 = \int D\alpha \det\left[\frac{\delta G(A^{(\alpha)})}{\delta\alpha}\right] \delta[G(A^{(\alpha)})]$
  - Funktionaldeterminante: $\det\left[\frac{\delta G(A^{(\alpha)})}{\delta\alpha}\right] = \det\left[\frac{1}{e}\Box\right]$ hängt nicht von A ab

$$\Rightarrow \quad \int DA\, e^{iS[A]} = \det\left[\frac{1}{e}\Box\right] \int D\alpha \int DA\, e^{iS[A]}\, \delta[G(A^{(\alpha)})]$$

Pfadintegral-Quantisierung des elektromagnetischen Feldes

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Idee: $\int DA\, F(A_\mu) = \int D\alpha \int D\overline{A}\, F(A_\mu = \overline{A}_\mu^{(\alpha)})$
  - $\int D\overline{A}$: Integral über eich-inäquivalente Felder
  - F eichinvariant $\Rightarrow$ $F(\overline{A}_\mu^{(\alpha)}) = F(\overline{A}_\mu)$
  - $\int D\alpha$ konstanter Normierungsfaktor
- Umsetzung (Faddeev-Popov-Methode):
  - kovariante Eichfixierung: $G(A) \stackrel{!}{=} 0, \quad G(A) = \partial_\mu A^\mu(x) - \omega(x)$
  - Implementierung: $1 = \int D\alpha \det\left[\frac{\delta G(A^{(\alpha)})}{\delta\alpha}\right] \delta[G(A^{(\alpha)})]$
  - Funktionaldeterminante: $\det\left[\frac{\delta G(A^{(\alpha)})}{\delta\alpha}\right] = \det\left[\frac{1}{e}\Box\right]$ hängt nicht von A ab

$$\Rightarrow \quad \int DA\, e^{iS[A]} = \det\left[\frac{1}{e}\Box\right] \int D\alpha \int DA^{(\alpha)}\, e^{iS[A^{(\alpha)}]}\, \delta[G(A^{(\alpha)})]$$

Pfadintegral-Quantisierung des elektromagnetischen Feldes

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Idee: $\int DA\, F(A_\mu) = \int D\alpha \int D\overline{A}\, F(A_\mu = \overline{A}^{(\alpha)}_\mu)$
  - $\int D\overline{A}$: Integral über eich-inäquivalente Felder
  - F eichinvariant $\Rightarrow$ $F(\overline{A}^{(\alpha)}_\mu) = F(\overline{A}_\mu)$
  - $\int D\alpha$ konstanter Normierungsfaktor
- Umsetzung (Faddeev-Popov-Methode):
  - kovariante Eichfixierung: $G(A) \overset{!}{=} 0, \quad G(A) = \partial_\mu A^\mu(x) - \omega(x)$
  - Implementierung: $1 = \int D\alpha \det\left[\frac{\delta G(A^{(\alpha)})}{\delta\alpha}\right] \delta[G(A^{(\alpha)})]$
  - Funktionaldeterminante: $\det\left[\frac{\delta G(A^{(\alpha)})}{\delta\alpha}\right] = \det\left[\frac{1}{e}\Box\right]$ hängt nicht von A ab

$$\Rightarrow \quad \int DA\, e^{iS[A]} = \underbrace{\det\left[\frac{1}{e}\Box\right] \int D\alpha}_{\text{Normierungsfaktor}} \underbrace{\int DA\, e^{iS[A]}\, \delta[G(A)]}_{\text{eichfixiertes Pfadintegral}}$$

Pfadintegral-Quantisierung des elektromagnetischen Feldes

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- $\int DA\, e^{iS[A]} = \det\left[\frac{1}{e}\Box\right] \int D\alpha \int DA\, e^{iS[A]}\, \delta[\partial_\mu A^\mu - \omega(x)]$

  gilt für beliebige $\omega(x)$ $\Rightarrow$ Integriere $\mathcal{N}(\xi) \int D\omega\, \exp\left[-i \int d^4x\, \frac{\omega^2}{2\xi}\right]$

  $$\Rightarrow \int DA\, e^{iS[A]} = \mathcal{N} \int DA\, \exp\left[i \int d^4x \left(\mathscr{L}_0 \underbrace{-\frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2}_{\text{Eichfixierung}}\right)\right]$$

Pfadintegral-Quantisierung des elektromagnetischen Feldes

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- $\int DA\, e^{iS[A]} = \det\left[\frac{1}{e}\Box\right] \int D\alpha \int DA\, e^{iS[A]}\, \delta[\partial_\mu A^\mu - \omega(x)]$

  gilt für beliebige $\omega(x)$ $\;\Rightarrow\;$ Integriere $\mathcal{N}(\xi) \int D\omega\, \exp\left[-i\int d^4x\, \frac{\omega^2}{2\xi}\right]$

  $$\Rightarrow \int DA\, e^{iS[A]} = \mathcal{N} \int DA\, \exp\left[i\int d^4x\left(\mathscr{L}_0 \underbrace{-\frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2}_{\text{Eichfixierung}}\right)\right]$$

- Korrelationsfunktionen:

  $$\langle\Omega|T\hat{\mathcal{O}}_H(A)|\Omega\rangle = \frac{\int DA\, \mathcal{O}(A)\, \exp\left[i\int d^4x\left(\mathscr{L}_0 - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2\right)\right]}{\int DA\, \exp\left[i\int d^4x\left(\mathscr{L}_0 - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2\right)\right]}$$ für $\hat{\mathcal{O}}_H(A)$ eichinvariant

Pfadintegral-Quantisierung des elektromagnetischen Feldes

- $\int DA\; e^{iS[A]} = \det\left[\frac{1}{e}\Box\right] \int D\alpha \int DA\; e^{iS[A]}\,\delta[\partial_\mu A^\mu - \omega(x)]$

  gilt für beliebige $\omega(x)$ $\quad\Rightarrow\quad$ Integriere $\mathcal{N}(\xi) \int D\omega\, \exp\left[-i\int d^4x\, \frac{\omega^2}{2\xi}\right]$

  $$\Rightarrow \int DA\; e^{iS[A]} = \mathcal{N} \int DA\; \exp\left[i\int d^4x \left(\mathscr{L}_0 \underbrace{- \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2}_{\text{Eichfixierung}}\right)\right]$$

- Korrelationsfunktionen:

  $$\langle\Omega|T\hat{\mathcal{O}}_H(A)|\Omega\rangle = \frac{\int DA\,\mathcal{O}(A)\;\exp\left[i\int d^4x\left(\mathscr{L}_0 - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2\right)\right]}{\int DA\;\exp\left[i\int d^4x\left(\mathscr{L}_0 - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2\right)\right]}$$ für $\hat{\mathcal{O}}_H(A)$ eichinvariant

- erzeugendes Funktional:

  $$Z_0^{(\xi)}[J] = Z_0^{(\xi)}[0]\;\exp\left[-\frac{1}{2}\int d^4x\, d^4y\, J^\mu(x)\, D^{(\xi)}_{\mu\nu}(x-y)\, J^\nu(y)\right]$$

Pfadintegral-Quantisierung des elektromagnetischen Feldes

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- $\int DA\, e^{iS[A]} = \det\left[\frac{1}{e}\Box\right] \int D\alpha \int DA\, e^{iS[A]}\, \delta[\partial_\mu A^\mu - \omega(x)]$

  gilt für beliebige $\omega(x) \quad \Rightarrow \quad$ Integriere $\mathcal{N}(\xi) \int D\omega\, \exp\left[-i \int d^4x\, \frac{\omega^2}{2\xi}\right]$

  $$\Rightarrow \int DA\, e^{iS[A]} = \mathcal{N} \int DA\, \exp\left[i \int d^4x \left(\mathscr{L}_0 \underbrace{- \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2}_{\text{Eichfixierung}}\right)\right]$$

- Korrelationsfunktionen:

  $$\langle \Omega | T\hat{\mathcal{O}}_H(A) | \Omega \rangle = \frac{\int DA\, \mathcal{O}(A)\, \exp\left[i \int d^4x \left(\mathscr{L}_0 - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2\right)\right]}{\int DA\, \exp\left[i \int d^4x \left(\mathscr{L}_0 - \frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2\right)\right]} \quad \text{für } \hat{\mathcal{O}}_H(A) \text{ eichinvariant}$$

- erzeugendes Funktional:

  $$Z_0^{(\xi)}[J] = Z_0^{(\xi)}[0]\, \exp\left[-\frac{1}{2} \int d^4x\, d^4y\, J^\mu(x)\, D_{\mu\nu}^{(\xi)}(x-y)\, J^\nu(y)\right]$$

- Photon-Propagator: $\left[\Box g^{\mu\nu} - (1 - \frac{1}{\xi})\partial^\mu \partial^\nu\right] D^{(\xi)}{}_\nu{}^\sigma(x-y) = i\delta^4(x-y) g^{\mu\sigma}$

  $$\Rightarrow D_{\mu\nu}^{(\xi)}(x-y) = \frac{-i}{k^2 + i\varepsilon}\left(g^{\mu\nu} - (1-\xi)\frac{k^\mu k^\nu}{k^2}\right)$$