Symmetrien im Pfadintegralformalismus

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- *n*-Punkt Korrelationsfuntion:

  $$\langle\Omega|T\big(\phi(x_1)\,...\,\phi(x_n)\big)|\Omega\rangle = \frac{1}{Z[0]}\int D\phi\, e^{i\int d^4x\,\mathscr{L}[\phi]}\,\phi(x_1)\,...\,\phi(x_n)$$

- infinitesimale Variation des Feldes: $\phi(x) \to \phi'(x) = \phi(x) + \varepsilon(x)$
  - Pfadintegral invariant unter Umbenennung $\phi \to \phi'$, $D\phi \to D\phi'$
  - Variation = konstante Verschiebung $\Rightarrow$ $D\phi' = D\phi$

$$\Rightarrow\quad \int D\phi\, e^{i\int d^4x\,\mathscr{L}[\phi]}\,\phi(x_1)\,...\,\phi(x_n) = \int D\phi\, e^{i\int d^4x\,\mathscr{L}[\phi']}\,\phi'(x_1)\,...\,\phi'(x_n)$$

- Nullsetzen des linearen Anteils in $\epsilon(x)$ $\Rightarrow$ Dyson-Schwinger-Gleichungen:

$$\left\langle\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\phi}(x)-\partial_\mu\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_\mu\phi}(x)\right)\phi(x_1)\,...\,\phi(x_n)\right\rangle = i\sum_{j=1}^{n}\langle\Omega|T\big(\phi(x_1)\,...\,\delta^4(x-x_j)\,...\,\phi(x_n)\big)|\Omega\rangle$$

$\hat{=}$ Euler-Lagrange-Gleichungen bis auf „Kontakt-Terme"

  - $\langle\,...\,\rangle$ = zeitgeordnetes Produkt, Ableitungen auf $\phi(x)$ außerhalb der Zeitordnung

Symmetrien im Pfadintegralformalismus

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Betrachte Variation $\phi(x) \to \phi(x) + \alpha(x)\,\Delta\phi(x)$
  - $\alpha(x)$ infinitesimal
  - $\Delta\phi(x)$: Symmetrietransformation,
    lässt Wirkung für konstantes α invariant:
    $\mathscr{L} \to \mathscr{L} + \alpha\partial_\mu J^\mu$ für $\alpha = const$.
  - klassischer Noetherstrom: $j^\mu = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\partial_m u\phi}\Delta\phi - J^\mu$
- Verhalten der Wirkung für x-abhängige α:
  $\int d^4x\,\mathscr{L}(x) \;\to\; \int d^4x\,\big(\mathscr{L}(x) - \alpha(x)\,\partial_\mu j^\mu(x)\big)$
- Dyson-Schwinger-Gleichungen:
  $\langle \partial_\mu j^\mu(x)\,\phi(x_1)\dots\phi(x_n)\rangle = -i\sum_{j=1}^{n}\langle\Omega|\,T\big(\phi(x_1)\dots\big(\delta^4(x-x_j)\Delta\phi(x_j)\big)\dots\phi(x_n)\big)|\Omega\rangle$
  „verallgemeinerte Ward-Takahashi-Identitäten"

Symmetrien im Pfadintegralformalismus

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Beispiel QED: $\mathscr{L}_{\text{QED}} = \overline{\psi}(i\partial\!\!\!/ - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - e\overline{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu$
  - invariant unter $\psi \to e^{-i\alpha}\psi, \quad \overline{\psi} \to \overline{\psi}e^{i\alpha}, \quad \alpha = const.$
  - Noetherstrom: $j^\mu = \overline{\psi}\gamma^\mu\psi$
- infinitesimale lokale Transformation:

$$\psi(x) \to \big(1 - i\alpha(x)\big)\psi(x), \quad \overline{\psi}(x) \to \overline{\psi}(x)\big(1 + i\alpha(x)\big)$$

$$\Rightarrow \quad \mathscr{L}_{\text{QED}} \to \mathscr{L}_{\text{QED}} + (\partial\alpha)j^\mu$$

- Ward-Takahashi-Identität:

$$\partial_\mu \langle\Omega| T\big(j^\mu(x)\psi(x_1)\overline{\psi}(x_2)\big)|\Omega\rangle = -\big[\delta^4(x-x_1) - \delta^4(x-x_2)\big]\,\langle\Omega| T\big(\psi(x_1)\overline{\psi}(x_2)\big)|\Omega\rangle$$

- Impulsraum: $q_\mu\Gamma^\mu(p+q,p) = S^{-1}(p+q) - S^{-1}(p)$
  - $S(p)$: gedresster Elektron-Propagator
  - $\Gamma^\mu(p+q,p)$: gedresster Vertex