Ein-Loop-Renormierung der QED

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Elektron-Selbstenergie: $\Sigma(p) = \Sigma_{\text{Loop}}(p) + \Sigma_{\text{CT}}(p)$
  - Counterterm-Beitrag: $-i\Sigma_{\text{CT}}(p) = i(\delta_2 \not{p} - \delta m)$
  - Loop-Beitrag: $-i\Sigma_{\text{Loop}}(p) = (-ie)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\, \gamma^\mu\, i\frac{\not{k}+\not{p}+m}{(k+p)^2-m^2+i\varepsilon}\, \gamma^\nu\, i\frac{-g_{\mu\nu}}{k^2-\mu^2+i\varepsilon}$
    - μ : fiktive Photon-Masse zur Regularisierung von Infrarot-Divergenzen

Ein-Loop-Renormierung der QED

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Elektron-Selbstenergie: $\Sigma(p) = \Sigma_{\text{Loop}}(p) + \Sigma_{\text{CT}}(p)$
  - Counterterm-Beitrag: $-i\Sigma_{\text{CT}}(p) = i(\delta_2 \not{p} - \delta m)$
  - Loop-Beitrag: $-i\Sigma_{\text{Loop}}(p) = (-ie)^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\, \gamma^\mu\, i\frac{\not{k}+\not{p}+m}{(k+p)^2-m^2+i\varepsilon}\, \gamma^\nu\, i\frac{-g_{\mu\nu}}{k^2-\mu^2+i\varepsilon}$
    - μ : fiktive Photon-Masse zur Regularisierung von Infrarot-Divergenzen

- Auswertung (Feynman-Parameter-Integral und Wick-Rotation):

$$\Sigma_{\text{Loop}}(p) = e^2 \int_0^1 dx \left[4m - 2\not{p}(1-x)\right] \int \frac{d^4\ell_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{[\ell_E^2 + \Delta(x) - i\varepsilon]^2}$$

  - $\Delta(x) \equiv m^2 x + \mu^2(1-x) - p^2 x(1-x)$
  - ℓ_E-Integrand besitzt einen Pol, wenn $\Delta(x) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad p^2 > (m+\mu)^2$
    $\leftrightarrow$ Erzeugung reeller Elektron-Photon-Paare kinematisch möglich
  - ℓ_E-Integral logarithmisch divergent

Ein-Loop-Renormierung der QED

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Pauli-Villars-Regularisierung:

$$\int \frac{d^4\ell_E}{(2\pi)^4}\,\frac{1}{[\ell_E^2+\Delta(x)-i\varepsilon]^2} \longrightarrow \int \frac{d^4\ell_E}{(2\pi)^4}\left(\frac{1}{[\ell_E^2+\Delta(x)-i\varepsilon]^2} - \frac{1}{[\ell_E^2+\Lambda^2 x+\mu^2(1-x)-p^2x(1-x)-i\varepsilon]^2}\right)$$

$$\Rightarrow\ \Sigma(p) = \frac{\alpha}{2\pi}\int_0^1 dx\,\left[2m-\not{p}(1-x)\right]\,\ln\left(\frac{\Lambda^2 x}{\Delta(x)-i\varepsilon}\right) - \delta_2\not{p} + \delta m$$

Ein-Loop-Renormierung der QED

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Pauli-Villars-Regularisierung:

$$\int \frac{d^4\ell_E}{(2\pi)^4}\,\frac{1}{[\ell_E^2+\Delta(x)-i\varepsilon]^2} \to \int \frac{d^4\ell_E}{(2\pi)^4}\left(\frac{1}{[\ell_E^2+\Delta(x)-i\varepsilon]^2} - \frac{1}{[\ell_E^2+\Lambda^2 x+\mu^2(1-x)-p^2x(1-x)-i\varepsilon]^2}\right)$$

$$\Rightarrow\ \Sigma(p) = \frac{\alpha}{2\pi}\int_0^1 dx\,\left[2m - \not{p}(1-x)\right]\,\ln\left(\frac{\Lambda^2 x}{\Delta(x)-i\varepsilon}\right) - \delta_2\not{p} + \delta m$$

- Renormierungsbedingungen: $\Sigma(\not{p}\to m) \overset{!}{=} 0, \quad \left.\frac{d\Sigma}{d\not{p}}\right|_{\not{p}\to m} \overset{!}{=} 0$
  - $\not{p}\not{p} = p^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{dp^2}{d\not{p}} = 2\not{p}, \quad \frac{df(p^2)}{d\not{p}} = 2\not{p}\,\frac{df(p^2)}{dp^2}$

Ein-Loop-Renormierung der QED

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Pauli-Villars-Regularisierung:

$$\int \frac{d^4\ell_E}{(2\pi)^4}\,\frac{1}{[\ell_E^2+\Delta(x)-i\varepsilon]^2} \to \int \frac{d^4\ell_E}{(2\pi)^4}\left(\frac{1}{[\ell_E^2+\Delta(x)-i\varepsilon]^2} - \frac{1}{[\ell_E^2+\Lambda^2 x+\mu^2(1-x)-p^2x(1-x)-i\varepsilon]^2}\right)$$

$$\Rightarrow\ \Sigma(p) = \frac{\alpha}{2\pi}\int_0^1 dx\,\left[2m-\not{p}(1-x)\right]\,\ln\left(\frac{\Lambda^2 x}{\Delta(x)-i\varepsilon}\right) - \delta_2\not{p} + \delta m$$

- Renormierungsbedingungen: $\Sigma(\not{p}\to m) \overset{!}{=} 0, \quad \left.\frac{d\Sigma}{d\not{p}}\right|_{\not{p}\to m} \overset{!}{=} 0$
  - $\not{p}\not{p} = p^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{dp^2}{d\not{p}} = 2\not{p}, \quad \frac{df(p^2)}{d\not{p}} = 2\not{p}\frac{df(p^2)}{dp^2}$
- konkrete Auswertung:
  - $\Sigma(\not{p}\to m) = \frac{\alpha}{2\pi}m\int_0^1 dx\,(1+x)\,\ln\left(\frac{\Lambda^2 x}{m^2x^2+\mu^2(1-x)}\right) - \delta_2 m + \delta m$
  - $\left.\frac{d\Sigma}{d\not{p}}\right|_{\not{p}\to m} = \frac{\alpha}{2\pi}\int_0^1 dx\left\{-(1-x)\,\ln\left(\frac{\Lambda^2 x}{m^2x^2+\mu^2(1-x)}\right) + 2m^2\frac{(1+x)x(1-x)}{m^2x^2+\mu^2(1-x)}\right\} - \delta_2$