# Laufende Kopplung in der QED

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Photon-Polarisationsfunktion: $\Pi^{\mu\nu}(q^2) = (q^2 g^{\mu\nu} - q^\nu q^\nu)\,\Pi(q^2)$
- $\Pi(q^2) = \Pi_2(q^2) - \Pi_2(0) = \frac{2\alpha}{\pi}\int\limits_0^1 dx\, x(1-x)\,\ln\left(\frac{m^2 - x(1-x)q^2 - i\tilde{\varepsilon}}{m^2}\right)$
- Ladungsrenormierung: $e = Z_3^{\frac{1}{2}} e_0 = (1 + \Pi_2(0))^{\frac{1}{2}} e_0$

# Laufende Kopplung in der QED



- Photon-Polarisationsfunktion: $\Pi^{\mu\nu}(q^2) = (q^2 g^{\mu\nu} - q^\nu q^\nu)\,\Pi(q^2)$
- $\Pi(q^2) = \Pi_2(q^2) - \Pi_2(0) = \frac{2\alpha}{\pi} \int\limits_0^1 dx\, x(1-x) \ln\left(\frac{m^2 - x(1-x)q^2 - i\tilde{\varepsilon}}{m^2}\right)$
- Ladungsrenormierung: $e = Z_3^{\frac{1}{2}} e_0 = (1 + \Pi_2(0))^{\frac{1}{2}} e_0$

→ effektive Ladung bei nichtverschwindenden Photon-limpulsen:

$$e(q^2) = (1 + \Pi_2(q^2))^{\frac{1}{2}} e_0 \quad \Rightarrow \quad \alpha(q^2) = \frac{\alpha(0)}{1 - \Pi(q^2)} + \mathcal{O}(\alpha^2)$$

# Laufende Kopplung in der QED

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Photon-Polarisationsfunktion: $\Pi^{\mu\nu}(q^2) = (q^2 g^{\mu\nu} - q^\nu q^\nu)\,\Pi(q^2)$
- $\Pi(q^2) = \Pi_2(q^2) - \Pi_2(0) = \frac{2\alpha}{\pi} \int\limits_0^1 dx\, x(1-x) \ln\left(\frac{m^2 - x(1-x)q^2 - i\tilde{\varepsilon}}{m^2}\right)$
- Ladungsrenormierung: $e = Z_3^{\frac{1}{2}} e_0 = (1 + \Pi_2(0))^{\frac{1}{2}} e_0$

→ effektive Ladung bei nichtverschwindenden Photon-limpulsen:

$$e(q^2) = (1 + \Pi_2(q^2))^{\frac{1}{2}} e_0 \quad \Rightarrow \quad \alpha(q^2) = \frac{\alpha(0)}{1 - \Pi(q^2)} + \mathcal{O}(\alpha^2)$$

- große raumartige Impulse: $q^2 = -Q^2, \quad Q \gg m$

$$\alpha(-Q^2) \approx \frac{\alpha}{1 - \frac{\alpha}{3\pi}\left(\ln\frac{Q^2}{m^2} - \frac{5}{3}\right)}$$

  - wächst mit wachsendem $Q$ an
  - Interpretation: Abschirmung der nackten Ladung durch Elektron-Positron-Paare („Vakuumpolarisation")

# Spektraldarstellung des Propagators

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Vollständige Systeme von Energie-Impuls-Eigenzuständen:
  - $|\lambda_0\rangle$: Zustand mit $\vec{P}|\lambda_0\rangle = \vec{0}, \quad H|\lambda_0\rangle = m_\lambda|\lambda_0\rangle$
  - $|\lambda_{\vec{p}}\rangle$ = geboostetes $|\lambda_0\rangle$:

    $$\vec{P}|\lambda_{\vec{p}}\rangle = \vec{p}|\lambda_{\vec{p}}\rangle, \quad H|\lambda_{\vec{p}}\rangle = \sqrt{m_\lambda^2 + \vec{p}^{\,2}}|\lambda_{\vec{p}}\rangle \equiv E_{\vec{p}}(\lambda)|\lambda_{\vec{p}}\rangle$$
  - Vollständigkeitsrelation im Hilbert-Raum:

    $$\mathbb{1} = |\Omega\rangle\langle\Omega| + \sum_\lambda \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{E_{\vec{p}}(\lambda)} |\lambda_{\vec{p}}\rangle\langle\lambda_{\vec{p}}|$$

# Spektraldarstellung des Propagators

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Vollständige Systeme von Energie-Impuls-Eigenzuständen:
  - $|\lambda_0\rangle$: Zustand mit $\vec{P}|\lambda_0\rangle = \vec{0}$, $H|\lambda_0\rangle = m_\lambda|\lambda_0\rangle$
  - $|\lambda_{\vec{p}}\rangle$ = geboostetes $|\lambda_0\rangle$:

    $$\vec{P}|\lambda_{\vec{p}}\rangle = \vec{p}|\lambda_{\vec{p}}\rangle, \quad H|\lambda_{\vec{p}}\rangle = \sqrt{m_\lambda^2 + \vec{p}^{\,2}}|\lambda_{\vec{p}}\rangle \equiv E_{\vec{p}}(\lambda)|\lambda_{\vec{p}}\rangle$$
  - Vollständigkeitsrelation im Hilbert-Raum:

    $$\mathbb{1} = |\Omega\rangle\langle\Omega| + \sum_\lambda \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{E_{\vec{p}}(\lambda)} |\lambda_{\vec{p}}\rangle\langle\lambda_{\vec{p}}|$$
- Källén-Lehmann-Darstellung des gedressten Propagators:

  $$\langle\Omega|T\phi(x)\phi(y)|\Omega\rangle = \int_0^\infty \frac{dM^2}{2\pi} \rho(M^2)\, D_F(x-y; M^2)$$
  - spektrale Dichtefunktion: $\rho(M^2) = \sum_\lambda 2\pi\delta(M^2 - m_\lambda^2)\ \left|\langle\Omega|\phi(0)|\lambda_0\rangle\right|^2$
  - freier Propagator: $D_F(x-y; M^2) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - M^2 + i\varepsilon} e^{-ip\cdot(x-y)}$

# Spektraldarstellung des Propagators



- Fouriertransformation:

$$\int d^4x\, e^{ip\cdot x} \langle \Omega | T\phi(x)\phi(0) | \Omega \rangle = \int_0^\infty \frac{dM^2}{2\pi}\, \rho(M^2)\, \frac{i}{p^2 - M^2 + i\varepsilon}$$

- Separation des Einteilchenzustands:

$$\rho(M^2) = 2\pi\delta(M^2 - m^2)\, Z + \rho_{\text{höhere Zustände}}(M^2)\,, \qquad Z = \left|\langle \Omega | \phi(0) | \lambda_0(m_\lambda = m) \rangle\right|^2$$

$$\Rightarrow \int d^4x\, e^{ip\cdot x} \langle \Omega | T\phi(x)\phi(0) | \Omega \rangle = \frac{iZ}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} + \int_{(m+\varepsilon)^2}^\infty \frac{dM^2}{2\pi}\, \rho(M^2)\, \frac{i}{p^2 - M^2 + i\varepsilon}$$

$\rightarrow$ $Z$ = Wellenfunktionsrenormierungskonstante