Die beta-Funktion

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- β-Funktion: $\beta = M \frac{\partial \lambda_R}{\partial M}$, $\quad M$: Renormierungsskala

Die beta-Funktion

- β-Funktion: $\beta = M\frac{\partial \lambda_R}{\partial M}$, $\quad M$: Renormierungsskala
- Verhalten von 1PI-n-Punktfunktionen unter Impulsskalentransformationen:
  $\Gamma_R^{(n)}\left(\{tp_i\}, m_R, \lambda_R, M\right) = f(t)\,\Gamma_R^{(n)}\left(\{p_i\}, m_R(t), \lambda_R(t), M\right)$
  - laufende Kopplungskonstante: $t\frac{\partial \lambda_R(t)}{\partial t} = \beta(\lambda_R(t))$

Die beta-Funktion

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- β-Funktion: $\beta = M \frac{\partial \lambda_R}{\partial M}$, M : Renormierungsskala
- Verhalten von 1PI-n-Punktfunktionen unter Impulsskalentransformationen:
  $\Gamma_R^{(n)}\left(\{tp_i\}, m_R, \lambda_R, M\right) = f(t)\,\Gamma_R^{(n)}\left(\{p_i\}, m_R(t), \lambda_R(t), M\right)$
  - laufende Kopplungskonstante: $t\frac{\partial \lambda_R(t)}{\partial t} = \beta(\lambda_R(t))$
- $\beta(\lambda_R = 0) = 0$

Die beta-Funktion

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- β-Funktion: $\beta = M\frac{\partial \lambda_R}{\partial M}$, M : Renormierungsskala
- Verhalten von 1PI-n-Punktfunktionen unter Impulsskalentransformationen:
  $\Gamma_R^{(n)}\left(\{tp_i\}, m_R, \lambda_R, M\right) = f(t)\,\Gamma_R^{(n)}\left(\{p_i\}, m_R(t), \lambda_R(t), M\right)$
  - laufende Kopplungskonstante: $t\frac{\partial \lambda_R(t)}{\partial t} = \beta(\lambda_R(t))$
- $\beta(\lambda_R = 0) = 0$
- Fall 1: $\beta(\lambda_R > 0) > 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_R(t)$ steigt mit t an, freie Theorie im IR

Die beta-Funktion

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- β-Funktion: $\beta = M\frac{\partial \lambda_R}{\partial M}$, M : Renormierungsskala
- Verhalten von 1PI-n-Punktfunktionen unter Impulsskalentransformationen:
  $\Gamma_R^{(n)}\left(\{tp_i\}, m_R, \lambda_R, M\right) = f(t)\,\Gamma_R^{(n)}\left(\{p_i\}, m_R(t), \lambda_R(t), M\right)$
  - laufende Kopplungskonstante: $t\frac{\partial \lambda_R(t)}{\partial t} = \beta(\lambda_R(t))$
- $\beta(\lambda_R = 0) = 0$
- Fall 1: $\beta(\lambda_R > 0) > 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_R(t)$ steigt mit t an, freie Theorie im IR
- Fall 2: $\beta(\lambda_R > 0) < 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_R(t)$ fällt mit t ab: asymptotisch freie Theorie

Die beta-Funktion

- β-Funktion: $\beta = M \frac{\partial \lambda_R}{\partial M}$, M : Renormierungsskala
- Verhalten von 1PI-n-Punktfunktionen unter Impulsskalentransformationen:
  $\Gamma_R^{(n)}\left(\{tp_i\}, m_R, \lambda_R, M\right) = f(t)\,\Gamma_R^{(n)}\left(\{p_i\}, m_R(t), \lambda_R(t), M\right)$
  - laufende Kopplungskonstante: $t\frac{\partial \lambda_R(t)}{\partial t} = \beta(\lambda_R(t))$
- $\beta(\lambda_R = 0) = 0$
- Fall 1: $\beta(\lambda_R > 0) > 0$ $\Rightarrow$ $\lambda_R(t)$ steigt mit t an, freie Theorie im IR
- Fall 2: $\beta(\lambda_R > 0) < 0$ $\Rightarrow$ $\lambda_R(t)$ fällt mit t ab: asymptotisch freie Theorie
- nicht-triviale Fixpunkte: $\beta(\lambda_R^*) = 0$ für $\lambda_R^* \neq 0$
  Am Fixpunkt ändert sich die Kopplung nicht mehr, wenn man die Impulsskala variiert.

Die beta-Funktion in der QED

- QED-Lagrangedichte (unrenormierte Größen):

$$\mathscr{L}_{\mathrm{QED}} = \overline{\psi}_0(i\not{\partial} - m_0)\psi_0 - \frac{1}{4}\left(F_0^{\mu\nu}\right)^2 - e_0\overline{\psi}_0\gamma^\mu\psi_0 A_{0\,\mu}$$

Die beta-Funktion in der QED

- QED-Lagrangedichte (unrenormierte Größen):

  $\mathscr{L}_{\text{QED}} = \overline{\psi}_0(i\partial\!\!\!/ - m_0)\psi_0 - \frac{1}{4}\left(F_0^{\mu\nu}\right)^2 - e_0\overline{\psi}_0\gamma^\mu\psi_0\, A_{0\,\mu}$

- dimensionale Regularisierung:
  - $S = \int d^d x\, \mathscr{L}_{\text{QED}}$ dimensionslos $\Rightarrow$ $[e_0] = [\text{Masse}]^{\frac{\epsilon}{2}}$, $\epsilon = 4 - d$
  - renormierte Ladung e_R: $M^{\frac{\epsilon}{2}} e_R = \sqrt{Z_3} e_0$

    $[M] = [\text{Masse}]$ $\rightarrow$ M: Renormierungsskala

Die beta-Funktion in der QED

- QED-Lagrangedichte (unrenormierte Größen):

  $$\mathscr{L}_{\text{QED}} = \overline{\psi}_0(i\not{\partial} - m_0)\psi_0 - \frac{1}{4}\left(F_0^{\mu\nu}\right)^2 - e_0\overline{\psi}_0\gamma^\mu\psi_0 A_{0\,\mu}$$

- dimensionale Regularisierung:
  - $S = \int d^dx\, \mathscr{L}_{\text{QED}}$ dimensionslos $\Rightarrow$ $[e_0] = [\text{Masse}]^{\frac{\epsilon}{2}}, \quad \epsilon = 4 - d$
  - renormierte Ladung e_R: $M^{\frac{\epsilon}{2}} e_R = \sqrt{Z_3}\, e_0$

    $[M] = [\text{Masse}]$ $\rightarrow$ M: Renormierungsskala

- β-Funktion: $0 = \frac{\partial e_0}{\partial M} = \frac{\partial}{\partial M}\left(M^{\frac{\epsilon}{2}} \frac{e_R}{\sqrt{Z_3}}\right) \Rightarrow \beta(e_R) = -\frac{\epsilon}{2} e_R \left(1 - \frac{e_R}{Z_3}\frac{\partial Z_3}{\partial e_R}\right)^{-1}$

Die beta-Funktion in der QED

- QED-Lagrangedichte (unrenormierte Größen):

  $\mathscr{L}_{\text{QED}} = \overline{\psi}_0(i\partial\!\!\!/ - m_0)\psi_0 - \frac{1}{4}\left(F_0^{\mu\nu}\right)^2 - e_0\overline{\psi}_0\gamma^\mu\psi_0 A_{0\,\mu}$

- dimensionale Regularisierung:
  - $S = \int d^d x\, \mathscr{L}_{\text{QED}}$ dimensionslos $\Rightarrow$ $[e_0] = [\text{Masse}]^{\frac{\epsilon}{2}}$, $\epsilon = 4 - d$
  - renormierte Ladung e_R: $M^{\frac{\epsilon}{2}} e_R = \sqrt{Z_3}\, e_0$

    $[M] = [\text{Masse}]$ $\rightarrow$ M: Renormierungsskala

- β-Funktion: $0 = \frac{\partial e_0}{\partial M} = \frac{\partial}{\partial M}\left(M^{\frac{\epsilon}{2}} \frac{e_R}{\sqrt{Z_3}}\right)$ $\Rightarrow$ $\beta(e_R) = -\frac{\epsilon}{2} e_R \left(1 - \frac{e_R}{Z_3}\frac{\partial Z_3}{\partial e_R}\right)^{-1}$
- Störungstheorie: $\beta(e_R) = \frac{e_R^3}{12\pi^2} + \mathcal{O}(e_R^5)$ $\rightarrow$ nicht asymptotisch frei

Die beta-Funktion in der QED

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- QED-Lagrangedichte (unrenormierte Größen):

  $\mathscr{L}_{\text{QED}} = \overline{\psi}_0(i\partial\!\!\!/ - m_0)\psi_0 - \frac{1}{4}\left(F_0^{\mu\nu}\right)^2 - e_0\overline{\psi}_0\gamma^\mu\psi_0\, A_{0\,\mu}$

- dimensionale Regularisierung:
  - $S = \int d^d x\, \mathscr{L}_{\text{QED}}$ dimensionslos $\Rightarrow$ $[e_0] = [\text{Masse}]^{\frac{\epsilon}{2}}$, $\epsilon = 4 - d$
  - renormierte Ladung e_R: $M^{\frac{\epsilon}{2}} e_R = \sqrt{Z_3} e_0$

    $[M] = [\text{Masse}]$ ➞ M: Renormierungsskala

- β-Funktion: $0 = \frac{\partial e_0}{\partial M} = \frac{\partial}{\partial M}\left(M^{\frac{\epsilon}{2}} \frac{e_R}{\sqrt{Z_3}}\right) \Rightarrow \beta(e_R) = -\frac{\epsilon}{2} e_R \left(1 - \frac{e_R}{Z_3}\frac{\partial Z_3}{\partial e_R}\right)^{-1}$
- Störungstheorie: $\beta(e_R) = \frac{e_R^3}{12\pi^2} + \mathcal{O}(e_R^5)$ ➞ nicht asymptotisch frei
- laufende Kopplung: $\alpha(M) = \frac{\alpha(M_0)}{1 - \frac{\alpha}{3\pi} \ln \frac{M^2}{M_0^2}}$