Yang-Mills-Theorie (Fortsetzung)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Feldstärketensor:

$$[D_\mu, D_\nu] = -ig\, G^k_{\mu\nu} \frac{\sigma^k}{2}, \quad G^k_{\mu\nu} = \partial_\mu A^k_\nu - \partial_\nu A^k_\mu + g\epsilon^{ijk} A^i_\mu A^j_\nu$$

  - infinitesimale Eichtransformation:

$$G^k_{\mu\nu} \to G^k_{\mu\nu} - \epsilon^{ijk} \alpha^i G^j_{\mu\nu}$$ nicht eichinvariant!

- Eichinvariante Kombination:

$$\mathrm{tr}\left[(G^k_{\mu\nu} \frac{\sigma^k}{2})^2 \right] = \frac{1}{2} (G^k_{\mu\nu})^2$$

- Eichinvariante Lagrangedichte:

$$\mathscr{L} = \overline{\psi}(i\not{D} - m)\psi - \frac{1}{4}(G^k_{\mu\nu})^2$$

Gruppentheoretische Grundlagen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Lie-Gruppen:

  $G = \{g(\vec{\theta})\}, \quad \vec{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_n), \quad \theta_i$ kontinuierliche Parameter

  mit $\; g(\vec{\theta}) \cdot g(\vec{\phi}) = g(\vec{\xi}), \quad \vec{\xi} = f(\vec{\theta}, \vec{\phi})$ analytische Funktion

- infinitesimale Transformationen:

  $g(\vec{\theta}) = 1 + i\theta^a T^a, \qquad T^a,\ a = 1, \dots, n$ Generatoren der Gruppe

- endliche Transformationen: $\; g(\vec{\theta}) = \exp(i\theta^a T^a)$
- Lie-Algebra: $\; [T^a, T^b] = if^{abc} T^c, \qquad f^{abc}$ Strukturkonstanten
- $SU(N)$: Gruppe der $N \times N$-Matrizen V mit $V^\dagger V = \mathbb{1}$ und $\det V = 1$

  $\Rightarrow \; T^{a\dagger} = T^a, \; \mathrm{tr}\, T^a = 0 \;\; \Rightarrow \;\; N^2 - 1$ Generatoren

  - $SU(2)$: $\; N^2 - 1 = 3 \longrightarrow T^a = \frac{\sigma^a}{2}$ (Pauli-Matrizen)
  - $SU(3)$: $\; N^2 - 1 = 8 \longrightarrow T^a = \frac{\lambda^a}{2}$ (Gell-Mann-Matrizen)

    (Fundamentaldarstellung)

Gruppentheoretische Grundlagen

- Adjungierte Darstellung: $\left(\mathcal{T}^a\right)^{bc} = -if^{abc}$

  $\Rightarrow \quad [\mathcal{T}^a, \mathcal{T}^b] = if^{abc}\mathcal{T}^c \quad \rightarrow \; N^2 - 1$-dim. Darstellung der $SU(N)$

QCD

- Lagrangedichte: $\mathscr{L}_{QCD} = \sum_f \overline{\psi}_f \left(i\not{D} - m_f \right) \psi_f \; - \frac{1}{4}(G^a_{\mu\nu})^2$
  - $\psi_f = \begin{pmatrix} \psi_{f,r} \\ \psi_{f,g} \\ \psi_{f,b} \end{pmatrix}$ Quark-Feld mit Flavour $f \in \{u, d, s, c, b, t\}$ und Farb-Freiheitsgraden r, g, b
  - kovariante Ableitung: $D_\mu = \partial_\mu - igA^a_\mu(x)T^a, \quad T^a = \frac{\lambda^a}{2}$

    $A^a_\mu(x)$, $a = 1, \ldots 8$: Gluon-Feld , g: Kopplungskonstante
  - Feldstärketensor: $G^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + gf^{abc}A^b_\mu A^c_\nu$
- $\mathscr{L}_{QCD}$ ist invariant unter lokalen Farb-$SU(3)$-Transformationen

  $$\psi_f(x) \to V(x)\psi_f(x) = \exp\left(i\theta^a(x)T^a\right)\psi_f(x)$$

  $$A^a_\mu(x)T^a \to V(x)\left(A^a_\mu(x)T^a + \frac{i}{g}\partial_\mu\right)V^\dagger(x)$$

QCD

- $\mathscr{L}_{QCD} = \mathscr{L}_0 + \mathscr{L}_{WW}$

  mit

  $$\mathscr{L}_0 = \sum_f \overline{\psi}_f \left(i\partial\!\!\!/ - m_f\right)\psi_f - \frac{1}{4}(\partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu)^2$$

  $$\mathscr{L}_{WW} = \sum_f g\,\overline{\psi}_f \gamma^\mu T^a \psi_f A^a_\mu$$ Quark-Gluon-Vertex

  $$-gf^{abc}(\partial_\mu A^a_\nu)A^{b\,\mu}A^{c\,\nu}$$ Drei-Gluon-Vertex

  $$-\frac{1}{4}g^2 f^{abc} f^{ade} A^b_\mu A^c_\nu A^{d\,\mu} A^{e\,\nu}$$ Vier-Gluon-Vertex

- Alle Vertizes hängen von der gleichen Kopplungskonstanten g ab.
- A^a_μ und damit g sind Flavour-unabhängig.