III.1 Die Dirac-Gleichung (historischer Zugang)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Ziel: Konstruktion einer Einteilchen-Gleichung der relativist. QM

- QM: $E \to i\frac{\partial}{\partial t}, \quad \vec{p} \to -i\vec{\nabla}$
- Schrödinger: $E = \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} + V \;\to$ Dgl. 1. Ordn. in t, 2. Ordn. in x^k
- Klein-Gordon: $E^2 = \vec{p}^{\,2} + m^2 \;\to$ Dgl. 2. Ordn. in t und x^k

  $\Rightarrow$ Lösungen positiver und negativer Energie: $E = \pm\sqrt{\vec{p}^{\,2} + m^2}$
- Dirac: versuche Dgl. 1. Ordn. in t und x^k
  - Ansatz: $E\psi = \underbrace{\left(\vec{\alpha}\cdot\vec{p} + \beta m\right)}_{H_D}\psi \;, \quad \alpha^k, \beta = const.$
  - Forderung: $E^2\,\psi \overset{!}{=} \left(\vec{p}^{\,2} + m^2\right)\psi$

$$E\psi = \left(\alpha^k p^k + \beta m\right) \psi$$

$$\Rightarrow \quad E^2\psi = \left(\alpha^k p^k + \beta m\right) \left(\alpha^\ell p^\ell + \beta m\right) \psi$$

$$E\psi = \left(\alpha^k p^k + \beta m\right)\psi$$

$$\Rightarrow \quad E^2\psi = \left(\alpha^k p^k + \beta m\right)\left(\alpha^\ell p^\ell + \beta m\right)\psi$$

$$= \left(\alpha^k \alpha^\ell p^k p^\ell + (\alpha^k \beta + \beta \alpha^k) m p^k + \beta^2 m^2\right)\psi$$

$$E\psi = \left(\alpha^k p^k + \beta m\right)\psi$$

$$\Rightarrow \quad E^2\psi = \left(\alpha^k p^k + \beta m\right)\left(\alpha^\ell p^\ell + \beta m\right)\psi$$

$$= \left(\alpha^k \alpha^\ell p^k p^\ell + (\alpha^k \beta + \beta \alpha^k) m p^k + \beta^2 m^2\right)\psi$$

$$= \left(\frac{1}{2}\{\alpha^k, \alpha^\ell\} p^k p^\ell + \{\alpha^k, \beta\} m p^k + \beta^2 m^2\right)\psi$$

Antikommutator: $\{A, B\} = AB + BA$

$$
\begin{aligned}
E\psi &= \left(\alpha^k p^k + \beta m\right)\psi \\
\Rightarrow \quad E^2\psi &= \left(\alpha^k p^k + \beta m\right)\left(\alpha^\ell p^\ell + \beta m\right)\psi \\
&= \left(\alpha^k \alpha^\ell p^k p^\ell + (\alpha^k \beta + \beta \alpha^k) m p^k + \beta^2 m^2\right)\psi \\
&= \left(\frac{1}{2}\{\alpha^k, \alpha^\ell\} p^k p^\ell + \{\alpha^k, \beta\} m p^k + \beta^2 m^2\right)\psi
\end{aligned}
$$

Antikommutator: $\{A, B\} = AB + BA$

$$
\begin{aligned}
&\stackrel{!}{=} \left(\vec{p}^{\,2} + m^2\right)\psi \\
&= \left(\delta^{k\ell} p^k p^\ell + m^2\right)\psi
\end{aligned}
$$

$$E\psi = \left(\alpha^k p^k + \beta m\right)\psi$$

$$\Rightarrow \quad E^2\psi = \left(\alpha^k p^k + \beta m\right)\left(\alpha^\ell p^\ell + \beta m\right)\psi$$

$$= \left(\alpha^k \alpha^\ell p^k p^\ell + (\alpha^k \beta + \beta \alpha^k) m p^k + \beta^2 m^2\right)\psi$$

$$= \left(\frac{1}{2}\{\alpha^k, \alpha^\ell\} p^k p^\ell + \{\alpha^k, \beta\} m p^k + \beta^2 m^2\right)\psi$$

Antikommutator: $\{A, B\} = AB + BA$

$$\stackrel{!}{=} \left(\vec{p}^{\,2} + m^2\right)\psi$$

$$= \left(\delta^{k\ell} p^k p^\ell + m^2\right)\psi$$

$\Rightarrow$ α^k und β sind Matrizen mit $\{\alpha^k, \alpha^\ell\} = 2\delta^{k\ell}, \quad \{\alpha^k, \beta\} = 0, \quad \beta^2 = \mathbb{1}$.

- Eigenschaften:
  - i) H_D hermitesch $\Rightarrow$ α^k, β hermitesch
  - ii) $(\alpha^k)^2 = \beta^2 = \mathbb{1} \Rightarrow$ Eigenwerte ± 1
  - iii) Spur: $\mathrm{tr}\,\alpha^k = \mathrm{tr}\,\beta = 0$

    z.B.: $\mathrm{tr}\,\alpha^k = \mathrm{tr}\,[\alpha^k\beta\beta] \overset{\text{zykl.}}{=} \mathrm{tr}\,[\beta\alpha^k\beta] \overset{\{\alpha^k,\beta\}=0}{=} -\,\mathrm{tr}\,[\alpha^k\beta\beta] = -\mathrm{tr}\,\alpha^k$

- Eigenschaften:
  i) H_D hermitesch $\Rightarrow$ α^k, β hermitesch
  ii) $(\alpha^k)^2 = \beta^2 = \mathbb{1}$ $\Rightarrow$ Eigenwerte ± 1
  iii) Spur: $\mathrm{tr}\,\alpha^k = \mathrm{tr}\,\beta = 0$

  z.B.: $\mathrm{tr}\,\alpha^k = \mathrm{tr}\,[\alpha^k \beta\beta] \overset{\text{zykl.}}{=} \mathrm{tr}\,[\beta\alpha^k\beta] \overset{\{\alpha^k,\beta\}=0}{=} -\,\mathrm{tr}\,[\alpha^k\beta\beta] = -\mathrm{tr}\,\alpha^k$
- Zahl linear unabh. hermit. $n \times n$-Matrizen mit Spur 0: $n^2 - 1$ $\Rightarrow$ $n \geq 3$

- Eigenschaften:
  i) H_D hermitesch $\Rightarrow$ α^k, β hermitesch
  ii) $(\alpha^k)^2 = \beta^2 = \mathbb{1}$ $\Rightarrow$ Eigenwerte ± 1
  iii) Spur: $\mathrm{tr}\,\alpha^k = \mathrm{tr}\,\beta = 0$

  z.B.: $\mathrm{tr}\,\alpha^k = \mathrm{tr}\,[\alpha^k\beta\beta] \overset{\text{zykl.}}{=} \mathrm{tr}\,[\beta\alpha^k\beta] \overset{\{\alpha^k,\beta\}=0}{=} -\,\mathrm{tr}\,[\alpha^k\beta\beta] = -\mathrm{tr}\,\alpha^k$

- Zahl linear unabh. hermit. $n \times n$-Matrizen mit Spur 0: $n^2 - 1 \Rightarrow n \geq 3$

- Spur = $\sum$ Eigenwerte $\Rightarrow$ Dimension gerade

  $\Rightarrow$ kleinst-mögliche Dimension: $n = 4$

- Eigenschaften:
  - i) H_D hermitesch $\Rightarrow$ α^k, β hermitesch
  - ii) $(\alpha^k)^2 = \beta^2 = \mathbb{1}$ $\Rightarrow$ Eigenwerte ± 1
  - iii) Spur: $\mathrm{tr}\,\alpha^k = \mathrm{tr}\,\beta = 0$

    z.B.: $\mathrm{tr}\,\alpha^k = \mathrm{tr}\,[\alpha^k\beta\beta] \overset{\text{zykl.}}{=} \mathrm{tr}\,[\beta\alpha^k\beta] \overset{\{\alpha^k,\beta\}=0}{=} -\,\mathrm{tr}\,[\alpha^k\beta\beta] = -\mathrm{tr}\,\alpha^k$
- Zahl linear unabh. hermit. $n \times n$-Matrizen mit Spur 0: $n^2 - 1 \Rightarrow n \geq 3$
- Spur = $\sum$ Eigenwerte $\Rightarrow$ Dimension gerade

  $\Rightarrow$ kleinst-mögliche Dimension: $n = 4$

  $$\Rightarrow \psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \\ \psi_3(x) \\ \psi_4(x) \end{pmatrix}$$ "Dirac-Spinor"

- weitere Umformungen:

$$E\psi = \left(\alpha^k p^k + \beta m\right)\psi \quad \Rightarrow \quad \left(p^0 - \alpha^k p^k - \beta m\right)\psi = 0 \ , \quad p^0 \equiv E$$

$$\beta^2 = \mathbb{1} \quad \Rightarrow \quad \left(\beta p^0 - \beta\alpha^k p^k - m\right)\psi = 0$$

- weitere Umformungen:

$$E\psi = \left(\alpha^k p^k + \beta m\right)\psi \quad \Rightarrow \quad \left(p^0 - \alpha^k p^k - \beta m\right)\psi = 0 \;, \quad p^0 \equiv E$$

$$\beta^2 = \mathbb{1} \quad \Rightarrow \quad \left(\beta p^0 - \beta\alpha^k p^k - m\right)\psi = 0$$

Def.: $\gamma^0 \equiv \beta, \;\; \gamma^k \equiv \beta\alpha^k \quad \Rightarrow \quad \left(\gamma^\mu p_\mu - m\right)\psi = 0$

$$p_\mu = i\partial_\mu \quad \Rightarrow \quad \boxed{\left(i\gamma^\mu\partial_\mu - m\right)\psi = 0}$$

Dirac-Gleichung

- weitere Umformungen:

$$E\psi = \left(\alpha^k p^k + \beta m\right)\psi \quad \Rightarrow \quad \left(p^0 - \alpha^k p^k - \beta m\right)\psi = 0 \ , \quad p^0 \equiv E$$

$$\beta^2 = \mathbb{1} \quad \Rightarrow \quad \left(\beta p^0 - \beta\alpha^k p^k - m\right)\psi = 0$$

Def.: $\gamma^0 \equiv \beta, \ \ \gamma^k \equiv \beta\alpha^k \quad \Rightarrow \quad \left(\gamma^\mu p_\mu - m\right)\psi = 0$

$p_\mu = i\partial_\mu \quad \Rightarrow \quad \boxed{\left(i\gamma^\mu\partial_\mu - m\right)\psi = 0}$ Dirac-Gleichung

- Feynman-Slash: $\not{a} \equiv \gamma^\mu a_\mu \quad \Rightarrow \quad \boxed{\left(i\not{\partial} - m\right)\psi = 0}$

Eigenschaften der γ-Matrizen

- $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}\,\mathbb{1}$ definierende Anti-Vertauschungsrelation
  (folgt aus den Relationen für α^k und β)

$\Rightarrow \quad (\gamma^0)^2 = \mathbb{1}\,, \quad (\gamma^k)^2 = -\mathbb{1}$

Eigenschaften der γ-Matrizen

- $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}\,\mathbb{1}$ definierende Anti-Vertauschungsrelation (folgt aus den Relationen für α^k und β)

  $\Rightarrow \quad (\gamma^0)^2 = \mathbb{1}, \quad (\gamma^k)^2 = -\mathbb{1}$

- $(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0, \quad (\gamma^k)^\dagger = -\gamma^k \quad \Rightarrow \quad (\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0$

Eigenschaften der γ-Matrizen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}\,\mathbb{1}$ definierende Anti-Vertauschungsrelation (folgt aus den Relationen für α^k und β)

  $\Rightarrow \quad (\gamma^0)^2 = \mathbb{1}, \quad (\gamma^k)^2 = -\mathbb{1}$

- $(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0, \quad (\gamma^k)^\dagger = -\gamma^k \quad \Rightarrow \quad (\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0$

- “chirale Darstellung” (= “Weyl-Darst.”, wird in dieser Vorlesung verwendet):

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_2 \\ \mathbb{1}_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ -\sigma_k & 0 \end{pmatrix}$$

mit den Pauli-Matrizen

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Eigenschaften der γ-Matrizen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}\,\mathbb{1}$ definierende Anti-Vertauschungsrelation (folgt aus den Relationen für α^k und β)

  $\Rightarrow \quad (\gamma^0)^2 = \mathbb{1}, \quad (\gamma^k)^2 = -\mathbb{1}$

- $(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0, \quad (\gamma^k)^\dagger = -\gamma^k \quad \Rightarrow \quad (\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0$

- "chirale Darstellung" (= "Weyl-Darst.", wird in dieser Vorlesung verwendet):

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_2 \\ \mathbb{1}_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ -\sigma_k & 0 \end{pmatrix}$$

  mit den Pauli-Matrizen

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- Observable hängen nicht von der gewählten Darstellung ab!

Adjungierte Gleichung

- Dirac-Gleichung: $i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\psi = 0$

Adjungierte Gleichung

- Dirac-Gleichung: $i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\psi = 0$
- hermitesch adj. Gl.: $-i(\partial_\mu \psi)^\dagger (\gamma^\mu)^\dagger - m\psi^\dagger = 0$

Adjungierte Gleichung

- Dirac-Gleichung: $i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\psi = 0$
- hermitesch adj. Gl.: $-i(\partial_\mu \psi)^\dagger (\gamma^\mu)^\dagger - m\psi^\dagger = 0$
  - $\psi^\dagger = (\psi_1^*, \psi_2^*, \psi_3^*, \psi_4^*) \Rightarrow (\partial_\mu \psi)^\dagger = \partial_\mu \psi^\dagger$
  - $(\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0$

$$\Rightarrow \quad -i\partial_\mu \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 - m\psi^\dagger = 0$$

Adjungierte Gleichung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Dirac-Gleichung: $i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\psi = 0$
- hermitesch adj. Gl.: $-i(\partial_\mu \psi)^\dagger (\gamma^\mu)^\dagger - m\psi^\dagger = 0$
  - $\psi^\dagger = (\psi_1^*, \psi_2^*, \psi_3^*, \psi_4^*) \;\Rightarrow\; (\partial_\mu \psi)^\dagger = \partial_\mu \psi^\dagger$
  - $(\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0$

$$\Rightarrow \quad -i\partial_\mu \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 - m\psi^\dagger = 0$$

- $(\gamma^0)^2 = \mathbb{1}$

$$\Rightarrow \quad -i\partial_\mu \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu - m\psi^\dagger \gamma^0 = 0$$

Adjungierte Gleichung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Dirac-Gleichung: $i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\psi = 0$
- hermitesch adj. Gl.: $-i(\partial_\mu \psi)^\dagger (\gamma^\mu)^\dagger - m\psi^\dagger = 0$
  - $\psi^\dagger = (\psi_1^*, \psi_2^*, \psi_3^*, \psi_4^*) \;\Rightarrow\; (\partial_\mu \psi)^\dagger = \partial_\mu \psi^\dagger$
  - $(\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0$

$$\Rightarrow \quad -i\partial_\mu \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 - m\psi^\dagger = 0$$

  - $(\gamma^0)^2 = \mathbb{1}$

$$\Rightarrow \quad -i\partial_\mu \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu - m\psi^\dagger \gamma^0 = 0$$

- Def.: $\overline{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma^0$ "adjungierter Spinor"

$$\Rightarrow \quad \boxed{\overline{\psi}(\overleftarrow{\not\partial} - m) \equiv -i\partial_\mu \overline{\psi} \gamma^\mu - m\overline{\psi} = 0} \quad \text{"adjungierte Gleichung"}$$