

III. Das Dirac - Feld

III. 1 Die Dirac - Gleichung (historischer Zugang)

→ Folien

III. 2 Moderner Zugang zur Dirac - Gleichung: Lorentz - Transformationen und Spin

III. 2. 1 Lorentz - invariante Feldgleichungen

Wie zuvor die Klein - Gordon - Gleichung, wollen wir jetzt auch die Dirac - Gleichung nicht mehr als relativistische quantenmechanische Einteilchengleichung interpretieren, sondern als Gleichung für ein klassisches Feld, das wir später quantisieren werden. Zuerst wollen wir uns jedoch von einer allgemeineren Perspektive aus mit der Frage beschäftigen, welche Formen relativistische Feldgleichungen annehmen können.

Forderung:

Relativistische Feldgleichungen müssen forminvariant unter Lorentz - Transformationen sein, d.h. die Gleichungen für die transformierten Felder müssen genauso aussehen, wie die Gleichungen für die ursprünglichen Felder.

Beispiel:

Klein-Gordon-Gl.: $(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \phi(x) = 0$

Betrachte eine aktive Lorentz-Transformation des Feldes, so dass der ursprüngliche Wert $\phi(x)$ jetzt an der Stelle $x' = \Lambda x$ gemessen wird:

$$\phi'(x') = \phi(x) \quad \text{mit} \quad x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu$$

$$\Leftrightarrow \phi'(x) = \phi(\Lambda^{-1}x)$$

Forminvarianz der Klein-Gordon-Gl.:

$\phi'(x)$ erfüllt ebenfalls die KGG

$$\hookrightarrow \text{z.z.:} \quad (\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \phi'(x) = 0, \quad \text{falls } \phi(x) \text{ die KGG löst.}$$

Beweis:

$$\partial_\mu \phi'(x) = \partial_\mu \phi(\Lambda^{-1}x)$$

$$\stackrel{y = \Lambda^{-1}x}{=} \frac{\partial \phi}{\partial y^\sigma} \bigg|_{y = \Lambda^{-1}x} \underbrace{\frac{\partial y^\sigma}{\partial x^\mu}}$$

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} ((\Lambda^{-1})^\sigma_\lambda x^\lambda) = (\Lambda^{-1})^\sigma_\mu$$

$$= (\partial_\sigma \phi) |_{\Lambda^{-1}x} (\Lambda^{-1})^\sigma_\mu$$

$$\Rightarrow \partial_\mu \partial^\mu \phi'(x) = g^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \phi'(x)$$

$$= \underbrace{g^{\mu\nu} (\Lambda^{-1})^\sigma_\mu (\Lambda^{-1})^\rho_\nu}_{\text{inverse Lorentz-Transf. von } g^{\mu\nu}} (\partial_\sigma \partial_\rho \phi) |_{\Lambda^{-1}x}$$

inverse Lorentz-Transf. von $g^{\mu\nu}$

$$= g^{\sigma\rho}, \quad \text{da } (g^{\mu\nu}) \text{ forminvariant ist (vgl. Aufg. 2 d)}$$

$$\Rightarrow \partial_\mu \partial^\mu \phi'(x) = (\partial_\sigma \partial^\sigma \phi)|_{\Lambda^{-1}x}$$

$$\Rightarrow (\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \phi'(x) = (\partial_\mu \partial^\mu \phi + m^2 \phi)|_{\Lambda^{-1}x} = 0$$

da ϕ die KGG an jeder Stelle erfüllt ✓

Analog zeigt man für die Lagrange-Dichte:

$$\mathcal{L}(x) \rightarrow \mathcal{L}'(x) = \mathcal{L}(\Lambda^{-1}x) \quad (\rightarrow \text{Aufg. 3b)}$$

d.h. \mathcal{L} ist ein Skalarfeld

$$\Rightarrow S = \int d^4x \mathcal{L}(x) \quad \text{ist Lorentz-invariant.}$$

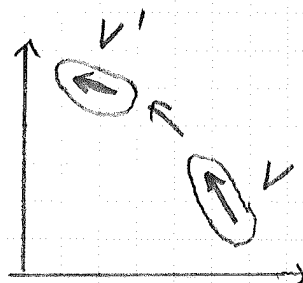
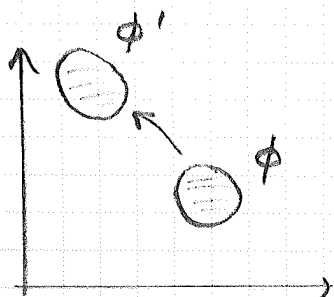
Bislang haben wir nur Skalarfelder betrachtet. Daneben kann es aber z. B. auch Vektorfelder oder Tensorfelder geben, deren Transformationsverhalten komplizierter ist:

Skalarfelder: $\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = \phi(\Lambda^{-1}x)$

Vektorfelder: $V^\mu(x) \rightarrow V'^\mu(x) = \Lambda^\mu_\nu V^\nu(\Lambda^{-1}x)$

Tensorfelder: $F^{\mu\nu}(x) \rightarrow F'^{\mu\nu}(x) = \Lambda^\mu_\sigma \Lambda^\nu_\tau F^{\sigma\tau}(\Lambda^{-1}x)$

anschaulich für Rotationen:



Wie verhalten sich Felder, die Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen beschreiben?

Allgemeines Ansatz für n -komponentige Felder Φ :

$$\Phi(x) \rightarrow \Phi'(x) = M(\Lambda) \Phi(\Lambda^{-1}x)$$

$M(\Lambda)$: $n \times n$ -Matrix

$$\Rightarrow \Phi_a(x) \rightarrow \Phi'_a(x) = M_{ab}(\Lambda) \Phi_b(\Lambda^{-1}x)$$

zwei hintereinander ausgeführte Lorentz-Transf.:

$$x' = \Lambda x, \quad x'' = \Lambda' x' = \Lambda' \Lambda x \equiv \Lambda'' x$$

$$\Phi' = M(\Lambda) \Phi, \quad \Phi'' = M(\Lambda') \Phi' = M(\Lambda') M(\Lambda) \Phi = M(\Lambda'') \Phi$$

$$\Rightarrow M(\Lambda'') = M(\Lambda') M(\Lambda), \quad \text{falls } \Lambda'' = \Lambda' \Lambda$$

\hookrightarrow M ist eine n -dimensionale Darstellung der Lorentz-Gruppe.

offensichtliche Lösungen:

$$n=1: \quad M=1 \quad (\text{„triviale Darstellung“})$$

$$\Rightarrow \Phi' = \Phi \quad \hat{=} \text{Skalarfeld}$$

$$n=4: \quad M=\Lambda \quad \Rightarrow \Phi' = \Lambda \Phi \quad \hat{=} \text{Vektorfeld}$$

(Im allen Fällen muss natürlich weiterhin das Argument x durch $\Lambda^{-1}x$ ersetzt werden, s.o.)

Wie sieht die Darstellung aus, die Spin- $\frac{1}{2}$ beschreibt?

III.2.2 Darstellungen der Rotationsgruppe

Wir betrachten zunächst den einfacheren Fall von Rotationen im 3-dim. Raum

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{x}' = R \vec{x}$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{x}'^2 = \vec{x}^2 \Rightarrow R^T = R^{-1} \\ \text{keine Spiegelung} \Rightarrow \det R = 1 \end{array} \right\} R \in SO(3)$$

Beispiel: Drehung um die z-Achse

$$R = R_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

infinitesimale Drehung:

$$R_z(\delta\theta) = \begin{pmatrix} 1 & -\delta\theta & 0 \\ \delta\theta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv \mathbb{1} - i \delta\theta J_z$$

mit dem „generator“ der Drehung

$$J_z = i \left. \frac{dR_z}{d\theta} \right|_{\theta=0} = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

↳ endl. Drehwinkel: $R_z(\theta) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\mathbb{1} - i \frac{\theta}{N} J_z \right)^N = \exp(-i \theta J_z)$

J_x, J_y analog

Vertauschungsrelationen („Lie-Algebra“):

$$(*) [J^i, J^j] = i \varepsilon^{ijk} J^k \quad (\text{mit } J^1 \equiv J_x \text{ etc.})$$

$\hat{=}$ Drehimpulse in der QM

Wellenfunktion:

$$\begin{aligned} \psi(R_2^{-1}(\delta\theta) \vec{x}) &= \psi(x + \delta\theta y, y - \delta\theta x, z) \\ &= \psi(\vec{x}) + \delta\theta \left(y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y} \right) \psi(\vec{x}) \\ &= (1 - i\delta\theta J_z) \psi(\vec{x}) \end{aligned}$$

$$\text{mit } J_z \equiv L_z = x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x}$$

(J_x, J_y analog.)

allgemeine Drehung:

$$R(\vec{\theta}) = R(\theta^1, \theta^2, \theta^3) = \exp(-i \theta^k J^k)$$

→ Die Generatoren und insbesondere ihre Lie-Algebra definieren die Gruppenstruktur der Drehgruppe.

⇒ n -dim Darstellung $\leftrightarrow J^k = n \times n$ -Matrizen mit (*)

QM: $n = 2j + 1$ mit j ganz- oder halb-zahlig
(folgt aus den Vertauschungsrelationen)

Spin $\frac{1}{2}$: $j = \frac{1}{2} \Rightarrow n = 2$

Generatoren: $J^k = \frac{\sigma^k}{2}$, σ^k : Pauli-Matrizen

$$[\sigma^i, \sigma^j] = 2i \varepsilon^{ijk} \sigma^k \Rightarrow [J^i, J^j] = i \varepsilon^{ijk} J^k \quad \checkmark$$

Gruppenelemente:

$$U(\vec{\theta}) = \exp\left(-i \theta^k \frac{\sigma^k}{2}\right)$$

σ^1, σ^2 reell $\Rightarrow U$ komplex

$$\left. \begin{array}{l} U^\dagger U = \mathbb{1} \\ \det U = 1 \end{array} \right\} U \in SU(2)$$

($SU(2)$ und $SO(3)$ haben dieselbe Lie-Algebra)

Felder = Pauli-Spinoren $\vec{\xi}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \xi_1(\vec{x}) \\ \xi_2(\vec{x}) \end{pmatrix}$

Transformationsverhalten unter Rotationen:

$$\vec{\xi}(\vec{x}) \rightarrow \vec{\xi}'(\vec{x}') = U \vec{\xi}(R^{-1}\vec{x})$$

III. 2.3 Darstellungen der Lorentz-Gruppe

Lorentz-Boost entlang der x -Achse:

$$t' = \gamma (t + vx) \quad ; \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}, \quad v = \frac{v}{c} \equiv \beta$$

$$x' = \gamma (x + vt)$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$