Energiespektrum des Klein-Gordon-Feldes

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

→ Behandle jede Impulsmode analog zum qm. harmonischen Oszillator:

- $\phi(\vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3)} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{p}}}} \left(a_{\vec{p}}\, e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} + a^\dagger_{\vec{p}}\, e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} \right)$
- $\pi(\vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3)} (-i) \sqrt{\frac{\omega_{\vec{p}}}{2}} \left(a_{\vec{p}}\, e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} - a^\dagger_{\vec{p}}\, e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} \right)$
- Leiteroperatoren: $[a_{\vec{p}}, a^\dagger_{\vec{p}\,'}] = (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{p}\,')$, $[a_{\vec{p}}, a_{\vec{p}\,'}] = [a^\dagger_{\vec{p}}, a^\dagger_{\vec{p}\,'}] = 0$

Energiespektrum des Klein-Gordon-Feldes

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

→ Behandle jede Impulsmode analog zum qm. harmonischen Oszillator:

- $\phi(\vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3)} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{p}}}} \left(a_{\vec{p}}\, e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} + a^\dagger_{\vec{p}}\, e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} \right)$
- $\pi(\vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3)} (-i) \sqrt{\frac{\omega_{\vec{p}}}{2}} \left(a_{\vec{p}}\, e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} - a^\dagger_{\vec{p}}\, e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} \right)$
- Leiteroperatoren: $[a_{\vec{p}}, a^\dagger_{\vec{p}\,'}] = (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{p}\,')$, $[a_{\vec{p}}, a_{\vec{p}\,'}] = [a^\dagger_{\vec{p}}, a^\dagger_{\vec{p}\,'}] = 0$

- Hamiltonoperator: $H = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3)} \omega_{\vec{p}} \left(a^\dagger_{\vec{p}} a_{\vec{p}} + const. \right)$
  - $const. = \frac{1}{2}[a_{\vec{p}}, a^\dagger_{\vec{p}}] = \frac{1}{2} (2\pi)^3 \delta^3(\vec{0}) \rightarrow$ unendliche Vakuumenergie
    nicht messbare Konstante $\Rightarrow$ kann weggelassen werden

Energiespektrum des Klein-Gordon-Feldes

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

→ Behandle jede Impulsmode analog zum qm. harmonischen Oszillator:

- $\phi(\vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3)} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{p}}}} \left(a_{\vec{p}}\, e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} + a^\dagger_{\vec{p}}\, e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} \right)$
- $\pi(\vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3)} (-i) \sqrt{\frac{\omega_{\vec{p}}}{2}} \left(a_{\vec{p}}\, e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} - a^\dagger_{\vec{p}}\, e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} \right)$
- Leiteroperatoren: $[a_{\vec{p}}, a^\dagger_{\vec{p}\,'}] = (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{p}\,')$, $[a_{\vec{p}}, a_{\vec{p}\,'}] = [a^\dagger_{\vec{p}}, a^\dagger_{\vec{p}\,'}] = 0$

- Hamiltonoperator: $H = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3)} \omega_{\vec{p}} \left(a^\dagger_{\vec{p}} a_{\vec{p}} + const. \right)$
  - $const. = \frac{1}{2}[a_{\vec{p}}, a^\dagger_{\vec{p}}] = \frac{1}{2} (2\pi)^3 \delta^3(\vec{0}) \rightarrow$ unendliche Vakuumenergie
    nicht messbare Konstante $\Rightarrow$ kann weggelassen werden
  - Grundzustand (= Vakuum): $a_{\vec{p}} |0\rangle = 0 \;\forall \vec{p} \;\Rightarrow\; H|0\rangle = 0$

Energiespektrum des Klein-Gordon-Feldes

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

→ Behandle jede Impulsmode analog zum qm. harmonischen Oszillator:

- $\phi(\vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3)} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{p}}}} \left(a_{\vec{p}}\, e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} + a^\dagger_{\vec{p}}\, e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} \right)$
- $\pi(\vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3)} (-i) \sqrt{\frac{\omega_{\vec{p}}}{2}} \left(a_{\vec{p}}\, e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} - a^\dagger_{\vec{p}}\, e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} \right)$
- Leiteroperatoren: $[a_{\vec{p}}, a^\dagger_{\vec{p}\,'}] = (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{p}\,')$, $[a_{\vec{p}}, a_{\vec{p}\,'}] = [a^\dagger_{\vec{p}}, a^\dagger_{\vec{p}\,'}] = 0$

- Hamiltonoperator: $H = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3)} \omega_{\vec{p}} \left(a^\dagger_{\vec{p}} a_{\vec{p}} + const. \right)$
  - $const. = \frac{1}{2}[a_{\vec{p}}, a^\dagger_{\vec{p}}] = \frac{1}{2} (2\pi)^3\, \delta^3(\vec{0}) \rightarrow$ unendliche Vakuumenergie
    nicht messbare Konstante $\Rightarrow$ kann weggelassen werden
  - Grundzustand (= Vakuum): $a_{\vec{p}}\, |0\rangle = 0\ \forall \vec{p} \Rightarrow H\, |0\rangle = 0$
  - angeregte Zustände: $a^\dagger_{\vec{p}_1}\, a^\dagger_{\vec{p}_2} \ldots |0\rangle$

Energiespektrum des Klein-Gordon-Feldes

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

→ Behandle jede Impulsmode analog zum qm. harmonischen Oszillator:

- $\phi(\vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3)} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{p}}}} \left(a_{\vec{p}}\, e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} + a^\dagger_{\vec{p}}\, e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} \right)$
- $\pi(\vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3)} (-i) \sqrt{\frac{\omega_{\vec{p}}}{2}} \left(a_{\vec{p}}\, e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} - a^\dagger_{\vec{p}}\, e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} \right)$
- Leiteroperatoren: $[a_{\vec{p}}, a^\dagger_{\vec{p}\,'}] = (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p} - \vec{p}\,')$, $[a_{\vec{p}}, a_{\vec{p}\,'}] = [a^\dagger_{\vec{p}}, a^\dagger_{\vec{p}\,'}] = 0$

- Hamiltonoperator: $H = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3)} \omega_{\vec{p}} \left(a^\dagger_{\vec{p}} a_{\vec{p}} + const. \right)$
  - $const. = \frac{1}{2}[a_{\vec{p}}, a^\dagger_{\vec{p}}] = \frac{1}{2} (2\pi)^3 \delta^3(\vec{0}) \rightarrow$ unendliche Vakuumenergie
    nicht messbare Konstante $\Rightarrow$ kann weggelassen werden
  - Grundzustand (= Vakuum): $a_{\vec{p}} |0\rangle = 0 \;\forall \vec{p} \;\Rightarrow\; H|0\rangle = 0$
  - angeregte Zustände: $H\, a^\dagger_{\vec{p}_1} a^\dagger_{\vec{p}_2} \ldots |0\rangle = (\omega_{\vec{p}_1} + \omega_{\vec{p}_2} + \ldots)\, a^\dagger_{\vec{p}_1} a^\dagger_{\vec{p}_2} \ldots |0\rangle$

Impulsspektrum und Teilcheninterpretation

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Gesamtimpulsoperator: $\vec{P} = -\int d^3x\, \pi(\vec{x})\, \vec{\nabla}\phi(\vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3)}\, \vec{p}\, a^\dagger_{\vec{p}} a_{\vec{p}}$

Impulsspektrum und Teilcheninterpretation

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Gesamtimpulsoperator: $\vec{P} = -\int d^3x\, \pi(\vec{x})\, \vec{\nabla}\phi(\vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3)}\, \vec{p}\, a^\dagger_{\vec{p}} a_{\vec{p}}$

  $\Rightarrow \quad \vec{P}\, a^\dagger_{\vec{p}}|0\rangle = \vec{p}\, a^\dagger_{\vec{p}}|0\rangle, \qquad \vec{P}\, a^\dagger_{\vec{p}_1}\, a^\dagger_{\vec{p}_2} \ldots |0\rangle = (\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \ldots)\, a^\dagger_{\vec{p}_1}\, a^\dagger_{\vec{p}_2} \ldots |0\rangle$

Impulsspektrum und Teilcheninterpretation

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Gesamtimpulsoperator: $\vec{P} = -\int d^3x\, \pi(\vec{x})\, \vec{\nabla}\phi(\vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3)}\, \vec{p}\, a^\dagger_{\vec{p}} a_{\vec{p}}$

  $\Rightarrow \quad \vec{P}\, a^\dagger_{\vec{p}}|0\rangle = \vec{p}\, a^\dagger_{\vec{p}}|0\rangle, \qquad \vec{P}\, a^\dagger_{\vec{p}_1} a^\dagger_{\vec{p}_2} \dots |0\rangle = (\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \dots)\, a^\dagger_{\vec{p}_1} a^\dagger_{\vec{p}_2} \dots |0\rangle$

- Interpretation:
  - $a^\dagger_{\vec{p}}$ erzeugt Teilchen mit Impuls $\vec{p}$ und Energie $E_{\vec{p}} = \sqrt{\vec{p}^{\,2} + m^2}$.

Impulsspektrum und Teilcheninterpretation

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Gesamtimpulsoperator: $\vec{P} = -\int d^3x\, \pi(\vec{x})\, \vec{\nabla}\phi(\vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3)}\, \vec{p}\, a^\dagger_{\vec{p}} a_{\vec{p}}$

  $\Rightarrow\ \vec{P}\, a^\dagger_{\vec{p}}|0\rangle = \vec{p}\, a^\dagger_{\vec{p}}|0\rangle, \quad \vec{P}\, a^\dagger_{\vec{p}_1}\, a^\dagger_{\vec{p}_2} \dots |0\rangle = (\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \dots)\, a^\dagger_{\vec{p}_1}\, a^\dagger_{\vec{p}_2} \dots |0\rangle$

- Interpretation:
  - $a^\dagger_{\vec{p}}$ erzeugt Teilchen mit Impuls $\vec{p}$ und Energie $E_{\vec{p}} = \sqrt{\vec{p}^{\,2} + m^2}$.
  - $a^\dagger_{\vec{p}} a^\dagger_{\vec{q}} \dots |0\rangle = a^\dagger_{\vec{q}} a^\dagger_{\vec{p}} \dots |0\rangle \quad \Rightarrow$ Die Teilchen gehorchen der Bose-Statistik.

Impulsspektrum und Teilcheninterpretation

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Gesamtimpulsoperator: $\vec{P} = -\int d^3x\, \pi(\vec{x})\, \vec{\nabla}\phi(\vec{x}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3)}\, \vec{p}\, a^\dagger_{\vec{p}} a_{\vec{p}}$

  $\Rightarrow\ \vec{P}\, a^\dagger_{\vec{p}}|0\rangle = \vec{p}\, a^\dagger_{\vec{p}}|0\rangle, \quad \vec{P}\, a^\dagger_{\vec{p}_1}\, a^\dagger_{\vec{p}_2} \ldots |0\rangle = (\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \ldots)\, a^\dagger_{\vec{p}_1}\, a^\dagger_{\vec{p}_2} \ldots |0\rangle$

- Interpretation:
  - $a^\dagger_{\vec{p}}$ erzeugt Teilchen mit Impuls $\vec{p}$ und Energie $E_{\vec{p}} = \sqrt{\vec{p}^{\,2} + m^2}$.
  - $a^\dagger_{\vec{p}} a^\dagger_{\vec{q}} \ldots |0\rangle = a^\dagger_{\vec{q}} a^\dagger_{\vec{p}} \ldots |0\rangle \quad \Rightarrow$ Die Teilchen gehorchen der Bose-Statistik.
  - $\langle \vec{p}|\phi(\vec{x})|0\rangle = e^{-i\vec{p}\cdot\vec{x}} \quad \rightarrow \quad \phi(\vec{x})$ erzeugt ein Teilchen am Ort $\vec{x}$.