Spinor-Transformationen

- Antisymmetrischer Tensor für Boosts und Rotationen:
  - $$(J^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -K_x & -K_y & -K_z \\ K_x & 0 & J_z & -J_y \\ K_y & -J_z & 0 & J_x \\ K_z & J_y & -J_x & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} K^k = -J^{0k} = J^{k0} \\ J^{ij} = \epsilon^{ijk} J^k \end{array}$$
  - $\phi^k = \omega_{0k} = -\omega_{k0}, \quad \omega_{ij} = \epsilon^{ijk}\theta^k$

$$\Rightarrow \; x \; \to \; \Lambda x \; = \; \exp[-i(\vec{J}\cdot\vec{\theta} - \vec{K}\cdot\vec{\phi})]x \; = \; \exp[-\tfrac{i}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu}]x$$

Spinor-Transformationen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Antisymmetrischer Tensor für Boosts und Rotationen:
  - $(J^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -K_x & -K_y & -K_z \\ K_x & 0 & J_z & -J_y \\ K_y & -J_z & 0 & J_x \\ K_z & J_y & -J_x & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} K^k &= -J^{0k} = J^{k0} \\ J^{ij} &= \epsilon^{ijk} J^k \end{aligned}$
  - $\phi^k = \omega_{0k} = -\omega_{k0}, \quad \omega_{ij} = \epsilon^{ijk}\theta^k$

$$\Rightarrow \; x \;\to\; \Lambda x \;=\; \exp[-i(\vec{J}\cdot\vec{\theta} - \vec{K}\cdot\vec{\phi})]x \;=\; \exp[-\tfrac{i}{2}\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu}]x$$

- Lorentz-Algebra: $[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] = i(g^{\nu\rho}J^{\mu\sigma} - g^{\mu\rho}J^{\nu\sigma} - g^{\nu\sigma}J^{\mu\rho} + g^{\mu\sigma}J^{\nu\rho})$
  - wird erfüllt von $S^{\mu\nu} = \frac{i}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$, sofern $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$

$\to$ Spinor-Transformation: $\psi \;\to\; \Lambda_{\frac{1}{2}}\psi \;=\; \exp[-\tfrac{i}{2}\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu}]\psi$

Spinor-Transformationen

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

- wichtige Relationen:
  - $\Lambda_{\frac{1}{2}}^{-1} \gamma^\alpha \Lambda_{\frac{1}{2}} = \Lambda^\alpha{}_\beta \gamma^\beta$
  - $\gamma^0 \Lambda_{\frac{1}{2}}^\dagger \gamma^0 = \Lambda_{\frac{1}{2}}^{-1}$

Spinor-Transformationen

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

- wichtige Relationen:
  - $\Lambda_{\frac{1}{2}}^{-1}\gamma^{\alpha}\Lambda_{\frac{1}{2}} = \Lambda^{\alpha}_{\ \beta}\gamma^{\beta}$
  - $\gamma^{0}\Lambda_{\frac{1}{2}}^{\dagger}\gamma^{0} = \Lambda_{\frac{1}{2}}^{-1}$

$\rightarrow$ Lorentz-Invarianz der Dirac Gleichung:

$$
\begin{aligned}
(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m)\,\psi'(x) &= (i\gamma^{\mu}\tfrac{\partial}{\partial x^{\mu}} - m)\,\Lambda_{\frac{1}{2}}\psi(\Lambda^{-1}x) \\
&= \Lambda_{\frac{1}{2}}\,(i\gamma^{\sigma}\tfrac{\partial}{\partial y^{\sigma}} - m)\psi(y)\Big|_{y=\Lambda^{-1}x} = 0
\end{aligned}
$$

Spinor-Transformationen

- wichtige Relationen:
  - $\Lambda_{\frac{1}{2}}^{-1} \gamma^\alpha \Lambda_{\frac{1}{2}} = \Lambda^\alpha_{\ \beta} \gamma^\beta$
  - $\gamma^0 \Lambda_{\frac{1}{2}}^\dagger \gamma^0 = \Lambda_{\frac{1}{2}}^{-1}$

$\rightarrow$ Lorentz-Invarianz der Dirac Gleichung:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\,\psi'(x) = (i\gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} - m)\,\Lambda_{\frac{1}{2}} \psi(\Lambda^{-1}x)$$
$$= \Lambda_{\frac{1}{2}}\ (i\gamma^\sigma \frac{\partial}{\partial y^\sigma} - m)\psi(y)\Big|_{y=\Lambda^{-1}x} = 0$$

- adjungierter Spinor: $\overline{\psi}(x) = \psi^\dagger(x)\gamma^0 \ \rightarrow\ \overline{\psi}(\Lambda^{-1}x)\,\Lambda_{\frac{1}{2}}^{-1}$
  - $\overline{\psi}(x)\psi(x) \ \rightarrow\ \overline{\psi}(\Lambda^{-1}x)\psi(\Lambda^{-1}x)$ Lorentz-Skalar
  - $\overline{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x) \ \rightarrow\ \Lambda^\mu_{\ \nu}\,\overline{\psi}(\Lambda^{-1}x)\gamma^\nu\psi(\Lambda^{-1}x)$ Lorentz-Vektor

Lösungen der freien Dirac-Gleichung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Lösungsansätze:
  - positive Frequenz: $\psi_+(x) = u(\vec{p})\, e^{-ip\cdot x} \quad \Rightarrow \quad (\not{p} - m)u(\vec{p}) = 0$
  - negative Frequenz: $\psi_-(x) = v(\vec{p})\, e^{ip\cdot x} \quad \Rightarrow \quad (\not{p} + m)v(\vec{p}) = 0$

Lösungen der freien Dirac-Gleichung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Lösungsansätze:
  - positive Frequenz: $\psi_+(x) = u(\vec{p})\, e^{-ip\cdot x} \quad \Rightarrow \quad (\not{p} - m)u(\vec{p}) = 0$
  - negative Frequenz: $\psi_-(x) = v(\vec{p})\, e^{ip\cdot x} \quad \Rightarrow \quad (\not{p} + m)v(\vec{p}) = 0$
- Lösungen positiver Frequenz:
  - Ruhesystem: $u(\vec{0}) = \mathcal{N} \begin{pmatrix} \xi \\ \xi \end{pmatrix}$
    - $\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$ 2-komponentiger Spinor
    - $\mathcal{N} = \sqrt{m}$ Normierungsfaktor

Lösungen der freien Dirac-Gleichung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Lösungsansätze:
  - positive Frequenz: $\psi_+(x) = u(\vec{p})\, e^{-ip\cdot x} \quad \Rightarrow \quad (\not{p} - m)u(\vec{p}) = 0$
  - negative Frequenz: $\psi_-(x) = v(\vec{p})\, e^{ip\cdot x} \quad \Rightarrow \quad (\not{p} + m)v(\vec{p}) = 0$
- Lösungen positiver Frequenz:
  - Ruhesystem: $u(\vec{0}) = \mathcal{N} \begin{pmatrix} \xi \\ \xi \end{pmatrix}$
    - $\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$ 2-komponentiger Spinor
    - $\mathcal{N} = \sqrt{m}$ Normierungsfaktor
  - geboostet: $u(\vec{p}) = \frac{1}{\sqrt{2(E+m)}} \begin{pmatrix} [E + m - \vec{\sigma}\cdot\vec{p}]\xi \\ [E + m + \vec{\sigma}\cdot\vec{p}]\xi \end{pmatrix}$