Rechenmethoden

Priv.-Doz. Dr. M. Buballa
M. Schramm

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2016
1. Übungsblatt 13./15. April 2016

Aufgabe P1:

Finden Sie eine Näherungsform für die Funktion

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}}$$

im Bereich kleiner $|x|$, indem Sie sie bis zur ersten Ordnung Taylor-entwickeln.
Vergleichen Sie die Näherungsformel bei $x = 0.1$, $x = 0.2$ und $x = 0.5$ mit den exakten Ergebnissen.

Aufgabe P2:

a) Entwickeln Sie die folgenden Funktionen in eine Taylor-Reihe um $x = 0$ (exakt!)

$$\text{(i) } e^x \qquad \text{(ii) } \sin x \qquad \text{(iii) } \cos x$$

b) Die in a) berechneten Reihendarstellungen gelten auch für komplexe x. Benutzen Sie diese, um die Richtigkeit der Eulerschen Formel

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

zu zeigen.

Aufgabe P3:

Betrachten Sie die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{1-x}.$$

a) Entwickeln Sie die Funktion bis zu beliebiger Ordnung um den Entwicklungspunkt $x = 0$

b) Brechen Sie die Entwicklung bei der Ordnung x^n ab und berechnen Sie das entsprechende Restglied $R_n(x)$. Für welche x konvergiert die Reihe im Limes $n \to \infty$?

Aufgabe P4:

Gegeben sei das Polynom

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x.$$

a) Entwickeln Sie $f(x)$ vollständig um einen beliebigen Punkt x_0. Überprüfen Sie anschließend durch explizites Ausmultiplizieren die Richtigkeit des Ergebnisses.

b) Bestimmen Sie die Stelle, an der $f(x)$ ein lokales Minimum besitzt und verwenden Sie diese Stelle als Entwicklungspunkt x_0 der Entwicklung von Aufgabe a).

c) Brechen Sie die Entwicklung um das lokale Minimum nach dem quadratischen Term ab und stellen Sie das Ergebnis zusammen mit der exakten Funktion grafisch dar.

- Abgabe der Hausübungen bis zum 27./29. April in den Übungen -

Aufgabe H1: (5 Punkte)

Finden Sie eine Näherungsformel für die folgenden Funktionen im Bereich kleiner $|x|$, indem Sie sie bis zur ersten Ordnung Taylor-entwickeln

a) $\frac{1}{1+x}$

b) $\tan(x)$

c) $\ln(1+x)$

Vergleichen Sie jeweils die Näherungsformel bei $x = 0.1$, $x = 0.2$ und $x = 0.5$ mit den exakten Ergebnissen.

Aufgabe H2: (5 Punkte)

Die potenzielle Energie eines zweiatomigen Moleküls kann mit guter Genauigkeit durch das Potenzial

$$V(r) = D\left(1 - e^{-a(r-r_0)}\right)^2$$

beschrieben werden. Dabei sind D, a und r_0 charakteristische Konstanten des Moleküls, r bezeichnet den Abstand zwischen den beiden Atomen.

a) Bestimmen Sie das Minimum r_{min} des Potenzials und entwickeln Sie V bis zur quadratischen Ordnung um r_{min}.

b) Zeichnen Sie das exakte und das genäherte Potenzial für der Fall $a = 1/r_0$ im Bereich $0 \leq r \leq 3r_0$.

Aufgabe H3: (3 Punkte)

In der Relativitätstheorie wird die Gesamtenergie durch die bekannte Formel $E = mc^2$ beschrieben. Hierbei ist m die bewegte Masse. Wollen wir die Formel durch die Ruhemasse m_0 und die Geschwindigkeit v ausdrücken, lautet sie

$$E(v) = m_0 c^2 \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}},$$

mit der Lichtgeschwindigkeit c.
Entwickeln Sie die Funktion bis zur zweiten Ordnung um $x = v/c = 0$. Was ist die physikalische Bedeutung der Terme?

Aufgabe H4: (2 Punkte)

Betrachten Sie die Funktion

$$f(x) = (a+x)^n$$

mit einem ganzzahlingen Exponenten $n > 0$.
Geben Sie eine allgemeine Taylor-Entwicklung um den Entwicklungspunkt $x = 0$ an.
Hinweis: $n(n-1)\ldots(n-k+1) = n!/(n-k)!$