Rechenmethoden

Priv.-Doz. Dr. M. Buballa
M. Schramm

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2016
11. Übungsblatt 22./24. Juni 2016

Aufgabe P28:

Zur Berechnung von Flächenintegralen ist es oft günstig, die Fläche, über die integriert werden soll, als Teil einer Koordinatenfläche in einem geeigneten (i.A. krummlinigen) Koordinatensystem aufzufassen. Die Fläche lässt such dann in der Form

$$F: \quad u_1, u_2 \to \vec{r}_F(u_1, u_2) \equiv \vec{r}(u_1, u_2, u_3 = c_3)$$

parametrisieren, wobei u_1, u_2 und u_3 die Koordinaten sind und c_3 eine Konstante. Hier haben wir O.B.d.A. u_3 als die in der Koordinatenfläche konstant gehaltene Koordinate gewählt. Die orientierten Flächenelemente sind dann durch

$$d\vec{\sigma}_F = \pm \frac{\partial \vec{r}_F}{\partial u_1} \times \frac{\partial \vec{r}_F}{\partial u_2} du_1 du_2$$

gegeben, wobei das Vorzeichen üblicher Weise so gewählt wird, dass $d\vec{\sigma}_F$ für geschlossene Flächen nach außen zeigt.

a) Bestimmen Sie in einem geeigneten Koordinatensystem die orientierten Flächenelemente der Mantel- und Stirnfläche eines Zylinders mit Radius a und Höhe b.

b) Berechnen Sie mit Hilfe der Ergebnisse von Aufgabe a) die Oberfläche $A_F = \int_S |d\vec{\sigma}_F|$ des Zylinders.

Aufgabe P29:

Für beliebige Koordinatensysteme mit den Koordinaten u_1, u_2 und u_3 ist das Volumenelement durch das Spatprodukt

$$dV = \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1} \cdot \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_3} \right) \right| du_1 du_2 du_3$$

gegeben.

a) Bestimmen Sie das Volumenelement in Zylinderkoordinaten und berechnen Sie das Volumen eines Zylinders mit Radius a und Höhe b.

b) Bestimmen Sie das Volumenelement in Kugelkoordinaten und berechnen Sie das Volumen einer Kugel mit Radius R.

Aufgabe H31: (3 Punkte)

Berechnen Sie:

a)

$$\int_0^a dx \int_0^b dy \int_0^c dz\, xyz$$

b)

$$\int_0^a dx \int_0^x dy \int_0^y dz\, e^{-z}$$

Aufgabe H32: (3 Punkte)

Die θ-Funktion ist durch

$$\theta(s) = \begin{cases} 1 & \text{für } s \geq 0 \\ 0 & \text{für } s < 0 \end{cases}$$

definiert. Berechnen Sie

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} dz\, x^2 \theta(a-x)\theta(a+x)\theta(a-x-y)\theta(a+x+y)\theta(a-x-y-z)\theta(a+x+y+z).$$

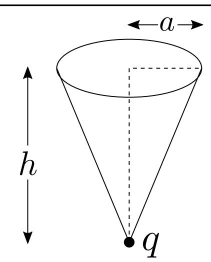
Überlegen Sie sich dazu, in welchen Bereichen die θ-Funktionen den Integranden zum verschwinden bringen und ersetzen Sie alle θ-Funktionen durch entsprechent gewählte Integrationsgrenzen.

Aufgabe H33: (9 Punkte)

Gegeben sei ein auf der Spitze stehender Kegel mit Höhe h und Radius a an der Stirnfläche (siehe Abbildung). In der Spitze des Zylinders (= Koordinatenursprung) befinde sich eine Punktladung q, die ein elektrisches Feld

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$$

erzeugt.



a) Bestimmen Sie in einem geeigneten Koordinatensystem das orientierte Flächenelement für den Kegelmantel und berechnen Sie die Fläche des Kegelmantels.

b) Berechnen Sie den elektrischen Fluss

$$\Phi = \int_S d\vec{\sigma} \cdot \vec{E}(\vec{r})$$

durch die Stirnfläche des Kegels.
(Welche Koordinaten eignen sich hierfür am besten?)
Wie groß ist der elektrische Fluss durch die Mantelfläche, wenn man die Spitze des Kegels dabei ausschließt?

c) Berechnen Sie das Volumen des Kegels.