Rechenmethoden

Priv.-Doz. Dr. M. Buballa
M. Schramm

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2016
12. Übungsblatt 29. Juni / 1. Juli 2016

Aufgabe P30:

Gegeben sei das Vektorfeld $\vec{F}(\vec{r}) = xy^2\vec{e}_x + yz^2\vec{e}_y + zx^2\vec{e}_z$. Berechnen Sie den Fluss

$$\oint_S d\vec{\sigma} \cdot \vec{F}(\vec{r})$$

des Vektorfeldes durch die geschlossene Oberfläche $S = \partial V$ einer Kugel mit Radius R um den Ursprung

a) durch Berechnung des Oberflächenintegrals.
Hinweis: $\int_0^{2\pi} d\varphi \cos^2\varphi \sin^2\varphi = \frac{\pi}{4}$

b) mit Hilfe des Gauß'schen Satzes.

Aufgabe P31:

Gegeben sei das Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r}) = f_0 \cdot (y\vec{e}_x - x\vec{e}_y)$. Berechnen Sie die entlang eines in der xy-Ebene gelegenen Kreises mit Radius R um die z-Achse geleistete Arbeit

$$\oint_C d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r})$$

a) durch direkte Berechnung des Linienintegrals.

b) mit Hilfe des Stokes'schen Satzes durch durch die Integration über eine Kreisscheibe in der xy-Ebene.

c) Der Stokes'sche Satz gilt für beliebige Flächen, die durch den Weg C begrenzt werden. Berechnen Sie die Arbeit alternativ durch die Integration über die Oberfläche einer Halbkugel mit Radius R um den Ursprung.

Aufgabe P32:

Seien $\phi(\vec{r})$ ein skalares Feld, $\vec{V}(\vec{r})$ ein Vektorfeld und S eine Fläche mit Rand ∂S.

a) Zeigen Sie, dass gilt

$$\oint_{\partial S} d\vec{r}\, \phi(\vec{r}) = \int_S (d\vec{\sigma} \times \vec{\nabla})\phi(\vec{r}).$$

Hinweis: Setzen Sie $\vec{V}(\vec{r}) = \phi\vec{e}_i$ und verwenden Sie den Stokes'schen Satz.

b) Folgern Sie aus a), dass gilt

$$\oint_{\partial S} d\vec{r} \times \vec{V}(\vec{r}) = \int_S (d\vec{\sigma} \times \vec{\nabla}) \times \vec{V}(\vec{r}).$$

Aufgabe H34: (3 Punkte)

Ein Kraftfeld $\vec{F}(\vec{r})$ heißt konservativ, wenn das geschlossene Linienintegral $\oint_C d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r})$ für *alle* Wege C verschwindet.
Nach dem Stokes'schen Satz

$$\oint_{\partial S} d\vec{r} \cdot \vec{F}(\vec{r}) = \int_S d\vec{\sigma} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}))$$

sind genau dann alle geschlossenen Wegintegrale über $\vec{F}(\vec{r})$ gleich null, wenn $\vec{\nabla} \times \vec{F}$ überall verschwindet:

$$\vec{F}(\vec{r}) \text{ konservativ} \Leftrightarrow \vec{\nabla} \times \vec{F}(\vec{r}) = 0 \ \forall \vec{r}.$$

Weche der folgenden Kraftfelder sind konservativ?

a) $\vec{F}(\vec{r}) = x^n \vec{e}_x + y^n \vec{e}_y + z^n \vec{e}_z$,

b) $\vec{F}(\vec{r}) = z^n \vec{e}_x + x^n \vec{e}_y + y^n \vec{e}_z$,

c) $\vec{F}(\vec{r}) = e^x \sin y \vec{e}_x + e^x \cos y \vec{e}_y$.

Aufgabe H35: (4 Punkte)

Sei $\mathcal{V}$ ein Volumen mit Oberfläche $\partial\mathcal{V}$ und Volumeninhalt V. Ferner sei S eine *ebene* Fläche mit Rand ∂S, Normaleneinheitsvektor $\vec{n}$ und Flächeninhalt A.
Berechnen Sie

a) $\oint_{\partial\mathcal{V}} d\vec{\sigma} \cdot \vec{r}$.

b) $\oint_{\partial S} d\vec{r} \times \vec{r}$.

c) $\oint_{\partial S} d\vec{r} \cdot \vec{r}$.

Aufgabe H36: (3 Punkte)

Berechnen Sie das Flächenintegral

$$\oint_S d\vec{\sigma} \cdot \frac{\vec{r}}{r^{n+1}}, \qquad n > 2,$$

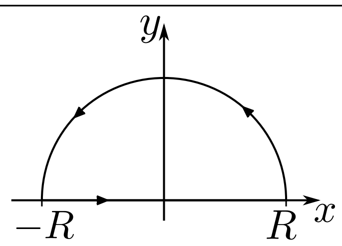
über die Oberfläche einer Kugel mit Radius R um den Ursprung

a) durch Berechnung des Flächenintegrals.

b) mit Hilfe des Gauß'schen Satzes.

Aufgabe H37: (5 Punkte)

Gegeben sei ein Vektorfeld $\vec{V}(\vec{r}) = \vec{\omega} \times \vec{r}$, wobei $\vec{\omega}$ ein konstanter Vektor ist.
Berechnen Sie $\oint_C d\vec{r} \cdot \vec{V}(\vec{r})$ für den in der Abbildung skizzierten Weg in der xy-Ebene



a) durch Berechnung des Linienintegrals.

b) mit Hilfe des Stokes'schen Satzes.

Hinweis: Für zwei Vektorfelder $\vec{A}$ und $\vec{B}$ gilt
$\vec{\nabla} \times (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{A}(\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - (\vec{A} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} - \vec{B}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{A}$.