

# Rechenmethoden

Priv.-Doz. Dr. M. Buballa  
M. Schramm



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
DARMSTADT

Sommersemester 2016

14. Übungsblatt

13./15. Juli 2016

## Aufgabe P35:

Ein an einer Feder befestigtes Teilchen mit Masse  $m$  bewegt sich unter dem Einfluss der auf es wirkenden Kraft  $F$  in  $z$ -Richtung. Die Kraft  $F$  setzt sich aus der Rückstellkraft der Feder (proportional zur Auslenkung  $z$ ) und der Reibungskraft (proportional zur Geschwindigkeit  $\dot{z}$ ) zusammen

$$F = -kz - \beta\dot{z}, \quad k, \beta > 0.$$

- a) Wie lautet die Bewegungsgleichung, d.h. die Differenzialgleichung, die die Bewegung des Teilchens beschreibt? Bringen Sie diese Gleichung auf die Standard-Form

$$\ddot{z} + p\dot{z} + qz = 0.$$

- b) Wie in der Vorlesung gezeigt wurde, ist die Wronski-Determinante der Differenzialgleichung bis auf einen irrelevanten Proportionalitätsfaktor durch

$$W(t) = e^{-\int_{t_0}^t dt' p(t')}$$

gegeben. Dabei können wir  $t_0 = 0$  setzen, da der Unterschied zu einem beliebigen  $t_0$  ebenfalls nur ein konstanter Faktor ist. Berechnen Sie  $W(t)$ .

- c) Führen Sie die Differenzialgleichung mittels eines Exponentialansatzes in eine quadratische Gleichung über und lösen Sie diese.
- d) Betrachten Sie zuerst den Fall, dass die quadratische Gleichung zwei *unterschiedliche* Lösungen besitzt. Geben Sie für diesen Fall die allgemeine Lösung  $z(t)$  an. Welche Fälle kann man dabei unterscheiden?
- e) Wenn die beiden Lösungen der quadratischen Gleichung aus c) identisch sind, liefert der Exponentialansatz nur eine Lösung  $z_1(t)$  der Differenzialgleichung. Berechnen Sie für diesen Fall eine zweite linear unabhängige Lösung  $z_2(t)$  mit Hilfe der in der Vorlesung hergeleiteten Formel

$$z_2(t) = z_1(t) \int_{t_0}^t dt' \frac{W(t')}{z_1^2(t')}$$

(wieder bei  $t_0 = 0$ ), geben Sie die allgemeine Lösung  $z(t)$  an und überprüfen Sie, dass diese die Differenzialgleichung erfüllt.