Rechenmethoden

Priv.-Doz. Dr. M. Buballa
M. Schramm

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2016
2. Übungsblatt 20./22. April 2016

Aufgabe P5:

Seien

$$\vec{a} = \sum_{i=1}^{3} a_i \vec{e}_i, \qquad \vec{b} = \sum_{i=1}^{3} b_i \vec{e}_i, \qquad \text{etc.}$$

beliebige dreidimensionale Vektoren. Für Skalarprodukte und Vektorprodukte der kartesischen Einheitsvektoren $\vec{e}_i$ sind aus der Vorlesung die folgenden Relationen bekannt

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij} \qquad \text{und} \qquad \vec{e}_i \times \vec{e}_j = \sum_k \epsilon_{ijk} \vec{e}_k.$$

Dabei sind das *Kroneckersymbol* δ_{ij} und der ϵ*-Tensor* wie folgt definiert

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \qquad \epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{falls } (i,j,k) = \text{ zykl. Vertauschung von } (1,2,3) \\ -1 & \text{falls } (i,j,k) = \text{ antizykl. Vertauschung von } (1,2,3) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

a) Geben Sie die Werte der folgenden Größen an: δ_{33}, δ_{21}, ϵ_{123}, ϵ_{121}, ϵ_{213}, ϵ_{312}, ϵ_{333}.

b) Drücken Sie die folgenden Größen durch ϵ_{ijk} aus: ϵ_{jik}, ϵ_{kji}, ϵ_{kij}, ϵ_{ikj}, ϵ_{jki}.

c) Berechnen Sie

$$\text{i)} \quad \delta_{ij}\epsilon_{ijk}, \qquad \text{ii)} \quad \sum_{ij} a_i a_j \epsilon_{ijk}.$$

d) Leiten Sie aus den Beziehungen für die Einheitsvektoren die Komponentendarstellungen der Produkte $\vec{a} \cdot \vec{b}$ und $\vec{a} \times \vec{b}$ her.

e) Drücken Sie die Summe $\sum_k \epsilon_{ijk}\epsilon_{mnk}$ durch Produkte von Kroneckersymbolen aus.
Hinweis: Was muss für i und j gelten, damit es überhaupt ein nichtverschwindendes ϵ_{ijk} gibt? Unter welchen Umständen verschwindet dann ϵ_{mnk} auch nicht?

f) Zeigen Sie unter Verwendung der in e) gefundenen Relation:

$$\text{i)} \quad \vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \vec{b}(\vec{a} \cdot c) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}),$$
$$\text{ii)} \quad \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c}).$$

Aufgabe P6:

Es seien $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ und $\vec{e}_3$ die Einheitsvektoren einer beliebigen Orthonormalbasis im dreidimensionalem Raum. In dieser Basis werden die beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ wie folgt definiert

$$\vec{a} = 3\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 - 5\vec{e}_3$$
$$\vec{b} = -1\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 6\vec{e}_3.$$

Berechnen Sie:

a) Die Länge von $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

b) Die Summe $\vec{a}+\vec{b}$ und die Differenz $\vec{b}-\vec{a}$.

c) Das Skalarprodukt $\vec{a}\cdot\vec{b}$.

d) Den Winkel zwischen den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

Aufgabe H5: (2 Punkte)

Seien $i, j, m, n \in \{1,2,3\}$. Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke

a) $\sum_i \delta_{ij}\delta_{im}$

b) $\sum_{ij} \delta_{ij}\epsilon_{ijm}$

c) $\sum_{ijm} \epsilon_{ijm}\epsilon_{ijm}$

d) $\sum_{jm} \epsilon_{ijm}\epsilon_{jmn}$

Aufgabe H6: (3 Punkte)

Betrachten Sie die folgenden Vektoren

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}, \qquad \vec{b}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \qquad \vec{c}=\begin{pmatrix}5\\8\\5\end{pmatrix}, \qquad \vec{d}=\begin{pmatrix}4\\7\\5\end{pmatrix}.$$

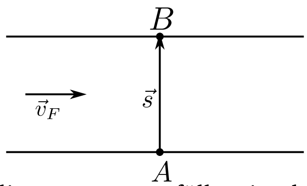
a) Berechnen Sie den Winkel zwischen den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$, sowie den Winkel zwischen $\vec{c}$ und $\vec{d}$.

b) Bestimmen Sie die Fläche des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms.

c) Berechnen Sie die Fläche eines Dreiecks, dass $\vec{c}$ und $\vec{d}$ als Seitenvektoren hat.

Aufgabe H7: (5 Punkte)

Ein Schwimmer möchte einen Fluss der Breite s überqueren und dabei vom Punkt A zum gegenüberliegenden Punkt B gelangen (s. Skizze). Der Fluss strömt mit einer Geschwindigkeit $v_F = |\vec{v}_F|$ genau senkrecht zur Verbindunglinie $\vec{s} = \overrightarrow{AB}$. Die Geschwindigkeit des Schwimmers *relativ zum Wasser* beträgt $v_S = |\vec{v}_S|$. Der Schwimmer versucht, entlang der direkten Verbindunglinie von A nach B zu gelangen.



Um welchen Winkel muss der Vektor $\vec{v}_S$ dazu von der Richtung $\vec{s}$ abweichen? Welche Bedingung muss erfüllt sein, damit dies überhaupt möglich ist?

Aufgabe H8: (5 Punkte)

Gegeben seien die Vektoren $\vec{a} = (1,1,0)$ und $\vec{b} = (3,-1,0)$.

a) Bestimmen Sie alle Vektoren $\vec{x}$ die zu den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ orthogonal sind.

b) Bestimmen Sie alle Vektoren $\vec{x}$ die mit $\vec{a}$ einen Winkel von 90° und $\vec{b}$ einen Winkel von 60° einschließen.