Rechenmethoden

Priv.-Doz. Dr. M. Buballa
M. Schramm

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2016
3. Übungsblatt 27./29. April 2016

Aufgabe P7:

Berechnen Sie jeweils AB und BA, wenn dies möglich ist

a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

b)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

c)

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe P8:

Das Produkt zweier Matrizen ist nicht zwangsläufig kommutativ. Eine Größe die dieses Verhalten wiederspiegelt ist der *Kommutator*, der wie folgt definiert ist

$$[A, B] = AB - BA.$$

Verschwindet der Kommutator, so spricht man von kommutierenden Matrizen.

a) Welche Eigenschaften müssen zwei Matrizen A und B haben, damit der Kommutator eine sinvoll definierte Größe ist?

b) Berechnen Sie, sofern möglich, die Kommutatoren der folgenden Matrizen

i)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

ii)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 & -1 \\ 8 & -2 & 6 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

iii)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -6 \\ -9 & 8 & 3 \\ 0 & -4 & -5 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe P9:

In der Vorlesung wurden die Drehmatrizen in zwei Dimensionen gegeben als

$$R(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die Drehung der folgenden Vektoren um den angegeben Winkel α und machen Sie sich die Drehung zeichnerisch klar

$$\text{i) } \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix},\ \alpha = 60^\circ \quad \text{ii) } \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix},\ \alpha = 90^\circ \quad \text{iii) } \vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},\ \alpha$$

b) Machen Sie sich anhand a) iii) klar, dass sich die Länge eines Vektors durch Drehung nicht ändert.

c) Die Eigenschaft, dass Drehmatrizen Längen von Vektoren erhalten nennt man *Orthogonalität*. Eine Matrix O heißt orthogonal, falls sie multipliziert mit ihrer Transponierten O^T die Einheitsmatrix $\mathbb{1}$ ergibt, also

$$O^T O = \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass die Drehmatrix diese Eigenschaften erfüllt.

Hinweis:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

Aufgabe H9: (2 Punkte)

Berechnen Sie

a) $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 7 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$

b) $\left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \right]$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & \cos\alpha & 0 \\ \cos\alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sin\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \lambda & 0 \\ \lambda & 0 & \lambda \\ 0 & \lambda & 0 \end{pmatrix}$

Aufgabe H10: (5 Punkte)

a) Zeigen Sie die folgenden Beziehungen für den Kommutator

$$\begin{aligned} [A,B] &= -[B,A], \\ [\lambda A,B] &= \lambda[A,B], \qquad \lambda \in \mathbb{R}, \\ [A+B,C] &= [A,C]+[B,C], \\ [AB,C] &= [A,C]B + A[B,C]. \end{aligned}$$

b) Beweisen Sie die Jacobi-Identität

$$[A,[B,C]] + [B,[C,A]] + [C,[A,B]] = 0.$$

Aufgabe H11: (7 Punkte)

Die Drehmatrizen in drei Dimensionen um die drei Achsen sind gegeben als

$$R_x(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \quad R_y(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & \sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix}, \quad R_z = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die Drehungen der folgenden Vektoren

$$\text{i)} \quad R_z(60^\circ)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{ii)} \quad R_x(90^\circ)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{iii)} \quad R_y(30^\circ)R_x(30^\circ)\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) Zeigen Sie, dass zwei hintereinander ausgeführte Drehungen eines allgemeinen Vektors $\vec{x}$ zunächst mit einen Winkel α um die x-Achse und dann mit einem Winkel β um die x-Achse einer Drehung mit dem Winkel $\gamma = \alpha + \beta$ entsprechen.

c) Zeigen Sie, dass Drehungen nacheinander um zwei verschiedene Achsen nicht kommutieren. Hierbei genügt es zu betrachten wie sich Drehungen um zwei der Achsen verhalten.
Hinweis: Verwenden Sie die Additionstheoreme für Sinus und Cosinus

$$\begin{aligned} \sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\alpha \\ \cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \end{aligned}$$