Rechenmethoden

Priv.-Doz. Dr. M. Buballa
M. Schramm

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2016
4. Übungsblatt 4./6. Mai 2016

Aufgabe P10:

Berechnen Sie die Determinante, Adjunkte und Inverse der Matrix A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe P11:

Um die Determinanten von 3x3 Matrizen zu berechnen, gibt es eine geschlossene Formel, die *Regel von Sarrus*. Hierzu addiert man die Produkte der Hauptdiagonalen (unten in durchgezogenene Linien) und substrahiert die Produkte der Nebendiagonalen (unten gestrichelte Linien).

$$\begin{array}{ccc:cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

Zeigen Sie mit dem Laplace'schen Entwicklungssatz, dass dieses Vorgehen auf die richtige Lösung führt.

Aufgabe P12:

Ein weiteres Verfahren die Inverse einer Matrix zu berechnen ist das *Gauß-Jordan Verfahren*. Anstatt die Inverse über Adjunkte und Determinante zu bestimmen, verwendet man ein Verfahren, das dem Lösen eines Gleichungssystems ähnelt. Für eine Beispiel-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \tag{1}$$

mit nichtverschwindender Determinante $\det A \neq 0$ ist die Inverse definiert als

$$A \cdot A^{-1} = \mathbb{1}.$$

Dies schreiben wir

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{12} & \bar{a}_{13} \\ \bar{a}_{21} & \bar{a}_{22} & \bar{a}_{23} \\ \bar{a}_{31} & \bar{a}_{32} & \bar{a}_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

wobei wir die Inverse als

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{12} & \bar{a}_{13} \\ \bar{a}_{21} & \bar{a}_{22} & \bar{a}_{23} \\ \bar{a}_{31} & \bar{a}_{32} & \bar{a}_{33} \end{pmatrix} \tag{2}$$

geschrieben haben. Dies definiert ein lineares Gleichungssystem mti 9 Gleichungen und 9 Unbekannten

$$
\begin{aligned}
\overline{a}_{11} & & -\overline{a}_{31} &= 1\\
-2\overline{a}_{11} & +\overline{a}_{21} & &= 0\\
\overline{a}_{11} & -\overline{a}_{21} & +2\overline{a}_{31} &= 0,\\[1ex]
\overline{a}_{12} & & -\overline{a}_{32} &= 0\\
-2\overline{a}_{12} & +\overline{a}_{22} & &= 1\\
\overline{a}_{12} & -\overline{a}_{22} & +2\overline{a}_{32} &= 0,\\[1ex]
\overline{a}_{13} & & -\overline{a}_{33} &= 0\\
-2\overline{a}_{13} & +\overline{a}_{23} & &= 0\\
\overline{a}_{13} & -\overline{a}_{23} & +2\overline{a}_{33} &= 1,
\end{aligned}
$$

das sich kompakt schreiben lässt

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0\\ -2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

In dem linken Block steht nun also die Matrix A bzw. die linke Seite des zu lösenden Gleichungssystems und in den Spalten des rechten Blocks stehen die rechten Seiten des Gleichungssystems.
Um nun die Koeffizienten $\overline{a}_{11}, \overline{a}_{12}, \ldots$ und damit die Inverse A^{-1} zu bestimmen, wenden wir folgende Äquivalenzumformungen auf (1) an, die die Lösungen des Gleichungssystems unverändert lassen, die Gleichung (1) aber in die Form

$$\mathbb{1} \cdot A^{-1} = A^{-1} \tag{3}$$

bringen:

1. Multiplikation aller Elemente einer Zeile der Matrix A und gleichzeitig der Matrix $\mathbb{1}$ mit einem Skalar λ.
2. Vertauschen zweier Zeilen von A und gleichzeitig von $\mathbb{1}$.
3. Addition zweier Zeilen von A und gleichzeitig von $\mathbb{1}$.

Es bietet sich bei diesem Verfahren an, systematisch vorzugehen und beispielsweise zunächst die erste Spalte, danach die zweite Spalte usw. von A auf die Form der Einheitsmatrix zu bringen.

a) Führen Sie diese Operationen so lange durch, bis die Matrix A auf der linken Seite von (1) in die Einheitsmatrix und die rechte Seite der Gleichung von der Einheitsmatrix $\mathbb{1}$ in die Inverse von A transformiert ist (vergleiche (3)). Zeigen Sie, dass

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1\\ 4 & 3 & 2\\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

gilt.

b) Überprüfen Sie, ob die Matrizen B und C invertierbar sind und bestimmen Sie ihre Inverse, falls möglich.

$$B = \begin{pmatrix} 6 & 9\\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1\\ 4 & 0 & -1\\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Überprüfen Sie außerdem mittels (1), ob Sie richtig gerechnet haben.

Aufgabe P13:

Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der folgenden Matrizen

a)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

b)

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1\\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe H12: (2 Punkte)

Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & -2 & 4 \\ 3 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe H13: (5 Punkte)

Eine weitere Möglichkeit die Eigenwerte λ einer Matrix A bei bekannten Eigenvektoren $\vec{v}_\lambda$ zu berechenen ist über

$$\lambda = \frac{\vec{v}_\lambda^T A \vec{v}_\lambda}{\vec{v}_\lambda^T \vec{v}_\lambda}. \tag{5}$$

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

auf dem in der Vorlesung angebebenen Weg.

b) Überprüfen Sie die Gleichung (5) für die in a) gefundenen Eigenvektoren.

Aufgabe H14: (2 Punkte)

Bestimmen Sie den Vektor $\vec{x}$

$$\begin{pmatrix} -3 & -2 & -2 \\ 3 & 3 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe H15: (6 Punkte)

Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 3 \\ -5 & -5 & 0 \\ -4 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Überprüfen Sie mit diesen Matrizen die folgenden Eigenschaften für Determinanten

a) $\det(A \cdot B) = \det(A)\det(B)$.

b) $\det(B^{-1}) = (\det(B))^{-1}$.

c) $\det(rA) = r^n \det(A)$, mit $r \in \mathbb{R}$.

d) $\det(A) = \det(A^T)$.