Rechenmethoden

Priv.-Doz. Dr. M. Buballa
M. Schramm

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2016
6. Übungsblatt — 18./20. Mai 2016

Aufgabe P17:

Bestimmen Sie die Taylor-Entwicklung bis zur zweiten Ordnung der folgenden Funktionen

a) $f(x) = e^{x \log x}$, mit Entwicklungspunkt $x_0 = 1$.

b) $f(x) = \sqrt[3]{2x+2}$, mit Entwicklungspunkt $x_0 = 3$.

c) $f(x) = \sin(\pi x^2)$, mit Entwicklungspunkt $x_0 = 1$.

Aufgabe P18:

Die *Spur* einer Matrix ist definiert als die Summe ihrer Diagonalelemente, d.h.

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_i A_{ii}.$$

Gegeben seien die Matrizen A und B mit $\lambda \in \mathbb{R}$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & -7 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1-\lambda^2 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie $A + B$ und AB für $\lambda = 1$.

b) Für welche Werte von λ wird $\mathrm{tr}(AB) = 0$?

c) Zeigen Sie, dass $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$ für alle λ.

Aufgabe P19:

Für eine Taylorentwicklung einer Funktion $f(\vec{r})$ um einen Entwicklungspunkt $\vec{a}$ kann man in erster Ordnung ansetzen

$$T_f(\vec{r}) = f(\vec{a}) + \left(\vec{\nabla} f(\vec{a})\right) \cdot (\vec{r} - \vec{a}) + \cdots$$

Berechnen Sie die Taylorentwicklung zur ersten Ordnung der folgenden Funktionen um Entwicklungspunkte $\vec{a}$

a)

$$f(\vec{r}) = \exp(\vec{r} \cdot \vec{r}), \qquad \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

b)

$$f(\vec{r}) = \sin(qx)\sin(qy)\cos(qz), \qquad \vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ \pi/(2q) \\ \pi/q \end{pmatrix}, \quad q \in \mathbb{R}.$$

c)

$$f(\vec{r}) = x^2 + y^2 + z^2, \qquad \vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe H18: (7 Punkte)

Gegeben Sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix.

b) Zeigen Sie für diese Matrix, dass man mit Hilfe der Formel

$$U^{-1}AU = D$$

die Diagonalmatrix D mit nur den Eigenwerten auf der Diagonalen erhält. U ist hierbei die Matrix, die die Eigenvektoren als Spalten enthält.

c) Zeigen Sie, dass für diese Matrix gilt

$$\mathrm{tr}A = \mathrm{tr}D$$

und

$$\det A = \det D.$$

Aufgabe H19: (8 Punkte)

Die Eckpunkte eines gleichmäßigen Tetraeders seien durch den Ursprung P_1 eines kartesischen Koordinatensystems und die Endpunkte P_2, P_3 und P_4 der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ gegeben, die alle eine Länge a besitzen und paarweise den Winkel $\varphi = 60°$ einschließen. Dabei verlaufe $\vec{a}$ parallel zur x-Achse und $\vec{b}$ in der $x-y$-Ebene.

a) Bestimmen Sie die daraus folgenden Koordinaten der vier Eckpunkte und skizzieren Sie den Tetraeder.

b) Berechnen Sie für jede der vier Begrenzungsflächen des Tetraeders den Einheitsvektor, der senkrecht auf ihr steht und nach außen zeigt (*Normaleneinheitsvektor*).

c) Wie groß ist die Oberfläche des Tetraeders?