Rechenmethoden

Priv.-Doz. Dr. M. Buballa
M. Schramm

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2016
7. Übungsblatt 25./27. Mai 2016

Aufgabe P20:

a) Berechnen Sie die Divergenz und Rotation der folgenden Vektorfelder

$$\vec{A}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} 4x^2 + 8xy + z \\ 4x^2 + y \\ xz + yz + z^2 \end{pmatrix}, \qquad \vec{B}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} y^2 + z^2 \\ y^2 + z^2 \\ xyz \end{pmatrix}, \qquad \vec{C}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} yz - 12xy \\ xz - 8yz^2 \\ xy - 12y^2z^2 \end{pmatrix}.$$

b) Wie müssen Sie die Parameter a und b wählen, damit die Rotation des Vektorfelds

$$\vec{A}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} 2xz^2 + y^3z \\ axy^2z \\ 2x^2z + bxy^3 \end{pmatrix}$$

überall verschwindet?

Aufgabe P21:

Seien $\phi(\vec{r})$ ein skalares Feld und $\vec{A}(\vec{r})$ ein Vektorfeld. Beide Felder seien beliebig oft partiell differenzierbar. Zeigen Sie die folgenden Identitäten

a) $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\phi = 0$

b) $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0$

c) $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \Delta\vec{A}$

Hinweis: Verwenden Sie den ε-Tensor.

Aufgabe P22:

a) Ein allgemeines Zentralkraftfeld besitzt die Form $\vec{F}(\vec{r}) = f(r)\vec{r}$. Zeigen Sie, dass

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 3f(r) + r\frac{\partial f}{\partial r}(r) \qquad \text{und} \qquad \vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{0}.$$

b) Verifizieren Sie die Ergebnisse aus a) explizit am Beispiel des Gravitationskraftfeldes

$$\vec{F}(\vec{r}) = -G\frac{mM}{r^3}\vec{r}, \qquad \vec{r} \neq \vec{0}.$$

Aufgabe H20: (3 Punkte)

Sei

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{\mathscr{E}} e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}+\varphi)}$$

ein komplexes Vektorfeld. Dabei sind φ und der Vektor $\vec{k}$ reelle Konstanten, der Vektor $\vec{\mathscr{E}}$ ist eine komplexe Konstante. Berechnen Sie div$\vec{E}$, rot$\vec{E}$ und $\Delta\vec{E}$. Drücken Sie die Ergebnisse so weit wie möglich durch Vektor- oder Skalarprodukte aus, die aus $\vec{k}$ und $\vec{E}(\vec{r})$ gebildet werden.

Aufgabe H21: (7 Punkte)

Seien $\phi(\vec{r})$ und $\psi(\vec{r})$ zwei skalare Felder.

a) Zeigen Sie die folgenden Identitäten
   i) $\vec{\nabla}(\phi\psi) = \psi\vec{\nabla}\phi + \phi\vec{\nabla}\psi$
   ii) $\vec{\nabla}\cdot(\phi\vec{\nabla}\psi) = (\vec{\nabla}\phi)\cdot(\vec{\nabla}\psi) + \phi\Delta\psi$
   iii) $\Delta(\phi\psi) = \psi\Delta\phi + \phi\Delta\psi + 2(\vec{\nabla}\phi)\cdot(\vec{\nabla}\psi)$

b) Seien nun $\phi(\vec{r}) = r$ und $\psi(\vec{r}) = \frac{1}{r}$. Überprüfen Sie die drei Identitäten aus a), indem Sie die einzelnen Terme explizit ausrechnen. Beschränken Sie sich dabei auf $\vec{r} \neq \vec{0}$, da ψ am Ort $\vec{r} = 0$ nicht differenzierbar ist.

Aufgabe H22: (5 Punkte)

Das elektrostatische Potential einer Punktladung q werde durch die Funktion

$$\phi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^{-\alpha r}}{r}, \qquad \alpha > 0$$

beschrieben, mit der elektrischen Feldkonstanten $\epsilon_0 > 0$.

a) Berechnen Sie das zugehörige elektrische Feld

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\phi(\vec{r})$$

für $\vec{r} \neq \vec{0}$.

b) Für die Ladungsdichte ρ am Ort $\vec{r}$ gilt der Zusammenhang

$$\rho(\vec{r}) = \epsilon_0\vec{\nabla}\cdot\vec{E}(\vec{r}).$$

Berechnen Sie die Ladungsdichte für $\vec{r} \neq \vec{0}$.