Rechenmethoden

Priv.-Doz. Dr. M. Buballa
M. Schramm

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2016
9. Übungsblatt 8./10. Juni 2016

Aufgabe P24:

a) Drücken Sie den Ortsvektor $\vec{r}$ mit Hilfe der Kugelkoordinaten r, θ und φ, sowie der zugehörigen Basisvektoren $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$ und $\vec{e}_\varphi$ aus.

b) Seien nun $r(t)$, $\theta(t)$ und $\varphi(t)$ zeitabhängige Funktionen. Berechnen Sie die Zeitableitungen von $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$ und $\vec{e}_\varphi$ und schreiben Sie die Ergebnisse wieder als Linearkombination von $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$ und $\vec{e}_\varphi$.

c) Wie lauten der Geschwindigkeitsvektor $\dot{\vec{r}}$ und der Beschleunigungsvektor $\ddot{\vec{r}}$ in Kugelkoordinaten?

d) Betrachten Sie nun den Spezialfall eines Teilchens, das sich in der xy-Ebene entlang einer Kreisbahn mit Radius R um den Ursprung bewegt. Was bedeutet das für die Kugelkoordinaten dieses Teilchens? Wie vereinfacht sich dadurch der Geschwindigkeitsvektor? Bestimmen Sie für diesen Fall den Beschleunigungsvektor $\ddot{\vec{r}}$ in Kugelkoordinaten.

Aufgabe P25:

Drücken Sie die Vektorfelder

$$\text{i)}\quad \vec{F}(\vec{r}) = \alpha\vec{r}, \qquad \text{ii)}\quad \vec{G}(\vec{r}) = \frac{\omega}{r}\vec{e}_z \times \vec{r}, \qquad \text{iii)}\quad \vec{H}(\vec{r}) = \alpha(x+y)\vec{e}_x + \alpha(y-x)\vec{e}_y.$$

durch Zylinderkoordinaten und durch Kugelkoordinaten (einschließlich der entsprechenden Basisvektoren) aus.

Aufgabe P26:

Seien $\vec{V}$ ein Vektorfeld und u und v beliebige krummlinige Koordinaten.
Zeigen Sie, dass

$$\left(\vec{e}_u \frac{\partial}{\partial v}\right) \times \vec{V} = \vec{e}_u \times \frac{\partial \vec{V}}{\partial v}.$$

Stellen Sie dazu die verschiedenen Vektoren in einer kartesischen Basis dar und verwenden Sie die Relation $\vec{a} \times \vec{b} = \varepsilon_{ijk} a_i b_j \vec{e}_k$, die in der kartesischen Basis gilt.

Aufgabe H26: (15 Punkte)

In der Vorlesung wurden Gradient und Rotation in allgemeiner Form für beliebige orthogonale krummlinige Koordinatensysteme hergeleitet. Die Divergenz wird in der nächsten Woche behandelt. In der folgenden Aufgabe soll dies noch einmal auf etwas andere Weise für den konkreten Fall der Zylinderkoordinaten durchgefüht werden.

a) Drücken Sie mit Hilfe der Kettenregel die kartesischen Operatoren $\frac{\partial}{\partial x}$ und $\frac{\partial}{\partial y}$ durch Zylinderkoordinaten aus.
Hinweis: $\frac{d}{du} \arctan u = \frac{1}{1+u^2}$

b) Leiten Sie daraus einen Ausdruck für den Gradienten in Zylinderkoordinaten her. Stellen Sie dazu $\vec{\nabla} f$ zunächst in kartesischen Koordinate dar und ersetzen Sie die partiellen Ableitungen und Einheitsvektoren durch die entsprechenden Ausdrücke in Zylinderkoordinaten.

c) Sei nun $\vec{V} = V_\rho \vec{e}_\rho + V_\varphi \vec{e}_\varphi + V_z \vec{e}_z$ ein Vektorfeld mit den Zylinderkomponenten V_ρ, V_φ und V_z. Verwenden Sie die in b) hergeleitete Form des Nabla-Operators, um einen Ausdruck für die Divergenz von $\vec{V}$ in Zylinderkoordinaten zu finden.
Vorsicht! Warum ist die Divergenz nicht einfach $\sum_i \nabla_{u_i} V_{u_i}$ für $\{u_i\} = \{\rho, \varphi, z\}$?

d) Berechnen Sie in analoger Weise $rot\vec{V}$ in Zylinderkoordinaten.
Hinweis: Nutzen Sie den Satz $\left(\vec{e}_u \frac{\partial}{\partial v}\right) \times \vec{V} = \vec{e}_u \times \frac{\partial \vec{V}}{\partial v}$ aus Aufgabe P26.

e) Leiten Sie die Formeln für den Gradienten und die Rotation in Zylinderkoordinaten zum Vergleich noch einmal aus den allgemeinen Ausdrücken aus der Vorlesung her.