
Das Drei-Flavour Nambu–Jona-Lasinio Modell

The three-flavour Nambu–Jona-Lasinio model

Bachelor-Thesis von Dominic Kraatz

November 2013



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Fachbereich Physik
Institut für Kernphysik
Nuclei, Hadrons and Quarks

Das Drei-Flavour Nambu–Jona-Lasinio Modell
The three-flavour Nambu–Jona-Lasinio model

Vorgelegte Bachelor-Thesis von Dominic Kraatz

1. Gutachten: Priv. Doz. Dr. Michael Buballa
2. Gutachten: Prof. Dr. Jochen Wambach

Tag der Einreichung:

Erklärung zur Bachelor-Thesis

Hiermit versichere ich, die vorliegende Bachelor-Thesis ohne Hilfe Dritter nur mit den angegebenen Quellen und Hilfsmitteln angefertigt zu haben. Alle Stellen, die aus Quellen entnommen wurden, sind als solche kenntlich gemacht. Diese Arbeit hat in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner Prüfungsbehörde vorgelegen.

Darmstadt, den 08. November 2013

(Dominic Kraatz)

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	4
2	Lagrangedichte der QCD	5
3	Symmetrien der QCD	6
4	Nambu–Jona-Lasinio Modell der Quantenchromodynamik	7
5	Die Gap-Gleichung im NJL-Modell	9
5.1	Das Integral I_1	10
5.2	Pauli-Villars-Regularisierung	12
5.3	Vier-Punkt Wechselwirkung	13
5.4	Sechs-Punkt Wechselwirkung	16
6	Mesonenspektrum	24
6.1	Vier-Punkt Wechselwirkung	25
6.1.1	Alternative Darstellung der Streumatrix und effektive Meson-Quark Kopplung . . .	30
6.1.2	Erlaubte Zerfallskanäle und Zerfallskonstanten	31
6.1.3	Parametersätze für die Vier-Punkt Wechselwirkung	35
6.2	Sechs-Punkt Wechselwirkung	37
7	Zusammenfassung und Ausblick	39
8	Anhang	40
A	Verwendete Konventionen	41
B	Mesonen	43
B.1	Polarisationschleife der Pionen	43
B.2	Polarisationschleife der Kaonen	45
B.3	Bestimmung der Pionzerfallskonstante	46
B.4	Bestimmung der Kaonzerfallskonstante	47
C	Bestimmung des Integrals I_2 und I_3	48

Zusammenfassung

Das Ziel dieser Arbeit ist die Ausarbeitung eines neuen Parametersatzes für das Nambu–Jona-Lasinio (NJL) Modell der QCD im Drei-Flavour-Fall. Zu Beginn wird das NJL-Modell auf Quarkebene untersucht und die effektiven Massen der Quarks, in Form von Gap-Gleichungen, abgeleitet. Im Anschluss werden die Resonanzzustände der Quark–Anti-Quark Streuung mit den Mesonen identifiziert. Hieraus lassen sich anschließend die Massen und Zerfallskonstanten der Pionen und Kaonen errechnen und an experimentelle Werte anpassen. Darüberhinaus werden einige Aspekte der chiralen Symmetrie für die Mesonen, wie das Goldstone-Theorem, verifiziert werden.

Abstract

The goal of this work is to work out a new parameter set for the three-flavour Nambu–Jona-Lasinio model of QCD. At first the NJL-model will be analysed for the quarks, which leads to the gap-equations. These can be used to calculate the effective masses of the quarks. After that the mesons will be identified as the resonance states of the quark–anti-quark scattering. With this, it is possible to calculate the masses and decay constants of the pion and kaon. Then they will be fitted to experimental values to create a parameter set. Furthermore some aspects of the chiral symmetry for the mesons will be analysed, like the Goldstone-theorem.

1 Einleitung

Die Quantenchromodynamik (QCD) beschreibt die Wechselwirkung von Quarks, also den Bausteinen von Nukleonen, durch den Austausch von Gluonen. Die QCD stellt somit die beschreibende Theorie für die Kraft in Atomkernen dar, welche als starke Kernkraft bezeichnet wird. Im Vergleich zur Quantenelektrodynamik, kurz QED, gehört sie zur Gruppe der Yang-Mills-Theorien, welche einen nicht-abelschen Charakter aufweisen. Der Unterschied zur QED besteht somit darin, dass die Austauscheteilchen, also die Gluonen, ebenfalls eine Ladung tragen und miteinander wechselwirken können. Die neben der elektrischen Ladung als Farbladung bezeichnete Größe der QCD hat die drei Freiheitsgrade Rot, Grün und Blau und war notwendig um das experimentell gefundene Δ^{++} Teilchen theoretisch erklären zu können. Eine genauere Beschreibung der geschichtlichen Hintergründe hierfür findet sich unter anderem in [1]. Neben den drei Freiheitsgraden im Farbraum wurden bis zum heutigen Zeitpunkt noch sechs weitere Freiheitsgrade, die sogenannten Flavours, gefunden. Genauer handelt es sich dabei um die Flavours Up, Down, Strange, Bottom, Charm und Top. In dieser Arbeit werden jedoch nur die drei leichtesten Quarks Up, Down und Strange von Bedeutung sein. Die zugrunde liegende Symmetriegruppe des Flavour-Raums ist dann die $SU(3)$. Zu jeder Farbe und Flavour existiert außerdem noch eine duale Darstellung in der Form, dass aus Grün \rightarrow Anti-Grün und Up \rightarrow Anti-Up ($u \rightarrow \bar{u}$) wird.

Eine der wichtigsten Beobachtungen stellt die asymptotische Freiheit der QCD dar. Da die Kopplungskonstante der QCD eine „laufende“ Kopplung ist, welche sich mit größer werdenden Abstand der Quarks und Gluonen erhöht, befinden sich diese Teilchen bei kleinen Abständen bzw. großen Energien in einem quasi freien Zustand und ermöglicht die Verwendung perturbativer Techniken. Eine weitere wichtige Eigenschaft der QCD ist das Confinement, welches verantwortlich dafür ist, dass Quarks nur in gebundenen Zuständen anzutreffen sind. Die dann auftretenden farbneutralen Bindungszustände werden als Hadronen bezeichnet.

Zur Beschreibung der QCD in nicht perturbativen Regionen verwendet man unter anderem effektive Theorien, welche dieselben Symmetrien aufweisen wie die QCD. Das in dieser Arbeit benutzte effektive Modell wurde 1961 von Nambu und Jona-Lasinio entwickelt und später zur Beschreibung von Quarks angepasst. Obwohl dieses Modell kein Confinement beinhaltet und nicht renormierbar ist [2], lassen sich dennoch viele Aspekte der QCD adäquat beschreiben. Hierunter fällt das Verhalten der Mesonenmassen im chiralen Limes und die Beschreibung der thermodynamischen Phasenübergänge von QCD Materie. Aufgrund des nicht renormierbaren Charakters des NJL-Modells muss ein adäquates Regularisierungsverfahren verwendet werden, um die auftretenden Divergenzen bei der Berechnung von Schleifen-Diagrammen in den Griff zu bekommen. Hier bietet sich die Pauli-Villars-Regularisierung an, welche im Gegensatz zu anderen oft verwendeten Verfahren die Lorentzinvarianz des Modells erhält. Aus diesem Grund ist die zentrale Aufgabe dieser Arbeit die Erzeugung eines neuen Parametersatzes für das Drei-Flavour NJL-Modell mit Pauli-Villars-Regularisierung.

2 Lagrangedichte der QCD

Aus der Lagrangedichte einer Theorie lassen sich viele wichtige Eigenschaften extrahieren. Dazu gehören die Symmetrien und die damit verbundenen erhaltenen Größen. Außerdem lässt sich aus der Lagrangedichte die Dynamik der Theorie mit Hilfe der Euler-Lagrange-Gleichungen ableiten. Die Lagrangedichte der QCD lautet [3]

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = -\frac{1}{4} \mathcal{F}_{\mu\nu}^a \mathcal{F}_a^{\mu\nu} + \bar{\psi} (i\not{D} - m) \psi \quad (2.1)$$

mit der kovarianten Ableitung

$$(D_\mu)_{c'c} = \delta_{cc'} \partial_\mu - ig \frac{1}{2} (\lambda^a)_{cc'} A_\mu^a \quad (2.2)$$

und dem Feldstärketensor

$$\mathcal{F}_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf_{abc} A_\mu^b A_\nu^c. \quad (2.3)$$

In der kovarianten Ableitung handelt es sich bei den Indizes mit der Bezeichnung c und c' um Farbindizes welche die Werte 1, 2, 3 annehmen können. Die Zahlen stehen dann jeweils für eine der drei Farben. Das Eichfeld A_μ^a definiert die acht Gluonen als Austauscheteilchen der Theorie, wobei die Anzahl der Gluonen festgelegt ist durch die $SU(3)$ Generatoren. Man erkennt bereits am letzten Term des Feldstärketensors, dass die Gluonen selbst Farbe tragen und miteinander wechselwirken können.

Die im kinetischen Term vorkommende Masse m ist eine Diagonal-Matrix im Flavour-Raum, welche die Stromquarkmassen, oder auch nackte Quarkmassen genannt, m_0 der einzelnen Quarks enthält. Eine detaillierte Beschreibung warum man diese Massen als „nackt“ bezeichnet, wird im Kapitel 5 gegeben.

3 Symmetrien der QCD

Begonnen werden soll dieses Kapitel mit der Einschränkung, dass die Stromquarkmassen verschwinden, also die Massen-Matrix m exakt Null ist. Dieser Übergang wird als „chiraler Limes“ bezeichnet und spielt auch in späteren Kapiteln eine wichtige Rolle. Die dann der klassischen Lagrangedichte der QCD zugrunde liegenden globalen Symmetrien sind [3]

$$SU(3)_V \otimes SU(3)_A \otimes U(1)_V \otimes U(1)_A \quad (3.1)$$

Dabei ist die $SU(3)_V$ Symmetrie bereits dann erfüllt, wenn die Massen der betrachteten Quarks entartet sind. Aus dieser Symmetrie lässt sich das hadronische Spektrum der drei leichtesten Quark-Flavours, Up, Down und Strange, ableiten. Durchgeführt wurde dies 1961 unabhängig voneinander durch Murray Gell-Mann und Ne’eman und ist bekannt geworden als „Eightfold Way“ in Anlehnung an den buddhistischen „Edlen Achtfachen Pfad“ [1]. Die zu dieser Symmetrie gehörende Transformation lässt sich beschreiben durch eine Rotation im Flavour-Raum

$$\psi \rightarrow e^{-i\frac{\vec{\lambda}}{2}\vec{\omega}}\psi, \quad \bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma_0 \rightarrow \bar{\psi}e^{i\frac{\vec{\lambda}}{2}\vec{\omega}} \quad \text{mit } \vec{\omega} \in \mathbb{R}^8$$

und liefert, mit Hilfe des Noether-Theorems den erhaltenen Strom [3, 4]

$$J_\mu^k = \bar{\psi}\gamma_\mu\frac{\lambda^k}{2}\psi \quad (3.2)$$

Der mit $\vec{\lambda}$ bezeichnete Vektor beinhaltet als Einträge die Gell-Mann-Matrizen.

Da die Masse des Strange-Quarks deutlich größer ist, als die von Up- und Down-Quarks ($m_u \approx m_d \ll m_s$), ist die $SU(2)_V$, als Untergruppe der $SU(3)_V$, weniger stark gebrochen. In der Natur manifestiert sich dies darin, dass die drei Pionen und vier Kaonen jeweils (fast vollständig) entartete Massen aufweisen. Die Symmetrie $U(1)_A$ ist in der Natur aufgrund von Quanteneffekten nicht realisiert, während die $U(1)_V$ eine Phasentransformation beschrieben durch

$$\psi \rightarrow e^{-i\alpha}\psi \quad \text{und} \quad \bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}e^{i\alpha} \quad (3.3)$$

darstellt und auf den erhaltenen Strom

$$J_\mu^k = \bar{\psi}\gamma_\mu\psi \quad (3.4)$$

führt. Die hiermit verbundene erhaltene Größe ist die Baryonenzahl.

Eine der wichtigsten Symmetrien der QCD ist die $SU(3)_A$. Diese ist im chiralen Limes für die Lagrangedichte der QCD erfüllt und wird spontan im Vakuum durch das Quarkkondensat für große Kopplungen gebrochen. Gemäß des Goldstone-Theorems existieren dann acht, zu den jeweiligen Generatoren der $SU(3)$ gehörende, masselose Teilchen. Es wird sich bei der Analyse des Mesonspektrums heraus stellen, dass es sich hierbei um die drei Pionen und vier Kaonen handelt. Das achte Goldstone-Boson η wird im Zuge dieser Arbeit keine weitere Rolle spielen und sei an dieser Stelle nur kurz erwähnt.

Die $SU(3)_A$ und $SU(3)_V$ Symmetrie lässt sich auch mit Hilfe von links- und rechtshändigen Paritäten ausdrücken:

$$\psi_L = \frac{1-\gamma_5}{2}\psi \quad \bar{\psi}_L = \bar{\psi}\frac{1+\gamma_5}{2} \quad (3.5)$$

$$\psi_R = \frac{1+\gamma_5}{2}\psi \quad \bar{\psi}_R = \bar{\psi}\frac{1-\gamma_5}{2} \quad (3.6)$$

$$\implies \psi = \psi_L + \psi_R \quad \implies \bar{\psi} = \bar{\psi}_L + \bar{\psi}_R \quad (3.7)$$

Setzt man Gleichung (3.7) in die Lagrangedichte ein, so zerfällt diese in drei Anteile: Zwei davon hängen jeweils ausschließlich von ψ_L oder ψ_R ab. Der dritte Teil hat, für nicht verschwindende Stromquarkmassen, die Form

$$(\bar{\psi}_L + \bar{\psi}_R)m(\psi_L + \psi_R) = m(\bar{\psi}_L\psi_R + \bar{\psi}_R\psi_L). \quad (3.8)$$

Die vorhandenen Mischterme mit links- und rechts händigen Spinoren brechen explizit die $SU(3)_L \otimes SU(3)_R$ Symmetrie, welche auch als chirale Symmetrie bezeichnet wird.

4 Nambu–Jona-Lasinio Modell der Quantenchromodynamik

Es ist relativ offensichtlich, dass die Lagrangedichte der QCD aus Gleichung (2.1) eine hohe Komplexität aufweist und sich nur schwer mit diesen Berechnungen durchführen lässt. Aus diesem Grund ist es sinnvoll eine reduzierte Lagrangedichte zu betrachten, welche jedoch die gleichen globalen Symmetrien aufweist, wie die physikalisch exakte Theorie. Dieses als „effektives“ Modell bezeichnete Darstellung eines komplexen physikalischen Zusammenhangs spielt in der theoretischen Physik sehr oft eine große Rolle. Anhand der neuen, vereinfachten Lagrangedichte, lassen sich Aspekte und Grundlagen einer Theorie auf relativ einfachem Wege zeigen.

Für den Fall der QCD-Lagrangedichte soll an dieser Stelle ein Modell verwendet werden, welches ursprünglich zur Beschreibung von Nukleon-Nukleon Wechselwirkungen Verwendung finden sollte und 1961 von Y. Nambu und G. Jona-Lasinio entwickelt wurde. Die im weiteren Verlauf als NJL-Modell bezeichnete Theorie wies ursprünglich die Symmetrien [3]

$$SU(2)_V \otimes SU(2)_A \otimes U(1)_V \quad (4.1)$$

auf und basiert im Wesentlichen auf Eigenschaften die aus Supraleitern bekannt waren. Das NJL-Modell wurde später neu interpretiert und soweit angepasst, dass es zur Beschreibung der zwei leichtesten Quarks und deren Wechselwirkung dienen konnte. Dabei wird die Quark-Gluon und Gluon-Gluon Wechselwirkung, welche in der QCD-Lagrangedichte zu finden sind, vollkommen vernachlässigt. Die zum NJL-Modell für Quarks im Zwei-Flavour Fall gehörende Lagrangedichte im Flavour-Raum lautet [5]

$$\mathcal{L}_{\text{NJL}} = \bar{q} (i\cancel{d} - m) q + g ((\bar{q}q)^2 + (\bar{q}i\gamma_5 \vec{\tau}q)^2) . \quad (4.2)$$

Die Spinoren q und \bar{q} repräsentieren ein Quark und ein Antiquark und tragen jeweils noch einen Farbindex, welcher aber aus Gründen der Übersicht außen vor gelassen wurde. Aus der Lagrangedichte (4.2) lässt sich außerdem entnehmen, dass die Quark nur punktförmig miteinander wechselwirken. Eine alternative Schreibweise für Gleichung (4.2) lässt sich unter Verwendung der Pauli-Matrizen (τ^a) mit der gewöhnlich $\mathbf{1}_{2 \times 2}$ als τ^0 finden:

$$\mathcal{L}_{\text{NJL}} = \bar{q} (i\cancel{d} - m) q + \frac{g}{2} \sum_{i=0}^3 [(\bar{q}\tau^i q)^2 + (\bar{q}i\gamma_5 \tau^i q)^2] + g [\det_{\text{flavour}} (\bar{q}(1 + \gamma_5)q) + \det_{\text{flavour}} (\bar{q}(1 - \gamma_5)q)] \quad (4.3)$$

Die Lagrangedichte, die in dieser Arbeit betrachtet werden soll, dient zur Beschreibung der drei leichtesten Flavours, also Up-, Down- und Strange-Quarks und lässt sich schreiben als [2]:

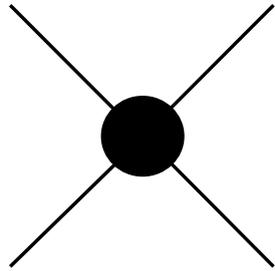
$$\mathcal{L}_{\text{NJL}} = \bar{q} (i\cancel{d} - m) q + G \sum_{a=0}^8 [(\bar{q}\lambda^a q)^2 + (\bar{q}i\gamma_5 \lambda^a q)^2] - K [\det_{\text{flavour}} (\bar{q}(1 + \gamma_5)q) + \det_{\text{flavour}} (\bar{q}(1 - \gamma_5)q)] \quad (4.4)$$

$$= \mathcal{L}_{\text{NJL}}^{\text{frei}} + \mathcal{L}_{\text{NJL}}^{\text{4-Punkt}} + \mathcal{L}_{\text{NJL}}^{\text{6-Punkt}} \quad (4.5)$$

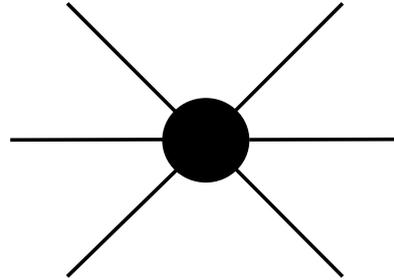
Die Generatoren der $SU(3)$ sind dabei mit λ bezeichnet und werden durch die Gell-Mann-Matrizen repräsentiert. Das λ^0 gehört zur $U(3)$ Symmetriegruppe und hat die Gestalt einer drei-dimensionalen Einheitsmatrix mit Normierungsfaktor $\sqrt{\frac{2}{3}}$ (vgl. Anhang A). Genau wie im Zwei-Flavour Fall tragen auch hier die Spinoren noch einen Farbindex.

Im vorherigen Abschnitt wurde bereits erwähnt, dass die Symmetrie $U(1)_A$ in der Natur gebrochen ist. Der zweite Term in den Gleichungen (4.4) und (4.3), welcher die Determinanten enthält, sorgt dafür, dass genau dies der Fall ist und wurde 1976 durch t'Hooft beschrieben [3, 6]. Dabei wird davon ausgegangen,

dass der Bruch der $U(1)_A$ Symmetrie durch Instanton Effekte hervorgerufen wird [6, 7]. Die Struktur der $\mathcal{L}_{\text{NJL}}^{4\text{-Punkt}}$ und $\mathcal{L}_{\text{NJL}}^{6\text{-Punkt}}$ lässt sich grafisch darstellen und ist in Abbildung 1 zu sehen.



(a) Vier-Punkt Wechselwirkung



(b) Sechs-Punkt Wechselwirkung

Abbildung 1: Punktförmige Wechselwirkungsterme der Lagrangedichte des NJL-Modells im Drei-Flavour Fall

Nach diesem Überblick über die Grundlagen und Entwicklung des NJL-Modells soll nun mit der eigentlichen Ausarbeitung eines neuen Parametersatzes begonnen werden.

5 Die Gap-Gleichung im NJL-Modell

Aus den vorangegangenen Kapiteln lässt sich bereits die Frage extrahieren, in welcher Größenordnung die Quarkmassen angesiedelt sind. Vereinfacht könnte man sich vorstellen, dass die Masse eines Nukleons, also eines Protons bzw. Neutrons, welches jeweils aus drei Quarks der leichtesten Sorte zusammengesetzt ist, die Masse eines einzelnen Quarks dieser Art näherungsweise definiert. Bei einer Protonenmasse von rund 940 MeV würde dies auf eine Stromquarkmasse von ca. 300 MeV führen. Tatsächlich lässt sich aber durch Berechnungen aus der Gitter-QCD zeigen, dass die Massen der „freien“ Up- und Down-Quarks < 10 MeV und für das Strange-Quark < 200 MeV betragen [8]. Dabei ist anzumerken, dass diese Werte auf einer Energie Skala von 2 GeV gültig sind.

Die gesamten Rechnungen werden im weiteren Verlauf in der sogenannten „mean field approximation“ (MFA) durchgeführt. Diese Näherung ist dadurch gekennzeichnet, dass sich ein Quark im gemittelten Potenzial der anderen Quarks bewegt [4]. Hinzu kommt, dass die Verwendung der MFA mit der, bei der Analyse der Mesonen verwendeten Random Phase Approximation, konsistent ist. Mathematisch beschrieben ist dieses Vorgehen, durch die Linearisierung der quadratischen Terme aus Gleichung (4.2) mit Hilfe von

$$\bar{q}_f q_f = \langle \bar{q}_f q_f \rangle + \delta_{\bar{q}_f q_f} . \quad (5.1)$$

Daraus folgt:

$$(\bar{q}_f q_f)^2 = 2\langle \bar{q}_f q_f \rangle \bar{q}_f q_f - \langle \bar{q}_f q_f \rangle^2 + \mathcal{O}(\delta_{\bar{q}_f q_f}^2) \quad (5.2)$$

Das Kondensat $\langle \bar{q}_f q_f \rangle$ stellt den Vakuumerwartungswert für jedes Flavour q_f dar und ist definiert über:

$$\langle \bar{q}_f q_f \rangle := -i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \hat{\text{Tr}}(S^f(p)) \quad (5.3)$$

Die Spur ist hier nur im Dirac- und Farb-Raum auszuwerten. Bei $S^f(p)$ handelt es sich in dieser Definition um den fermionische Propagator im Impulsraum der Quarks gemäß der Dirac-Theorie mit Flavour f und Masse M_f , für den der Ansatz aus Gleichung (5.4) gemacht wird:

$$iS^f(p) = i \frac{\not{p} + M_f}{p^2 - M_f^2 + i\epsilon} \quad (5.4)$$

Durch Einsetzen der Quark-Propagatoren erhält man:

$$\langle \bar{q}_f q_f \rangle = -i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \hat{\text{Tr}} \left(\frac{\not{p} + M_f}{p^2 - M_f^2 + i\epsilon} \right) \quad (5.5)$$

Das ϵ legt den Integrationspfad fest. Aufgrund der Eigenschaft der Dirac-Matrizen, spurlos zu sein, entfällt der Term $\propto \not{p}$. Der übrige Term lässt sich in die Form

$$\langle \bar{q}_f q_f \rangle = -i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \hat{\text{Tr}} \left(\frac{M_f}{p^2 - M_f^2 + i\epsilon} \right) \quad (5.6)$$

$$= -4N_c M_q i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2 - M_f^2 + i\epsilon} \quad (5.7)$$

$$= -4N_c M_q i I_1(M_f) \quad (5.8)$$

bringen. Die Vorfaktoren erhält man aus der, im Dirac- und Farb-Raum diagonalen, Massenmatrix M . Das N_c ist dann die Dimension des Farb-Raums und entspricht der Anzahl der Farben. In dem hier betrachteten Fall gilt $N_c = 3$.

Die Gleichung für das Kondensat reduziert sich demnach auf Bestimmung des Integrales I_1 . Dies soll im folgenden Abschnitt durchgeführt werden.

5.1 Das Integral I_1

Das Integral $I_1(M_f)$ ist gemäß Gleichung (5.8) definiert als:

$$I_1(M_f) := \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2 - M_f^2 + i\epsilon} \quad (5.9)$$

$$= \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p_0^2 - E_{\vec{p}}^2 + i\epsilon} \quad (5.10)$$

Der Index f bei der Masse M_f definiert die Art des Quarkflavours. Es gilt außerdem die relativistische Energie-Impuls Beziehung:

$$E_{\vec{p}}^2 = \vec{p}^2 + M^2 \quad (5.11)$$

Nun wird der Integrand mit Hilfe der Partialbruchzerlegung umgeformt, um im Anschluss den Residuensatz anwenden zu können:

$$iI_1(M_f) = i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p_0 + E_{\vec{p}} - i\epsilon'} \cdot \frac{1}{p_0 - E_{\vec{p}} + i\epsilon'} \quad (5.12)$$

$$= i \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \int \frac{dp_0}{2\pi} \frac{1}{p_0 + E_{\vec{p}} - i\epsilon'} \cdot \frac{1}{p_0 - E_{\vec{p}} + i\epsilon'} \quad (5.13)$$

Es gilt:

$$\epsilon' = \frac{\epsilon}{2E_{\vec{p}}} \quad (5.14)$$

Für die weitere Betrachtung ist es irrelevant, wie genau ϵ definiert ist, da dieses nur den Integrationsweg festlegt. Aus diesem Grund wird weiterhin ϵ anstelle von ϵ' verwendet. Die p_0 Integration des Integrals aus Gleichung (5.13) lässt sich nun mit Hilfe des Residuensatzes lösen. Dazu wird die in Abbildung 2 genutzte Kontur verwendet.

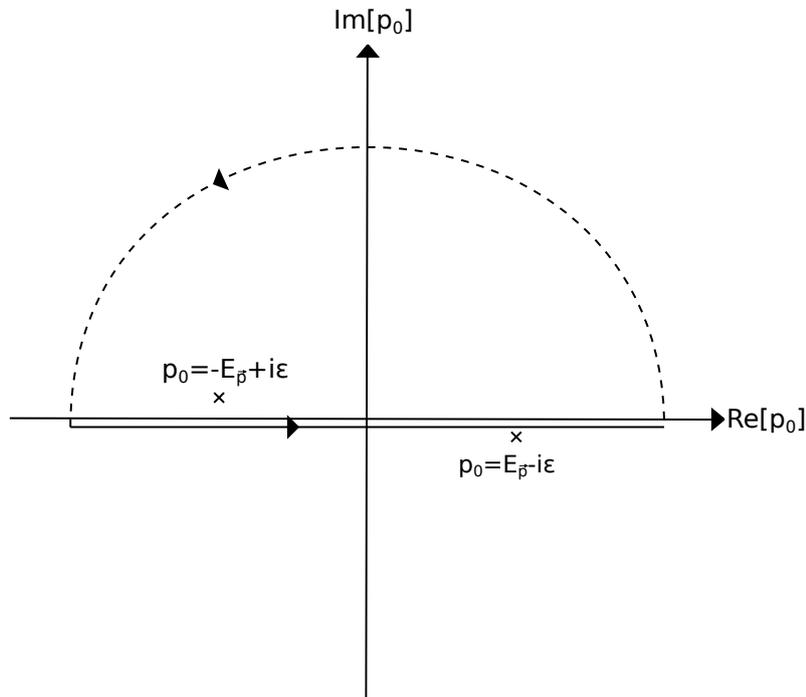


Abbildung 2: Integrationsweg für das Integral $I_1(M_f)$ in der komplexen p_0 -Ebene

Das Residuum am Punkt $p_0 = E_{\vec{p}} - i\epsilon$ trägt nicht zum Wert des Integrals bei, da die Kontur so gewählt ist, dass dieses sich nicht innerhalb der Pfades befindet. Es folgt:

$$I_1(M_f) = i \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi i \frac{1}{-E_{\vec{p}} - E_{\vec{p}}} \quad (5.15)$$

$$= -i \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2iE_{\vec{p}}} \quad (5.16)$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{E_{\vec{p}}} \quad (5.17)$$

Ersetzt man nun $E_{\vec{p}} = \sqrt{\vec{p}^2 + M_f^2}$ lässt sich das Integral, nach Transformation in Kugelkoordinaten, in der Form

$$iI_1(M_f) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty dp \frac{p^2}{\sqrt{p^2 + M_f^2}} \quad (5.18)$$

angeben. Beim Vergleich der Potenzen von p im Zähler und Nenner erkennt man, dass dieses Integral quadratisch divergent ist. Das in dieser Arbeit zur Eliminierung der Divergenz verwendete Verfahren wurde 1949 von Wolfgang Pauli und Felix Villars vorgestellt und ist im weiteren Verlauf als „Pauli-Villars-Regularisierung“ bezeichnet. Aufgrund der quadratischen Divergenz werden mindestens zwei Regulatoren benötigt:

$$\Rightarrow iI_1(\Lambda, M_f) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty dp p^2 \left(\frac{1}{\sqrt{p^2 + M_f^2}} - \frac{2}{\sqrt{p^2 + M_f^2 + \Lambda^2}} + \frac{1}{\sqrt{p^2 + M_f^2 + 2\Lambda^2}} \right) \quad (5.19)$$

Die Bedeutung des eingefügten Parameters Λ und die Koeffizienten der Summanden werden im nächsten Kapitel, bei der Diskussion der Pauli-Villars-Regularisierung, deutlich.

Der oben stehende Ausdruck lässt sich analytisch lösen, indem man zum Beispiel den Vierer-Impuls-Cutoff in Verbindung mit einer Wickrotation verwendet und anschließend für den Cutoff-Parameter λ den Grenzprozess $\lambda \rightarrow \infty$ durchführt. Alternativ verwendet man den Dreier-Impuls-Cutoff mit dem eben genannten Grenzprozess. Man erhält aus Gleichung (5.18):

$$\begin{aligned} iI_1(M_f) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty dp \frac{p^2}{\sqrt{p^2 + M_f^2}} \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\lambda dp \frac{p^2}{\sqrt{p^2 + M_f^2}} \end{aligned} \quad (5.20)$$

Das bestimmte Integral lässt sich nun vollständig analytisch lösen:

$$\Rightarrow \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\lambda dp \frac{p^2}{\sqrt{p^2 + M_f^2}} \quad (5.21)$$

$$= \frac{1}{8\pi^2} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left(\lambda \sqrt{\lambda^2 + M_f^2} - M_f^2 \operatorname{arsinh} \left(\frac{\lambda}{M_f} \right) \right) \quad (5.22)$$

$$= \frac{1}{8\pi^2} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left(\lambda \sqrt{\lambda^2 + M_f^2} - M_f^2 \log \left(\frac{\lambda}{M_f} + \sqrt{\left(\frac{\lambda}{M_f} \right)^2 + 1} \right) \right) \quad (5.23)$$

Eine analoge Rechnung für die beiden anderen Terme in Gleichung (5.19) liefert dann das Pauli-Villars regularisierte Ergebnis. Dabei ist zu beachten, den Grenzprozess über die Summe alle Terme durchzuführen und diese nicht einzeln zu betrachten. Man erhält schließlich für das regularisierte Integral den Ausdruck:

$$iI_1(M_f, \Lambda) = \frac{1}{16\pi^2} \left(M_f^2 \log \left(\frac{M_f^2}{M_f^2 + \Lambda^2} \right) + (M_f^2 + 2\Lambda^2) \log \left(\frac{M_f^2 + 2\Lambda^2}{M_f^2 + \Lambda^2} \right) \right) \quad (5.24)$$

5.2 Pauli-Villars-Regularisierung

Um auftretende Divergenzen bei der Berechnung von Loop-Integralen in den Griff zu bekommen, ist es notwendig eine mathematische Methode zu finden, die Integrale dieser Art, für große Impulse zu korrigieren. Obwohl es mehrere Möglichkeiten gibt, mit Divergenzen umzugehen, soll in dieser Arbeit das Pauli-Villars Verfahren verwendet werden, da es bei den betrachteten Integralen die Lorentzinvarianz nicht verletzt [9]. Neben der Pauli-Villars-Regularisierung existieren noch andere Regularisierungsverfahren, wie der Dreier-Impuls-Cutoff. Dieser ist zwar deutlich einfacher in der Anwendung, gewährleistet jedoch nicht die Lorentzinvarianz.

Bei der Pauli-Villars-Regularisierung werden zusätzliche Terme zum divergenten Integral hinzu addiert, welche sich für große Impulse wie das eigentlich betrachteten Integral verhalten, jedoch zum Teil ein anderes Vorzeichen besitzen.

$$\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} f(M, p) \longrightarrow \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \sum_j^N c_j f(p, M_j) \quad (5.25)$$

Die Anzahl dieser Terme ist durch den Grad der Divergenz nach unten hin festgelegt. Für das im vorherigen Abschnitt betrachtete Integral I_1 werden demnach mindestens zwei, sogenannte Regulatoren, benötigt. Dies führt dann auf den Ausdruck aus Gleichung (5.19). Für die Koeffizienten c_j und die Massen M_j gelten zusätzliche Bedingungen, welche sicherstellen, dass alle auftretenden Divergenzen erfasst werden [10]:

$$\sum_j c_j = 0 \quad (5.26)$$

und

$$\sum_j c_j \cdot M_j^2 = 0 \quad (5.27)$$

Diese zusätzlichen Terme lassen sich als weitere Teilchen mit Masse M_j interpretieren, die innerhalb der untersuchten Theorie nicht auftreten, jedoch wesentlich für physikalisch sinnvolle Ergebnisse sind. Um die Divergenz des Integrals zu beseitigen, müssen diese Teilchen zum Teil eine falsche Statistik aufweisen, was sich aus den Koeffizienten c_j ergibt. Für die Massen M_j wird folgender Ansatz verwendet:

$$M_j^2 = M^2 + j \cdot \Lambda^2 \quad (5.28)$$

Aus den Bedingungen (5.26) und (5.27) ergibt sich für die Koeffizienten c_j :

$$c_0 = 1 \quad (5.29)$$

$$c_1 = -2 \quad (5.30)$$

$$c_2 = 1 \quad (5.31)$$

Da das Integral $I_1(M_f)$ den größten Divergenzgrad in dieser Arbeit aufweist, wird im Folgenden immer auf das oben beschriebene Schema zurückgegriffen.

5.3 Vier-Punkt Wechselwirkung

Die Linearisierung der reinen Vier-Punkt Wechselwirkung aus Gleichung (4.4) geschieht, indem Gleichung (5.1) in diese eingesetzt wird und Ordnungen zweiten oder höheren Grades der Fluktuation $\delta_{\bar{q}_f q_f}$ vernachlässigt werden.

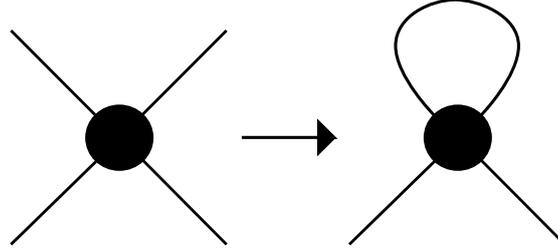


Abbildung 3: Linearisierung der Vier-Punkt Wechselwirkung durch das „schließen“ einer Schleife. Dies entspricht in der MFA der Vernachlässigung von Termen $\geq \mathcal{O}(\delta_{\bar{q}q}^2)$

Die Terme $\propto \gamma_5$, also der pseudo-skalare Anteil der Lagrangedichte, bilden keine Kondensate. Dies folgt aus der Definition (5.3) des Kondensates und dem verwendeten Ansatzes für den Propagator S^f . Die Spurbildung während der Berechnung des Kondensates sorgt dafür, dass diese Terme verschwinden lässt. Die weiterhin vorhandenen Fluktuationen dieser Terme werden vernachlässigt, da sie quadratisch auftreten.

Insgesamt ergibt sich für die Lagrangedichte die folgende Form:

$$\mathcal{L}_{\text{NJL}}^{\text{MFA}} = \mathcal{L}_{\text{NJL}}^{\text{frei}} + \mathcal{L}_{\text{NJL}}^{\text{4-Punkt}} \quad (5.32)$$

$$\approx \sum_{f=u,d,s} \bar{q}_f (i\partial - m_f) q_f + 4G \langle \bar{q}_f q_f \rangle \bar{q}_f q_f - 2G \langle \bar{q}_f q_f \rangle^2 \quad (5.33)$$

$$= \sum_{f=u,d,s} \bar{q}_f (i\partial \underbrace{-m_f + 4G \langle \bar{q}_f q_f \rangle}_{=:-M_f}) q_f - 2G \langle \bar{q}_f q_f \rangle^2 \quad (5.34)$$

An der modifizierten Lagrangedichte kann bereits der Propagator der Quarks mit effektiver Masse M_f abgelesen werden und entspricht der Definition aus Gleichung (5.4). Analog lässt sich der Propagator für die unveränderte Lagrangedichte angeben, wenn in Gleichung (5.4) M_f einfach durch m_f ersetzt wird. Dieser Propagator ist mit $S_0(p)$ bezeichnet.

Eine Korrelation zwischen den beiden Propagatoren ist durch die Lösung Dyson-Gleichung gegeben, deren grafische Darstellung in Abbildung 4 zu finden ist.

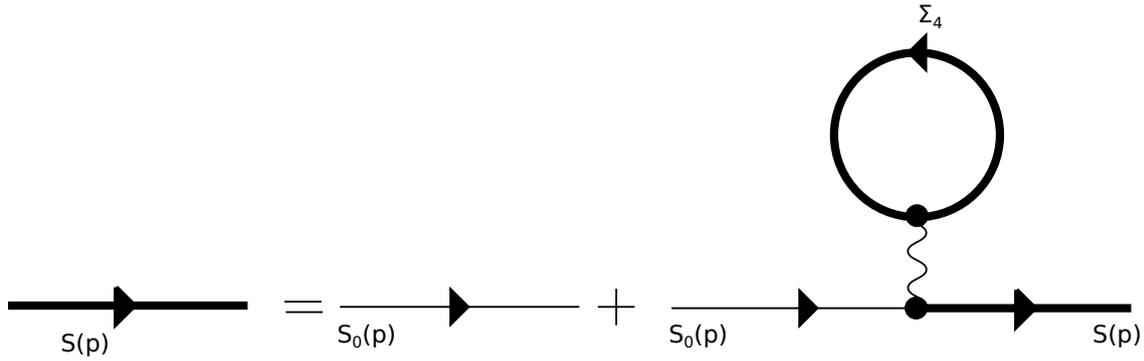


Abbildung 4: Dyson-Gleichung der Quarkpropagatoren für die reine Vier-Punkt-Wechselwirkung: Die effektive Masse der Quarks wird durch die selbstkonsistente Lösung beschrieben und unterscheidet sich deutlich von der nackten Masse m_f

Das Σ bezeichnet dabei den Anteil der Eigenwechselwirkung bzw. Selbstenergie, was letztendlich genau dem Term

$$-4G\langle\bar{q}_f q_f\rangle = \Sigma = M_f - m_f \quad (5.35)$$

entspricht.

Es folgt somit, dass in der MFA die effektive, auch als Konstituentenmasse bezeichnete, Masse M_f der Quarks nur durch das Flavour der Quarks selber zustande kommt und keinerlei Mischterme auftreten. Bei der später folgenden Betrachtung der Sechs-Punkt Wechselwirkung wird sich jedoch zeigen, dass es ausschließlich zur Wechselwirkung mit den beiden anderen Quark-Flavours kommt.

Bereits an dieser Stelle lässt sich die Konstituentenmasse im Falle einer reinen Vier-Punkt Wechselwirkung für die drei Flavours Up, Down und Strange angeben:

$$M_u = m_u - 4G\langle\bar{u}u\rangle \quad (5.36)$$

$$M_d = m_d - 4G\langle\bar{d}d\rangle \quad (5.37)$$

$$M_s = m_s - 4G\langle\bar{s}s\rangle \quad (5.38)$$

Man beachte, dass es sich bei jeder dieser Gleichungen um eine selbstkonsistente Gleichung handelt, da das Kondensat, wie aus Gleichung (5.3) ersichtlich, selber eine Funktion der Konstituentenmasse ist. Diese Gleichungen lassen sich im Allgemeinen nur numerisch lösen.

5.4 Sechs-Punkt Wechselwirkung

Betrachtet man nun die vollständige Lagrangedichte des NJL-Modells aus Gleichung (4.4) lässt sich fast analog zum Fall der reinen Vier-Punkt Wechselwirkung die Konstituentenmasse bestimmen. Der einzige,

aber wichtiger Unterschied findet sich bereits zu Beginn der Rechnung in Form der im $\mathcal{L}_{\text{NJL}}^{6\text{-Punkt}}$ Term vorkommenden Determinante. Die Auswertung findet im Flavour-Raum statt und ist gegeben durch:

$$\begin{aligned} \det(\bar{q}\hat{A}^\pm q) &= (\bar{u}\hat{A}^\pm u)(\bar{d}\hat{A}^\pm d)(\bar{s}\hat{A}^\pm s) \\ &+ (\bar{u}\hat{A}^\pm d)(\bar{d}\hat{A}^\pm s)(\bar{s}\hat{A}^\pm u) \\ &+ (\bar{u}\hat{A}^\pm s)(\bar{d}\hat{A}^\pm u)(\bar{s}\hat{A}^\pm d) \\ &- (\bar{u}\hat{A}^\pm d)(\bar{d}\hat{A}^\pm u)(\bar{s}\hat{A}^\pm s) \\ &- (\bar{u}\hat{A}^\pm u)(\bar{d}\hat{A}^\pm s)(\bar{s}\hat{A}^\pm d) \\ &- (\bar{u}\hat{A}^\pm s)(\bar{d}\hat{A}^\pm d)(\bar{s}\hat{A}^\pm u) \end{aligned} \quad (5.39)$$

Der Operator A^\pm ist dann jeweils zu ersetzen mit

$$A^+ := 1 + \gamma_5, A^- := 1 - \gamma_5. \quad (5.40)$$

Wird nun wieder die MFA angewendet unter der Annahme verwendet, dass gemischte Kondensate der Form $\langle \bar{q}^i q^j \rangle$ ($i \neq j$) nicht auftreten, ergibt sich nach einer langwierigen Rechnung für den $\mathcal{L}_{\text{NJL}}^{6\text{-Punkt}}$ Term:

$$\mathcal{L}_{\text{NJL}}^{6\text{-Punkt}} = \sum_{i=u,d,s} (-\bar{q}^i 2K \langle \bar{q}^j q^j \rangle \langle \bar{q}^k q^k \rangle q^i) \text{ mit } i \neq j \neq k \neq i \quad (5.41)$$

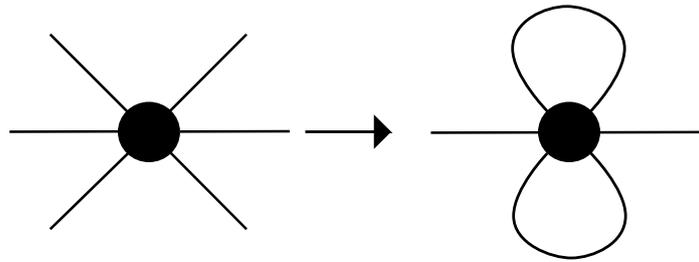


Abbildung 5: Linearisierung der Sechspunkt Wechselwirkung: Im Gegensatz zur Vier-Punkt Wechselwirkung müssen bei der Sechspunkt Wechselwirkung zwei Schleifen geschlossen werden. Hieraus ergibt sich dann eine Struktur mit zwei externen Quark-Feldern, welche durch die Schleifen modifiziert werden.

Dies lässt sich wieder zu einer effektiven Masse zusammenfassen:

$$M_i = m_i + 2K \langle \bar{q}^j q^j \rangle \langle \bar{q}^k q^k \rangle \quad (5.42)$$

Auch hier ist es möglich den Zusammenhang der Propagatoren grafisch darzustellen, was in der unten stehenden Abbildung 6 zu sehen ist.

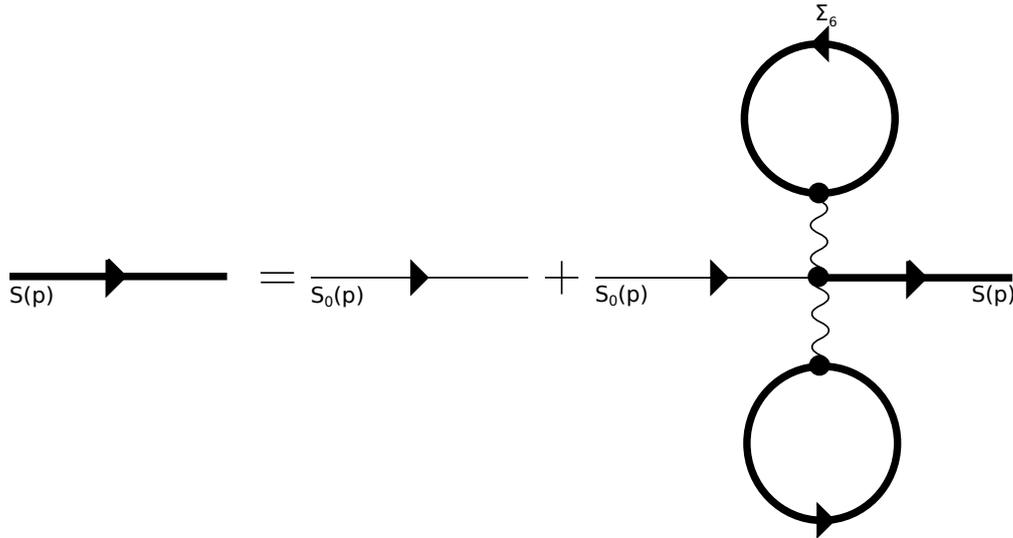


Abbildung 6: Analog zur Vier-Punkt Wechselwirkung lässt sich auch der Quarkpropagator für die reine Sechs-Punkt Wechselwirkung in Form der Dyson-Gleichung darstellen. Im Gegensatz zum Quarkpropagator der reinen Vier-Punkt Wechselwirkung tragen bei der Sechs-Punkt-Wechselwirkung die anderen Flavours zur Konstituentenmasse M_f bei.

Fasst man nun die Ergebnisse aus dem vorangegangenen Abschnitt mit diesem zusammen, lässt sich die Lagrangedichte im Drei-Flavour Fall des NJL-Modells in MFA schreiben als:

$$\mathcal{L}_{\text{NJL}} = \mathcal{L}_{\text{NJL}}^{\text{frei}} + \mathcal{L}_{\text{NJL}}^{4\text{-Punkt}} + \mathcal{L}_{\text{NJL}}^{6\text{-Punkt}} \quad (5.43)$$

$$= \sum_{f=u,d,s} (\bar{q}^f (i\not{D} - m_f + 4G\langle\bar{q}^f q^f\rangle - 2K\langle\bar{q}^j q^j\rangle\langle\bar{q}^k q^k\rangle) q^f) \quad (5.44)$$

$$- 2G (\langle\bar{u}u\rangle^2 + \langle\bar{d}d\rangle^2 + \langle\bar{s}s\rangle^2) + 4K \langle\bar{u}u\rangle\langle\bar{d}d\rangle\langle\bar{s}s\rangle \quad (5.45)$$

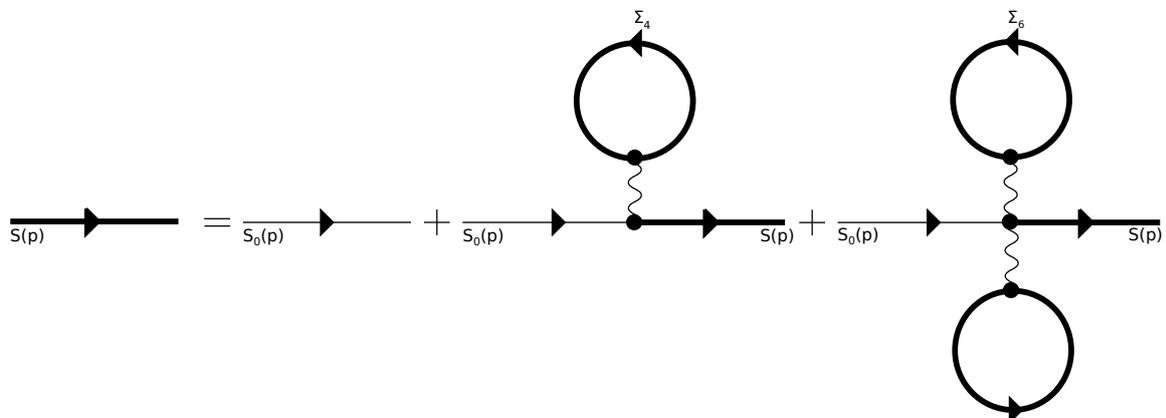


Abbildung 7: Zusammenfassung der Beiträge der Vier-Punkt und Sechs-Punkt Wechselwirkung zu einem effektiven Quarkpropagator.

Für die Konstituentenmasse ergibt sich insgesamt:

$$M_u = m_u - 4G\langle\bar{u}u\rangle + 2K\langle\bar{d}d\rangle\langle\bar{s}s\rangle \quad (5.46)$$

$$M_d = m_d - 4G\langle\bar{d}d\rangle + 2K\langle\bar{u}u\rangle\langle\bar{s}s\rangle \quad (5.47)$$

$$M_s = m_s - 4G\langle\bar{s}s\rangle + 2K\langle\bar{d}d\rangle\langle\bar{u}u\rangle \quad (5.48)$$

An dieser Stelle ist es sinnvoll bereits eine Näherung einzuführen, welche das weitere Vorgehen vereinfachen wird. Wie bereits in Kapitel 3 erwähnt, sind die Massen der Kaonen in guter Näherung entartet. Da das K^0 und \bar{K}^0 jeweils aus Down- und Strange-Quarks aufgebaut sind, während sich die beiden geladenen Kaonen K^\pm aus Up- und Strange-Quarks zusammensetzen, ergibt sich, dass die Massen von Up- und Down-Quarks im Vergleich zur Masse des Strange-Quarks, in guter Näherung gleich sind. Man bezeichnet die Annahme $m_u = m_d = m \neq m_s$, als Isospin Limes. Einen zusätzlichen Anhaltspunkt für diese Annahme liefert die beinahe entarteten Massen der drei Pionen, was auf die schwächer gebrochene $SU(2)$ Symmetrie zurückzuführen ist. Als Folge des Isospin Limes sind die Kondensate für die Up- und Down- Flavours identisch.

Verwendet man diese Einschränkung an die Stromquarkmassen der Up- und Down-Quarks in den obigen Gleichungen, ergibt sich ein Gleichungssystem aus zwei miteinander gekoppelten Gleichungen:

$$M_u = m_u - 4G\langle\bar{u}u\rangle + 2K\langle\bar{u}u\rangle\langle\bar{s}s\rangle \quad (5.49)$$

$$M_s = m_s - 4G\langle\bar{s}s\rangle + 2K\langle\bar{u}u\rangle^2 \quad (5.50)$$

Versucht man nun Gleichung (5.49) so umzuschreiben, sodass diese in einer Form vorliegt, welche ähnlich des Zwei-Flavour Falls ist und beachtet man dabei, dass es sich bei den Kondensaten um Elemente der reellen Zahlen handelt, ergibt sich:

$$M_{u/d} = m_{u/d} - (4G - 2K\langle\bar{s}s\rangle)\langle\bar{u}u\rangle =: M \quad (5.51)$$

Betrachtet man, ähnlich wie im Falle der reinen Vier-Punkt Wechselwirkung, die grafische Darstellung der Propagatoren aus Abbildung 4, kann eine effektive Kopplungskonstante definiert werden:

$$4G - 2K\langle\bar{s}s\rangle =: B^2 \quad (5.52)$$

Aus diesem Ausdruck folgen bereits interessante Eigenschaften der Konstituentenmasse M : In der Abbildung 8 sind die Werte der Konstituentenmasse M aufgetragen über Werte für B^2 bei festen Stromquarkmassen.

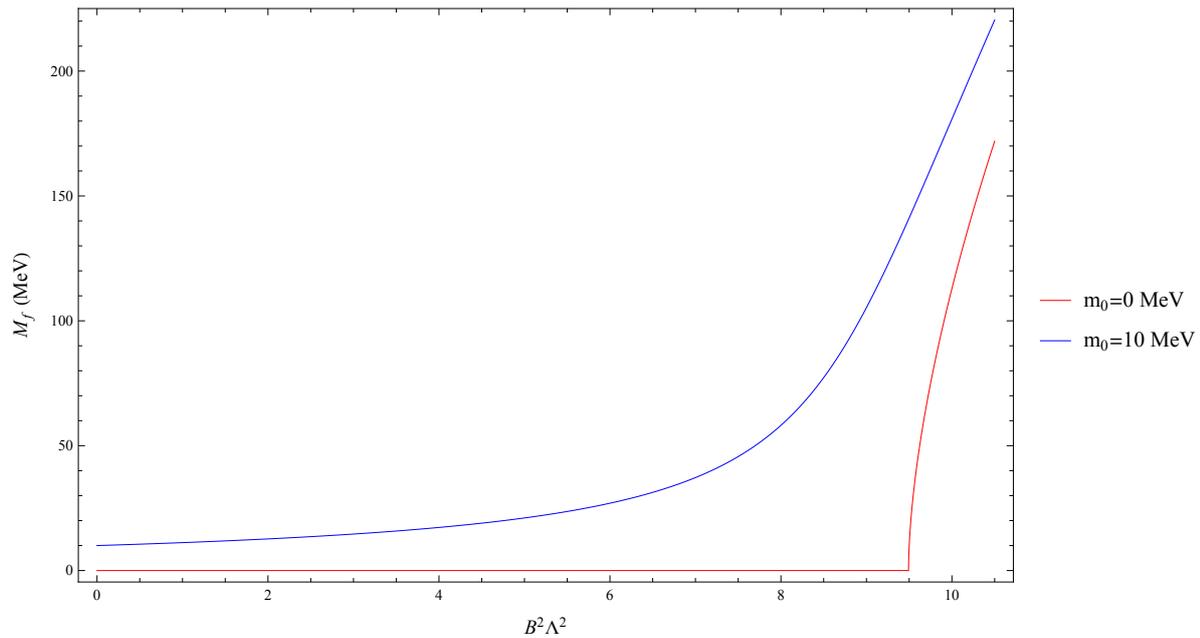


Abbildung 8: Konstituentenmasse als Funktion von $B^2 \cdot \Lambda^2$ mit einem Cutoff von $\Lambda = 900$ MeV: Trotz verschwindender Stromquarkmassen wird ab einem gewissen Wert für die Kopplung B^2 dynamisch Masse generiert. Dies hat zur Folge, dass auch das Kondensat $\langle \bar{u}u \rangle \neq 0$ ist.

Man erkennt, dass obwohl die Stromquarkmasse m Null ist, dennoch ab einer gewissen kritischen Kopplung dynamisch Masse generiert wird. Dies wird bereits klar, wenn man eine alternative Schreibweise für die obigen Zusammenhänge nutzt:

$$M = m - B^2 \langle \bar{u}u \rangle \quad (5.53)$$

Im Falle von verschwindenden Stromquarkmassen, also im chiralen Limes, ergibt dies:

$$M = -B^2 \langle \bar{u}u \rangle \quad (5.54)$$

$$= 4N_c B^2 M iI_1(M) \quad (5.55)$$

Diese Gleichung hat als triviale Lösung für M immer $M = 0$. Setzt man nun den Ausdruck (5.24) ein und dividiert auf beiden Seiten durch M folgt:

$$\frac{1}{B^2} = \frac{N_c}{4\pi^2} \left(M^2 \log \left(\frac{M^2}{M^2 + \Lambda^2} \right) + (M^2 + 2\Lambda^2) \log \left(\frac{M^2 + 2\Lambda^2}{M^2 + \Lambda^2} \right) \right) \quad (5.56)$$

Die kritische Kopplung $B_{\text{kritisch}}^2(\Lambda)$ ergibt sich durch den Grenzprozess $M \rightarrow 0$ in obiger Gleichung. In diesem Fall bewegt man sich auf der Geraden für $m_f = 0$ MeV in Abbildung 8 von rechts auf den kritischen Punkt zu. Man erhält $B_{\text{kritisch}}^2(\Lambda = 900 \text{ MeV}) \cdot (900 \text{ MeV})^2 = 9,48$. Ab dieser kritischen Kopplung entsteht demnach eine Konstituentenmasse der Quarks, obwohl deren Strommasse identisch Null ist. In Abbildung 9 wird das Kondensat als Funktion der inversen Kopplung betrachtet.

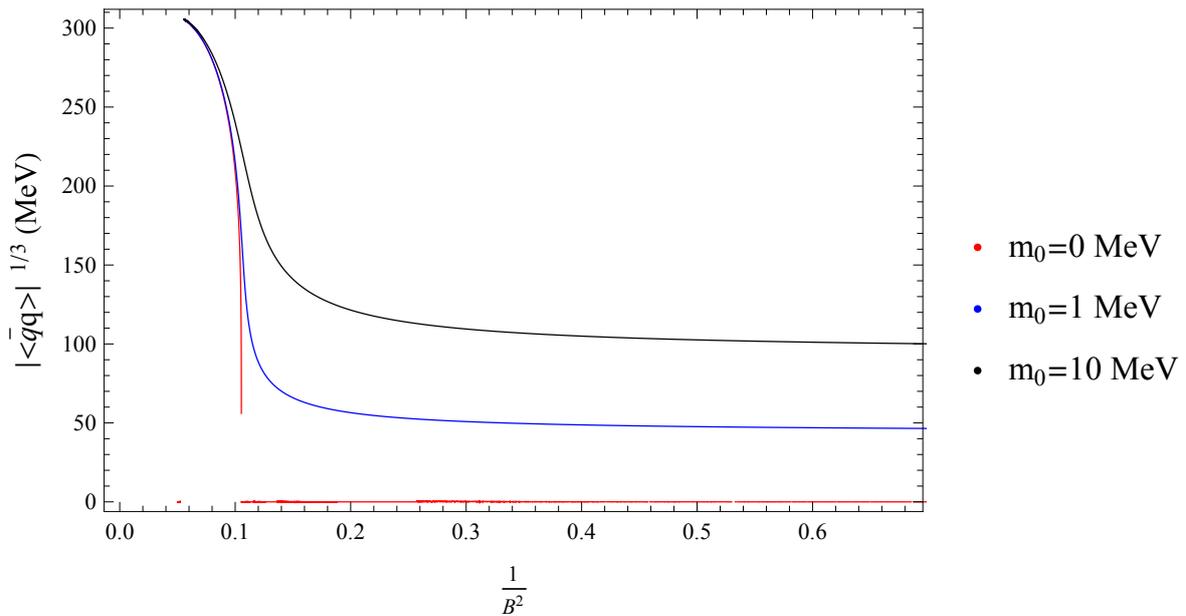


Abbildung 9: Kondensat über inverse Kopplungskonstante: Die Wigner-Weyl-Phase wird durch den Verlauf des Kondensates im chiralen Limes von der Nambu-Goldstone-Phase getrennt. Mit steigender Stromquarkmasse wird dieser Phasenübergang fließender.

Das von Null verschiedene Kondensat ab B_{kritisch} ist verantwortlich für den spontanen Bruch der chiralen $SU(3)_L \otimes SU(3)_R$ Symmetrie und lässt sich als Ordnungsparameter für den chiralen Phasenübergang interpretieren. Im chiralen Limes, also für $m_0 = 0$ zeigt sich, dass der Verlauf der Kondensate die Wigner-Weyl-Phase von der Nambu-Goldstone-Phase trennt [7]. Die Nambu-Goldstone-Phase beschreibt dabei den Zustand großer nicht verschwindender Kondensate und damit den spontanen Bruch der chiralen Symmetrie für $B^2 > B_{\text{kritisch}}^2$. Hingegen ist in der Wigner-Weyl-Phase die chirale Symmetrie exakt im chiralen Limes erfüllt. Für nicht verschwindende Stromquarkmassen zeigt sich der explizite Bruch der chiralen Symmetrie, wobei ab B_{kritisch}^2 der spontane Bruch dieser Symmetrie dominiert.

6 Mesonenspektrum

Zur Beschreibung von mesonischen Zuständen in der QCD, bestehend aus einem Quark–Anti-Quark Paar, ist eigentlich die Betrachtung von Confinement notwendig. Confinement beschreibt die physikalische Beobachtung, dass gebundene Zustände aus Quarks immer Farbsinglett Zustände sind. Obwohl das NJL-Modell keinerlei Confinement beinhaltet [2], lässt sich dennoch das Mesonenspektrum beschreiben, wenn man die Resonanzanregung der Quark–Anti-Quark Streuung betrachtet. Die dann auftretenden gebundenen Zustände werden mit den jeweiligen Mesonen identifiziert.

Setzt man für die Stromquarkmassen $m_f \neq 0$ in die Lagrangedichte des NJL-Modells ein, so wird wie bereits in Abschnitt 3 beschrieben, die chirale Symmetrie explizit durch die Mischterme von links- und rechtshändigen Paritäten gebrochen. Außerdem wurde in Abschnitt 5.4 gezeigt, dass die chirale Symmetrie ab einer gewissen Kopplungsstärke durch das Kondensat spontan gebrochen wird. Das Goldstone-Theorem besagt dann, dass es für jeden spontan gebrochenen Generator der kontinuierlichen Symmetriegruppe ein masseloses Teilchen geben muss, welches die Quantenzahlen der entsprechenden Rotation besitzt. Diese Teilchen werden als Goldstone-Bosonen bezeichnet. Im Falle nicht verschwindender aber entarteter Strommassen müssten für drei Flavour acht Teilchen existieren, deren Masse untereinander entartet ist. Es wird sich bei der Berechnung der Mesonenmassen herausstellen, dass es sich bei den drei Pionen und vier Kaonen um die gesuchten Goldstone-Bosonen handelt. Der in der Lagrangedichte (4.4) für die Erzeugung der Pionen und Kaonen verantwortliche Term ist der pseudoskalare Anteil $(\bar{q}i\gamma_5\lambda^a q)^2$ in $\mathcal{L}_{\text{NJL}}^{4\text{-Punkt}}$. Das achte Goldstone-Boson η wird im Folgenden keine weitere Rolle spielen, da zur Erzeugung der neuen Parametersätze das Quarkkondensat anstatt der Masse des *eta*-Mesons verwendet wird. Im weiteren Verlauf soll, ausgehend von der Bethe-Salpeter-Gleichung (BSG), ein Ausdruck für die Streumatrix \mathcal{T} entwickelt werden. Damit lassen sich bereits die Massen der Pionen und Kaonen bestimmen und das Goldstone-Theorem im chiralen Limes untersuchen.

6.1 Vier-Punkt Wechselwirkung

Die Streuung eines Quark–Anti-Quark Paares lässt sich durch folgendes Feynman-Diagramm grafisch darstellen:

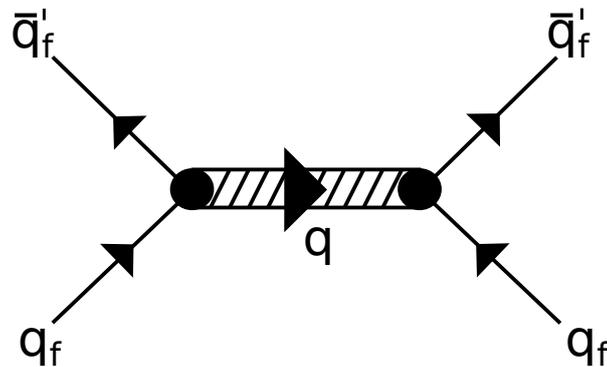


Abbildung 10: Quark–Anti-Quark Streuung: An den externen „Beinchen“ befinden sich jeweils die streuenden Quarks und Anti-Quarks. Die Wechselwirkung wird durch den Austausch eines Mesons mit Impuls q vermittelt. Die Zeitrichtung ist in diesem Diagramm von links nach rechts gegeben.

Auf Mesonenebene muss ein Näherungsverfahren verwendet werden, welches Konsistenz mit dem auf Quarkebene ist. Als Näherungsverfahren wird aus diesem Grund die Random-Phase-Approximation (RPA) angewendet, da diese, wie die MFA auf Quarkebene die Eigenschaften des Modells bezüglich der chirale Symmetrie beibehält.

Die Streumatrix aus Abbildung 10 lässt sich schematisch in RPA darstellen:

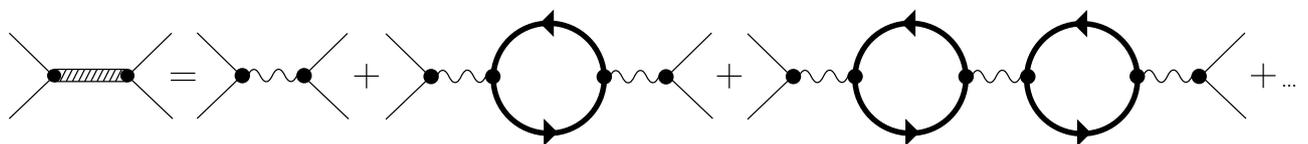


Abbildung 11: Streumatrix in Random-Phase-Approximation.

Die rechte Seite beschreibt die Streuung in führender Ordnung $\frac{1}{N_c}$, welche sich als unendliche Summe aus Polarisationschleifen $i\Pi_M$ und Wechselwirkungskernen $i\mathcal{K}$ schreiben lässt. Die Polarisationschleife besitzt die schematische Darstellung

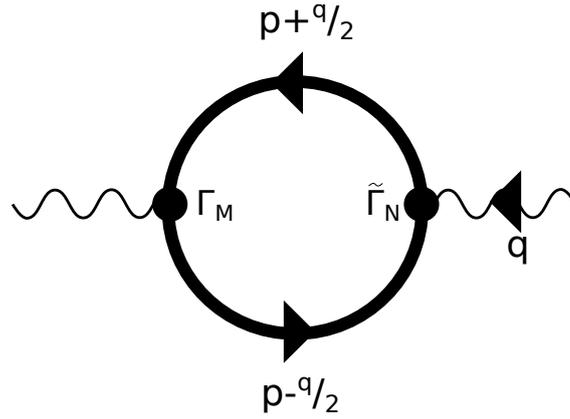


Abbildung 12: Grafische Darstellung der Polarisationschleife. Zeitrichtung ist hier von rechts nach links.

und lässt sich mit Hilfe der Feynman-Regeln auswerten:

$$-i\Pi_{NM}(q^2) = - \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[\tilde{\Gamma}_N iS(p + \frac{q}{2}) \Gamma_M iS(p - \frac{q}{2}) \right] \quad (6.1)$$

Die Spur ist dabei im Flavour-, Farb- und Dirac-Raum auszuführen. Der Propagator $S(p)$ besitzt in diesem Fall eine diagonale Struktur in der Form, dass

$$S(p) = \begin{pmatrix} S^u(p) & 0 & 0 \\ 0 & S^d(p) & 0 \\ 0 & 0 & S^s(p) \end{pmatrix} \quad (6.2)$$

gilt. Die Spurbildung in den Polarisationschleifen sorgt dafür, dass die Streumatrix $i\mathcal{T}$ in unabhängige Mesonenkanäle zerfällt. Aus diesem Grund ist es nicht notwendig, alle möglichen Kombinationen M, N der Vertizes zu betrachten. Aus den nicht verschwindenden Polarisationschleifen ist es möglich die Mesonen aus Linearkombinationen der Gell-Mann-Matrizen zu identifizieren. Hieraus lassen sich die Wechselwirkungskerne und damit verbunden, die Vertizes für jedes Meson definieren. Für die Wechselwirkungskerne gilt unter Vernachlässigung der Sechs-Punkt Wechselwirkung

$$i\mathcal{K} = 2iG\delta_{M,N}\Gamma_M \otimes \tilde{\Gamma}_N \quad (6.3)$$

mit

$$\Gamma_M := i\gamma_5\Theta_M \text{ und } \tilde{\Gamma}_N := i\gamma_5\Theta_N^\dagger. \quad (6.4)$$

Das Θ_M wählt den Mesonenkanal aus und beinhaltet die Linearkombinationen der Gell-Mann-Matrizen:

$$\Theta_M = \begin{cases} \lambda^3 & \text{für } \pi^0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(\lambda^1 \pm i\lambda^2) & \text{für } \pi^\pm \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(\lambda^4 \pm i\lambda^5) & \text{für } K^\pm \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(\lambda^6 \pm i\lambda^7) & \text{für } K^0, \bar{K} \end{cases} \quad (6.5)$$

Insgesamt ergibt sich für die Streumatrix $i\mathcal{T}_M$ eines Mesons M :

$$i\mathcal{T}_M = i\mathcal{K}_M + i\mathcal{K}_M(-i\Pi_M)i\mathcal{K}_M + \dots \quad (6.6)$$

$$= i\mathcal{K}_M + i\mathcal{K}_M(-i\Pi_M) \underbrace{\left(i\mathcal{K}_M + i\mathcal{K}_M(-i\Pi_M)i\mathcal{K}_M + \dots \right)}_{=i\mathcal{T}_M} \quad (6.7)$$

Die eingeklammerten Terme lassen sich nun wieder mit der vollständigen Streumatrix $i\mathcal{T}$ identifizieren. Insgesamt folgt

$$i\mathcal{T}_M = i\mathcal{K}_M + i\mathcal{K}_M(-i\Pi_M)i\mathcal{T}_M \quad (6.8)$$

mit der grafischen Darstellung:

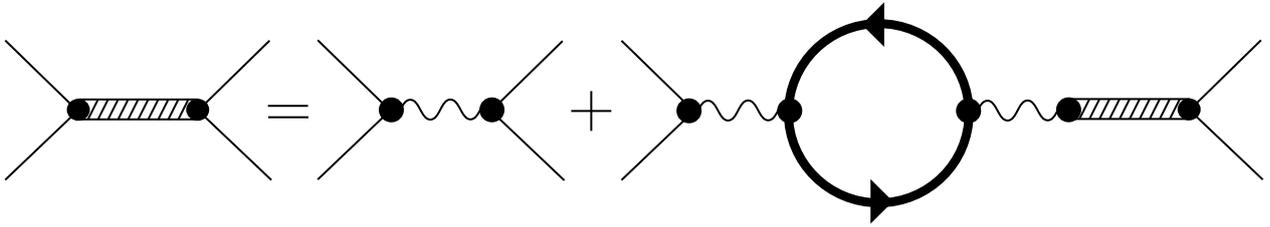


Abbildung 13: Die Streumatrix $i\mathcal{T}$ lässt sich in der RPA als selbstkonsistente Gleichung schreiben.

Betrachtet man Gleichung (6.8) etwas genauer, so erkennt man, dass sich diese umschreiben lässt:

$$i\mathcal{T}_M = \frac{i\mathcal{K}_M}{1 - i\mathcal{K}_M(-i\Pi_M)} \quad (6.9)$$

Die Streumatrix $i\mathcal{T}_M$ ist also eindeutig durch die Kenntnis der Polarisationschleife $-i\Pi_M$ und des Wechselwirkungskerns $i\mathcal{K}_M$ bestimmt. Durch Einsetzen von Gleichung (6.3) mit (6.4) in Gleichung (6.9) folgt die Definition des Mesonpropagators:

$$i\mathcal{T}_M = \tilde{\Gamma}_M \underbrace{\frac{2iG}{1 - 2iG(-i\Pi_M)}}_{=:D_M(q^2)} \Gamma_M \quad (6.10)$$

Da es sich bei den Mesonen um den Resonanzzustand der Streumatrix handelt, muss demnach für ein Meson mit Impuls q gelten:

$$1 - i\mathcal{K}_M(-i\Pi(q^2 = m_M^2)) \stackrel{!}{=} 0 \quad (6.11)$$

In Anhang B.1 und B.2 findet sich die Berechnung der Polarisationschleifen für das Pion und Kaon im Isospin-Limes. Die Ergebnisse dieser Rechnungen lauten

$$\Pi_{\pi^0}(q^2) = -2 \frac{1}{M_u} \langle \bar{u}u \rangle - i4N_c q^2 I_2(q^2) \quad (6.12)$$

und

$$\Pi_{\bar{K}^0}(q^2) = -\frac{1}{M_s} \langle \bar{s}s \rangle - \frac{1}{M_u} \langle \bar{u}u \rangle + 4N_c i I_3(q^2) ((M_s - M_u)^2 - q^2) . \quad (6.13)$$

Die Definitionen der Integrale $I_2(q^2)$ und $I_3(q^2)$ sind ebenfalls in Anhang B.1 und B.2 gegeben. Setzt man nun die Ausdrücke der Polarisationschleifen in den Ausdruck des Propagators für das entsprechende Meson ein und stellt den inversen Propagator grafisch über den Impuls q des Mesons dar, ergeben sich die Abbildungen 14 und 15. Die Nullstellen der inversen Propagatoren des Pions und Kaons aus Gleichung (6.10) spiegeln dann die Punkte wider für die $q^2 = m_M^2$ gilt.

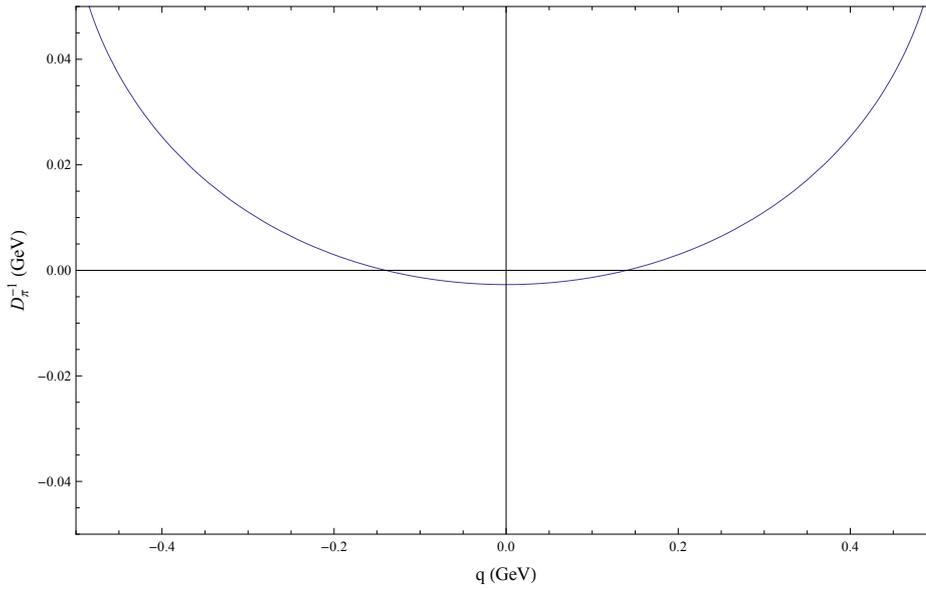


Abbildung 14: Verlauf des inversen Pionpropagator D_{π}^{-1} als Funktion des Impulses q (aus Parametersatz [D]): Die Nullstellen geben die Punkte an, für die $q^2 = m_{\pi}^2$ gelten. Die hierfür notwendige Auswertung der Polarisationschleife ist in Anhang B.1 zu finden.

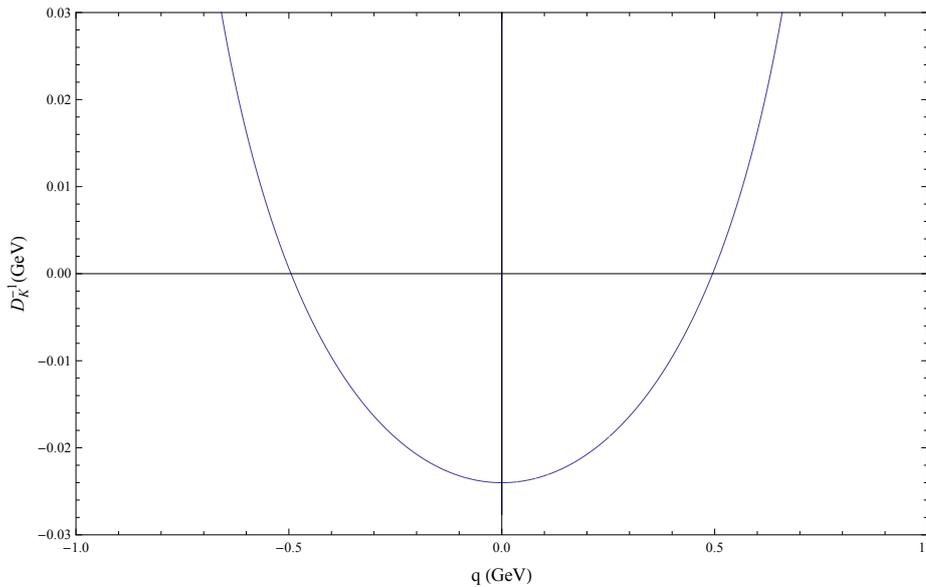


Abbildung 15: Verlauf des inversen Kaonpropagator D_K^{-1} als Funktion des Impulses q (aus Parametersatz [D]): Die Nullstellen geben die Punkte an, für die $q^2 = m_K^2$ gelten. Die hierfür notwendige Auswertung der Polarisationschleife ist in Anhang B.1 zu finden.

Die Massen der Mesonen lassen sich nun aus den Gleichung (6.12) und (6.13) in Verbindung mit Gleichung (6.11) bestimmen. Für das Pion setzt man dafür die Gap-Gleichung (5.36) des Up-Quarks in Gleichung (6.12) ein. Man erhält:

$$\langle \bar{u}u \rangle = \frac{M_u - m_{u,0}}{-4G} \quad (6.14)$$

$$\implies -i\Pi_{\pi^0}(q^2) = 2i \frac{1}{M_u} \frac{M_u - m_{u,0}}{-4G} - 4N_c q^2 I_2(q^2) \quad (6.15)$$

$$\implies \Pi_{\pi^0}(q^2) = \frac{1}{2G} - \frac{m_{u,0}}{2GM_u} - 4N_c q^2 i I_2(q^2) \quad (6.16)$$

Einsetzen in die Gleichung (6.11) liefert dann einen Ausdruck für die Pionenmasse:

$$m_\pi^2 = -\frac{m_u}{M_u} \frac{1}{8GN_c i I_2(q^2)} \Big|_{q^2=m_\pi^2} \quad (6.17)$$

Für den chiralen Limes ergibt sich unmittelbar, dass die Massen der Pionen verschwinden. Bei den Pionen handelt es sich demnach um drei der gesuchten Goldstone-Bosonen. Für die Kaonen lässt sich mit Gleichung (5.37) und (5.38) das Kondensat in (6.13) ersetzen:

$$-i\Pi_{\bar{K}^0}(q^2) = \frac{i}{M_s} \left(\frac{M_s - m_{s,0}}{-4G} \right) + \frac{i}{M_u} \left(\frac{M_u - m_{u,0}}{-4G} \right) + 4N_c I_3(q^2) \cdot ((M_s - M_u)^2 - q^2) \quad (6.18)$$

$$\implies \Pi_{\bar{K}^0}(q^2) = \frac{1}{2G} - \frac{m_{s,0}}{4GM_s} - \frac{m_{u,0}}{4GM_u} + 4N_c i I_3(q^2) \cdot ((M_s - M_u)^2 - q^2) \quad (6.19)$$

Da im betrachteten Isospin-Limes die Kaonen vollständig entartet sind, ergibt sich, analog zu den Pionen, unter Verwendung von Gleichung (6.11), für die Masse der Kaonen:

$$m_K^2 = (M_s - M_u) - \frac{M_s m_u + M_u m_s}{16GN_c M_s M_u i I_3(q^2)} \Big|_{q^2=m_K^2} \quad (6.20)$$

Auch bei den Kaonen erkennt man, dass deren Massen bei verschwindenden Stromquarkmassen ($m_{u,0}$ & $m_{s,0} = 0$), woraus $M_s = M_u$ folgt, im chiralen Limes Null sind. Bei den Kaonen handelt es sich also um weitere vier Goldstone-Bosonen.

Bis zu diesem Punkt wurde die Tatsache vollkommen vernachlässigt, dass im Fall der reinen Vier-Punkt Wechselwirkung neun Goldstone-Bosonen existieren müssten. Das achte Goldstone-Boson η , welches bereits in der Einleitung dieses Kapitels erwähnt wurde, ist tatsächlich eines der noch fehlenden Teilchen. Dieses Teilchen ist eine Mischzustand aus den nicht weiter betrachteten Polarisationschleifen die sich aus λ^0 und λ^8 ergeben. Das mit η in Verbindung stehende η' ist ebenfalls ein Mischzustand aus λ^0 und λ^8 . Aufgrund der Vernachlässigung der Sechs-Punkt Wechselwirkung und der damit einhergehenden Existenz der $U(1)_A$ Symmetrie in der Lagrangedichte ließe sich auch für das η' eine Masse angeben. Da jedoch die $U(1)_A$ in der Natur durch Quanteneffekte quasi explizit gebrochen ist, würde die so erhaltene Masse keinerlei physikalische Bedeutung besitzen.

6.1.1 Alternative Darstellung der Streumatrix und effektive Meson-Quark Kopplung

Da das NJL-Modell ursprünglich zur Beschreibung von Nukleon-Nukleon Wechselwirkung entwickelt wurde, bei dem sich die Wechselwirkung durch Austausch von Mesonen beschreiben lässt, ist es möglich

analog für die Quark–Anti-Quark Streuung vorzugehen. Eine minimale lokale Lagrangedichte hierfür würde dann lauten [3]:

$$\mathcal{L}_{\pi\bar{q}q} = \sum_{a=0}^8 i g_{M\bar{q}q} \bar{q} \gamma_5 \Theta_M M_a q \quad (6.21)$$

M_a ist das mesonische Feld und $g_{M\pi\bar{q}q}$ beschreibt die effektive Kopplung zwischen den Quarks und den Mesonen. Eine Auswertung von Abbildung 10 unter Berücksichtigung dieser Lagrangedichte liefert:

$$i\mathcal{T} = \bar{q}'_f i\gamma_5 \Theta_M^\dagger q_f \left((i g_{M\bar{q}q}(q^2)) \frac{i}{q^2 - m_M^2} (i g_{M\bar{q}q}(q^2)) \right) \bar{q}'_f i\gamma_5 \Theta_M q_f \quad (6.22)$$

Zu Beachten ist hierbei, dass die Meson-Quark Kopplung $g_{M\bar{q}q}$ durchaus noch vom Impuls des Austausch-Bosons abhängig sein kann. Führt man nun eine Taylor-Entwicklung um den Pol von

$$\frac{g_{M\bar{q}q}^2(q^2)}{q^2 - m_M^2} \approx \frac{g_{M\bar{q}q}^2}{q^2 - m_M^2} + \mathcal{O}(1) \quad (6.23)$$

durch, lässt sich die Kopplung unabhängig vom Impuls q^2 aufschreiben. Betrachtet man nun Gleichung (6.11) und führt ebenfalls eine Taylor-Entwicklung um $q^2 = m_M^2$ durch erhält man:

$$1 - 2G\Pi_M(q^2) \approx \underbrace{1 - 2G\Pi_M(q^2)}_{\stackrel{!}{=} 0 \text{ für } q^2 = m_M^2} - 2G \left. \frac{\partial \Pi(q^2)}{\partial q^2} \right|_{q^2 = m_M^2} (q^2 - m_M^2) + \mathcal{O}((q^2 - m_M^2)^2) \quad (6.24)$$

Der erste nicht triviale Anteil ist demnach $\propto \frac{\partial \Pi(q^2)}{\partial q^2}$. Vergleicht man nun Gleichung (6.23) mit (6.24) folgt für $g_{M\bar{q}q}$:

$$g_{M\bar{q}q}^{-2} = \left. \frac{\partial \Pi_M(q^2)}{\partial q^2} \right|_{q^2 = m_M^2} \quad (6.25)$$

6.1.2 Erlaubte Zerfallskanäle und Zerfallskonstanten

Nachdem nun die Massen der Pionen und Kaonen durch die Gleichungen (6.17) und (6.20) berechnet werden können und ein Ausdruck für die Propagatoren gefunden ist, wird zur Bestimmung der Parametersätze noch die Pionzerfallskonstante benötigt. Bei der Analyse der Integrale $I_2(q^2)$ und $I_3(q^2)$ (vgl. Anhang C) hat sich herausgestellt, dass das Integral $I_2(q^2)$ für $q^2 > 4M_u^2$ einen von Null verschiedenen Imaginärteil besitzen [4]. Bei dem Integral $I_3(q^2)$ trifft dies für $q^2 > (M_s + M_u)^2$ zu. Diese Eigenschaft überträgt sich auch auf die Propagatoren der Mesonen $D_M(q^2)$, wie in Abbildung 16 für das Pion und in Abbildung 17 für das Kaon gezeigt.

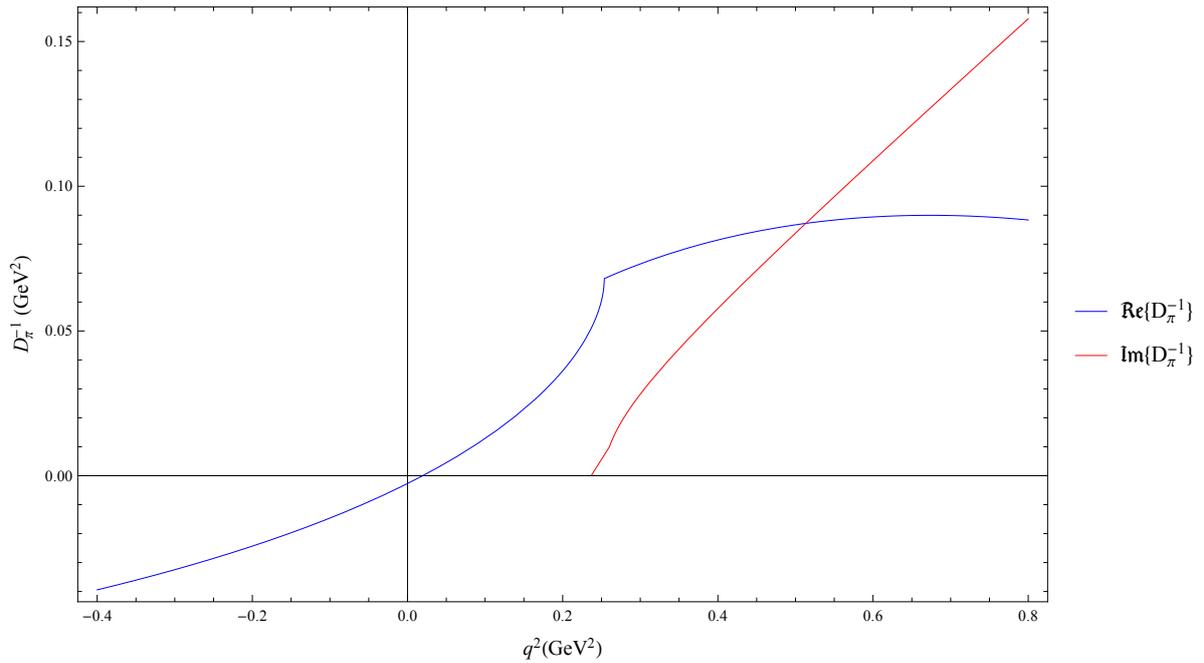


Abbildung 16: Real- und Imaginärteil des inversen Pionpropagators $D_{\pi}^{-1}(q^2)$: Der ab $q^2 > 4M_u^2$ von Null verschiedene Imaginärteil des Propagators erlaubt im NJL-Modell den Zerfall eines Pions in ein Quark und ein Anti-Quark. In der Natur ist dies aufgrund des Confinements nicht möglich. Für die in dieser Arbeit betrachteten Pionen gilt immer $q^2 < 4M_u^2$.

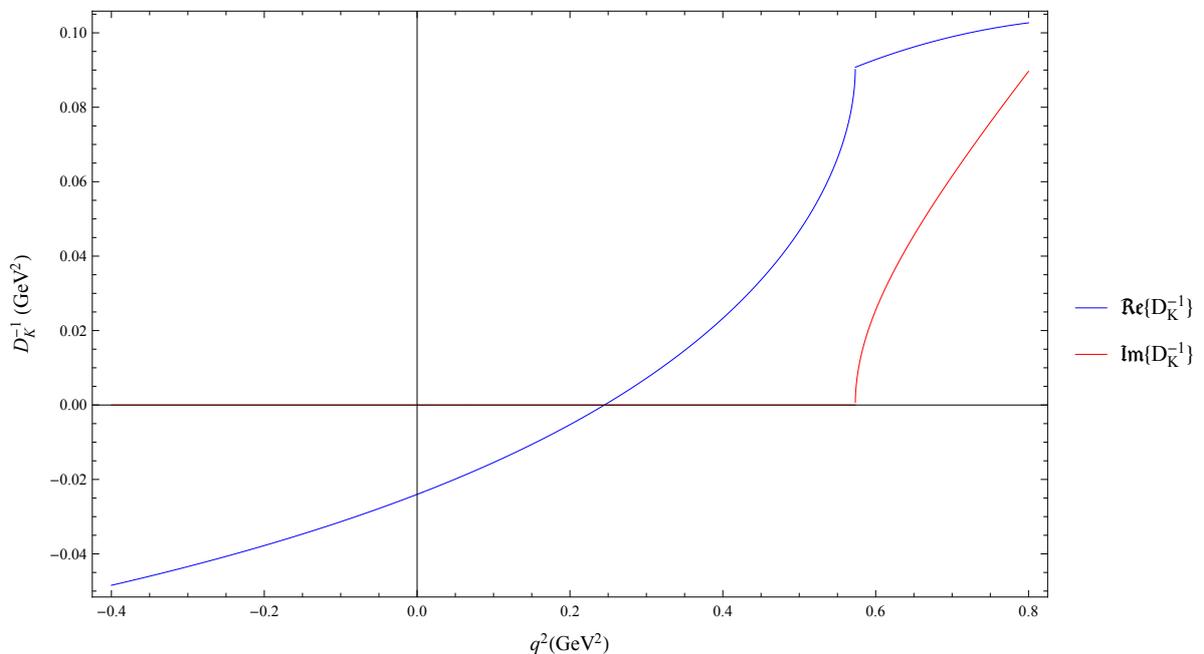


Abbildung 17: Real- und Imaginärteil des inversen Kaonpropagators $D_{\pi}^{-1}(q^2)$: Der ab $q^2 > (M_s + M_u)^2$ von Null verschiedene Imaginärteil des Kaonpropagators erlaubt, wie beim Pion, den Zerfall eines Kaons in ein Quark und ein Anti-Quark, obwohl dies in der Natur aufgrund des Confinements nicht möglich ist. Für die in dieser Arbeit betrachteten Kaonen gilt immer $q^2 < (M_u + M_s)^2$.

Der im NJL-Modell energetisch erlaubte Zerfall eines Mesons in ein Quark–Anti-Quark Paar wird durch den sich öffnenden Imaginärteil beschrieben. Obwohl in der starken Wechselwirkung dieser Zerfall aufgrund des Confinements nicht gestattet ist, spielt er im NJL-Modell bei der Analyse der Mesonenmassen eine wichtige Rolle. Da in dieser Arbeit das Pion und Kaon betrachtet werden, für die $q^2 < 4M_u^2$ bzw. $q^2 < (M_s + M_u)^2$ gilt, wird immer der Realteil der Polarisationschleife im Propagator verwendet auch wenn dies nicht explizit angegeben wird.

Es existieren auch Zerfallskanäle der Mesonen, welche sich durchaus physikalisch beobachten lassen. Das π^0 zum Beispiel zerfällt über die elektromagnetische Wechselwirkung in zwei γ -Quanten. Die geladenen Pionen $\pi^{+(-)}$ hingegen zerfallen aufgrund der schwachen Wechselwirkung in ein Myon ($\mu^{+(-)}$) und ein Neutrino ν bzw. Anti-Neutrino $\bar{\nu}$ [8]. Die Zerfallskonstanten der Mesonenzustände ergeben sich aus der Übergangswahrscheinlichkeit, dass das betrachtete Meson in das hadronische Vakuum übergeht. Dabei koppelt das Pion und das Kaon durch einen entsprechenden Quarkloop an den Axial-Strom [2, 7]:

$$\langle 0 | j_a^\mu | \pi_b(q) \rangle =: f_\pi q^\mu \delta_{ab} \quad (6.26)$$

Die Größe f_π wird dabei als Zerfallskonstante bezeichnet ergibt sich ursprünglich aus der Zerfallsrate [8]. Analog gilt für das Kaon:

$$\langle 0 | j_a^\mu | K_b(q) \rangle =: f_K q^\mu \delta_{ab} \quad (6.27)$$

Das den Zerfall beschreibende Feynman-Diagramm des Pions ist in Abbildung 18 dargestellt.

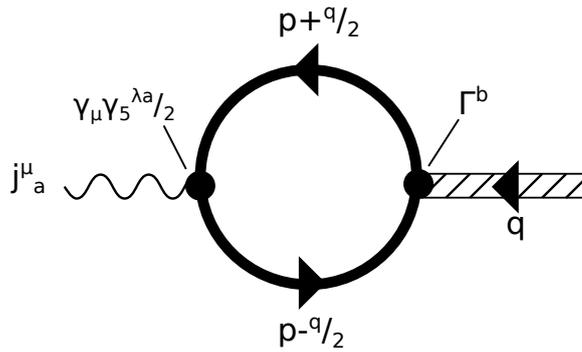


Abbildung 18: Feynman-Diagramm zum Pionzerfall: Die Pionzerfallskonstante ergibt sich aus der Kopplung des Pions an den Axial-Strom über einen Quarkloop.

Im Folgenden soll nur noch auf das Pion eingegangen werden. Der Zerfall des Kaon und die damit verbundene Zerfallskonstante ergibt sich auf ähnlichem Wege.

Der Vertex Γ^b in Abbildung 18 setzt sich zusammen aus der Pion-Quark-Quark Kopplung $g_{\pi qq}$ und einer der acht Gell-Mann-Matrizen. Für das Pion sind das $(\lambda_1 \pm i\lambda_2)$ und λ_3 . Es ergibt sich:

$$\Gamma^b = i g_{\pi qq} \gamma_5 \lambda^b \quad (6.28)$$

Aufgrund des betrachteten Isospin-Limes sind die Zustände π^0 und π^\pm vollständig entartet. Für die Zerfallskonstante bedeutet dies, dass sich das elektrisch zerfallende π^0 und die beiden geladenen Zustände π^\pm , welche über die schwache Wechselwirkung zerfallen, nicht unterscheiden. Nach einer sorgfältigen Auswertung des obigen Feynman-Diagramms, welche in Anhang B.3 gegeben ist, erhält man für die Pionzerfallskonstante

$$f_\pi = -4N_c g_{\pi qq} M_u i I_2(q^2) \Big|_{q^2=m_\pi^2} \quad (6.29)$$

und für die Kaonzerfallskonstante

$$f_K = -2N_c g_{Kqq} (M_u + M_s) i I_3(q^2) \Big|_{q^2=m_K^2} . \quad (6.30)$$

6.1.3 Parametersätze für die Vier-Punkt Wechselwirkung

Nachdem nun alle vorbereitenden Rechnungen abgeschlossen sind, kann mit der Berechnung der neuen Parametersätze für die Vier-Punkt Wechselwirkung begonnen werden. Die Parameter der Theorie sind dabei der in der Pauli-Villars Regularisierung auftretende Cutoff Λ , die Stromquarkmassen m_f und die Kopplungskonstante G welche die Dimension $\frac{1}{\text{Länge}^2}$ besitzt. Um eine dimensionslose Größe für G angeben zu können, die nicht mehr vom Cutoff abhängig ist, wird die Kopplungskonstante mit Λ^2 multipliziert. Die freien Parameter des Modells werden an feste, experimentell zugängliche Werte angepasst. Genauer handelt es sich in diesem Fall um die Kaonenmasse, Pionenmasse, die Pionzerfallskonstante und das Kondensat für die Up-Quarks. Für die Pionenmasse wird $m_\pi = 140$ MeV [4] und für die Pionzerfallskonstante $f_\pi = \frac{130.41}{\sqrt{2}} = 92,21$ MeV [8] verwendet. Die Kaonenmasse wird mit $m_K = 495$ MeV angenommen und stellt in etwa den Mittelwert der experimentellen Werte für die einzelnen Massen von \bar{K} , K^0 und K^\pm dar [8]. Das Quark-Kondensat ist in dieser Gruppe die am schlechtesten experimentell reproduzierbare Größe und liegt im Bereich $200 \lesssim |\langle \bar{u}u \rangle|^{\frac{1}{3}} \lesssim 300$ MeV [2, 3, 4]. Diese Grenzen sind nicht fest, sondern geben nur eine Tendenz an.

Zur Erzeugung der Parameter werden die Gleichungen (5.36), (5.38), (6.17), (6.20) und (6.29) simultan mit den oben angegebenen festen Werten für f_π , m_π und m_K gelöst und dabei das Kondensat leicht variiert.

Tabelle 1: Parametersätze für feste Werte von $m_\pi = 140$ MeV, $m_K = 495$ MeV und $f_\pi = 92.21$ MeV.

	[A]	[B]	[C]	[D]	[E]	[F]
m_u (MeV)	8,952	7,802	6,845	6,04	5,356	4,512
M_u (MeV)	412,301	310,412	274,164	251,785	235,893	218,674
m_s (MeV)	200,687	184,859	169,553	155,534	142,787	125,865
M_s (MeV)	616,865	545,23	520,573	505,417	494,631	482,878
Λ (MeV)	621,569	683,06	742,432	802,817	864,6	960,104
$G\Lambda^2$	4,207	3,315	3,028	2,864	2,757	2,652
$g_{\pi\bar{q}q}$	4,397	3,292	2,901	2,66	2,489	2,305
$g_{K\bar{q}q}$	4,703	3,544	3,119	2,853	2,663	2,455
$\langle \bar{u}u \rangle^{\frac{1}{3}}$ (MeV)	-210	-220	-230	-240	-250	-265
$\langle \bar{s}s \rangle^{\frac{1}{3}}$ (MeV)	-212,203	-233,191	-251,862	-269,996	-287,835	-314,215
m_π (MeV)	140	140	140	140	140	140
m_K (MeV)	495	495	495	495	495	495

Die Kaonzerfallskonstante wird nicht als fester Parameter verwendet und ist in Tabelle 2 jeweils für Parametersätze [A]-[F] angegeben. Experimentell ergibt sich für die Kaonzerfallskonstante $f_K = \frac{156.1}{\sqrt{2}} = 110,4$ MeV [8].

Tabelle 2: Zerfallskonstanten des Pions und Kaons errechnet für die Parametersätze [A]-[F] aus Tabelle 1.

	[A]	[B]	[C]	[D]	[E]	[F]
f_π (MeV)	92,214	92,214	92,214	92,214	92,214	92,214
f_K (MeV)	94,912	102,316	107,338	111,562	115,267	120,123
f_K/f_π	1,029	1,109	1,164	1,209	1,25	1,302

Der Wert für den Quotienten von f_K und f_{π^-} wird von der Particle Data Group angegeben mit [8]:

$$\frac{f_{K^-}}{f_{\pi^-}} = 1,197 \pm 0,002 \pm 0,006 \pm 0,001 \quad (6.31)$$

Besonders die Parametersätze [C] und [D] liegen in diesem Bereich. Für die nun folgenden Abbildungen wird immer Parametersatz [D] verwendet.

Durch Variation des Cutoffs Λ und erneutes Lösen des Gleichungssystems, ergeben sich Konstituentenmassen M_s und M_u . Trägt man diese als Funktion von Λ auf, so zeigt sich, dass ab einem Cutoff von ca. 610 MeV keine korrekten Werte für die Konstituentenmassen ausgegeben werden.

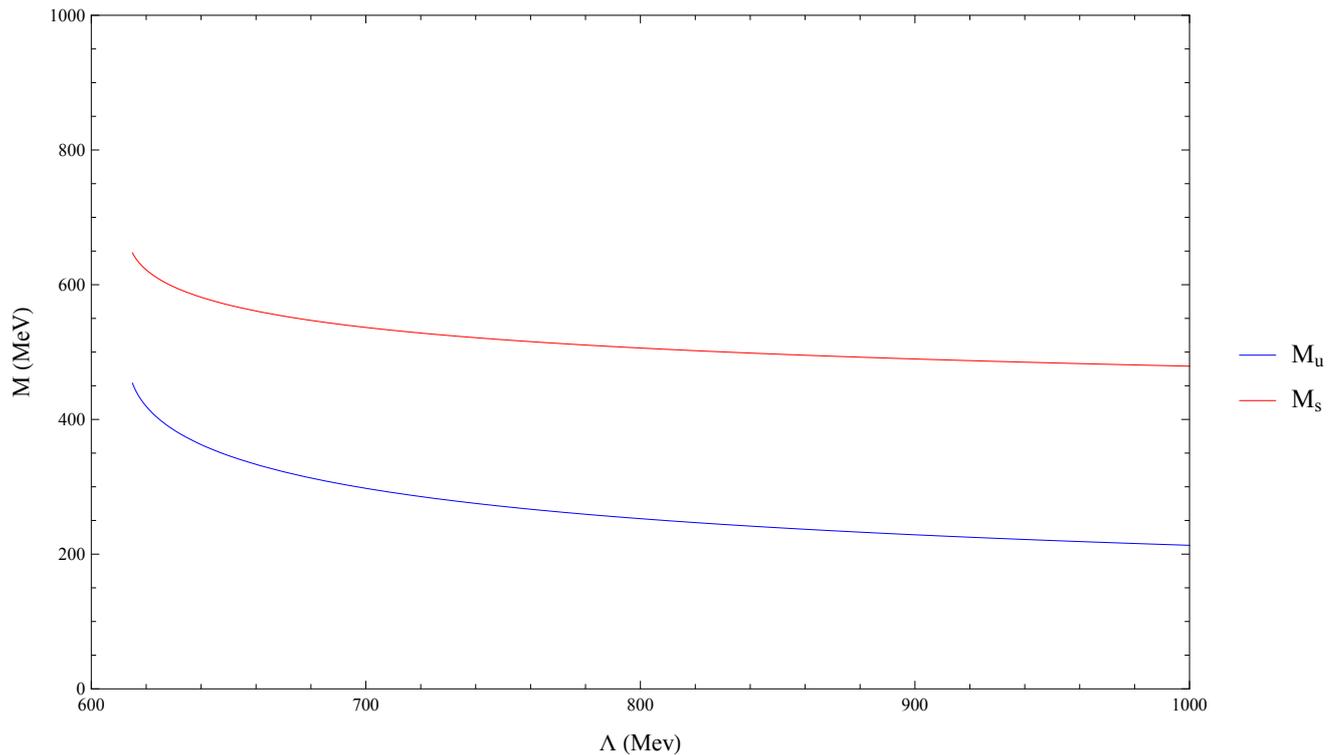


Abbildung 19: Stellt man die Werte der Konstituentenmasse M_f gegen Λ grafisch dar, so erhält man den obigen Verlauf. Eigentlich sollte sich die Masse wie in Abbildung 20 verhalten. Lediglich der untere Zweig kann reproduziert werden, was sich auf Probleme mit dem verwendete numerische Verfahren zurückführen lässt.

Eigentlich wäre ein Verlauf gemäß

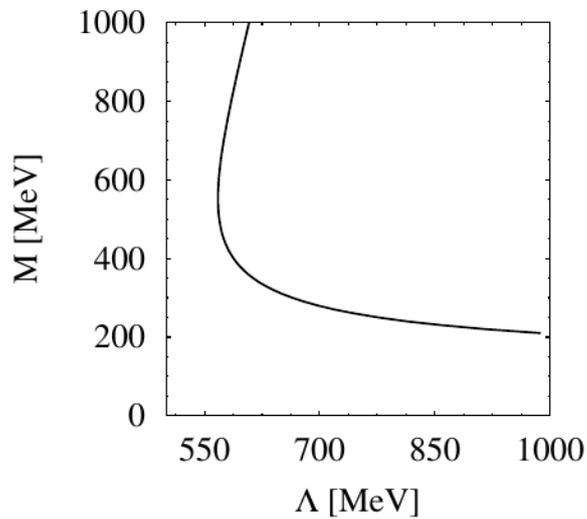


Abbildung 20: Konstituentenmasse über Cutoff Λ [2]: Der Verlauf zeigt, dass ein minimaler Cutoff Λ existiert. Als Regularisierungsschema für die Integrale wurden im Gegensatz zu dieser Arbeit ein 3D-Cutoff verwendet.

zu erwarten. Für die Kondensate folgt dann die Existenz eines minimalen Wertes, wie in Abbildung 21 dargestellt.

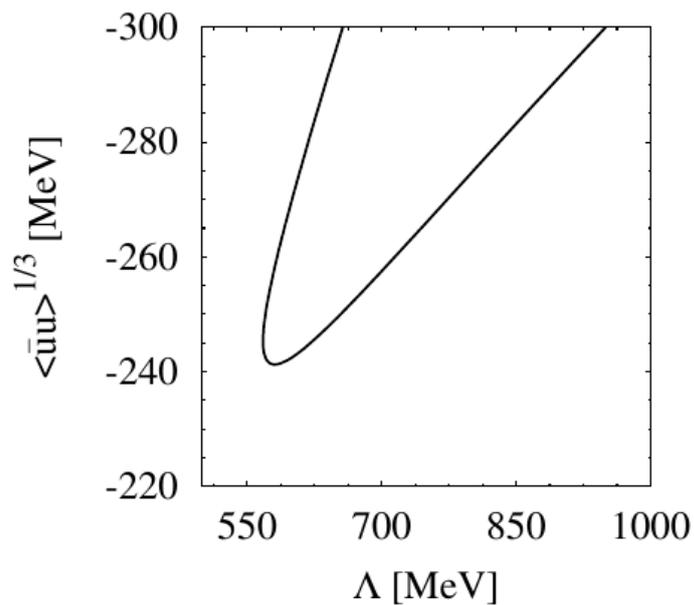


Abbildung 21: Kondensat der Up-Quarks über Cutoff Λ [2]: Dem Verlauf der Kurve ist die Existenz eines minimalen Kondensates zu entnehmen. Als Regularisierungsschema für die Integrale wurden im Gegensatz zu dieser Arbeit ein 3D-Cutoff verwendet.

Die in dieser Arbeit verwendeten numerischen Verfahren von Mathematica 9.0 des Unternehmens Wolfram Research sind jedoch nicht in der Lage den oberen Zweig aus Abbildung 20 zu reproduzieren. Der untere Zweig hingegen ist gut zu erkennen. Da alle berechneten Parametersätze auf dem unteren Zweig liegen, kann man davon ausgehen, dass keine Korruption durch das verwendete numerische Verfahren vorliegt. Dies zeigen auch folgende Abbildungen:

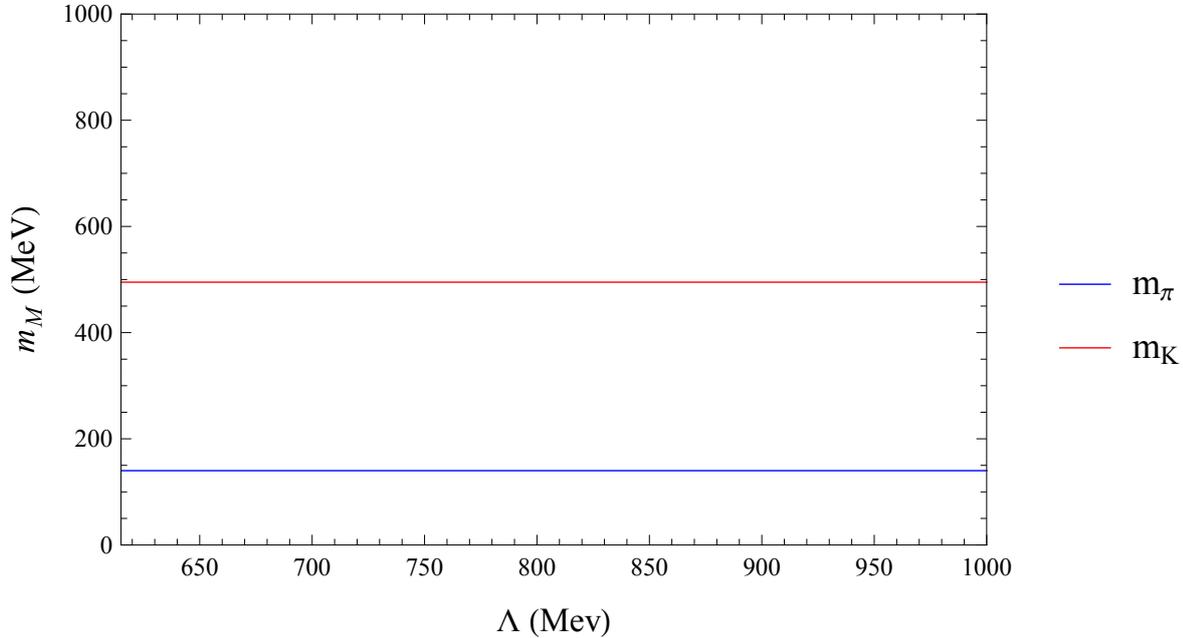


Abbildung 22: Die Mesonenmassen sind im betrachteten Bereich für Λ stabil reproduzierbar.

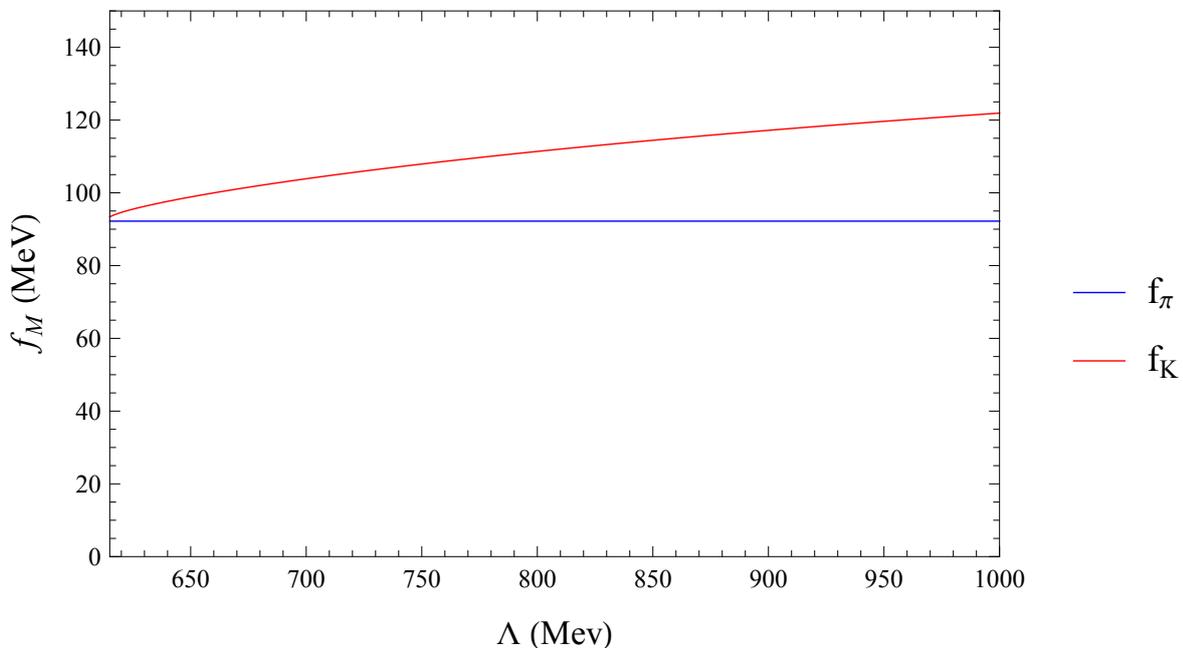


Abbildung 23: Für die Pionzerfallskonstante ergibt sich ein ähnliches Verhalten wie bei der Pionmasse. Die Kaonzerfallskonstante steigt fast linear zum Cutoff an, da dieser Wert nicht fixiert wurde.

Die neu errechneten Werte für die Pionenmasse und die Pionzerfallskonstante sind bis zu dem oben erwähnten kritischen Cutoff von $\Lambda \approx 610$ MeV konstant und somit numerisch stabil.

Ein interessantes Verhalten zeigt sich in Abbildung 23: Anscheinend existiert ein Cutoff Λ_{Zerfall} , an dem die Zerfallskonstante für das Pion und Kaon identisch sind. Dies fällt bereits bei Parametersatz [A] auf, bei dem beide Zerfallskonstanten bereits sehr dicht beieinander liegen.

Vergleicht man die Ausdrücke der Zerfallskonstanten (Gleichungen (6.29) und (6.30)) so stimmen diese im Fall $M_u = M_s$ überein, wenn $g_{\pi\bar{q}q} = g_{K\bar{q}q}$ gilt. Bei der Diskussion der Integrale I_2 und I_3 wurde bereits angemerkt, dass I_3 in I_2 übergeht, wenn beide Konstituentenmassen übereinstimmen. Das es einen Punkt mit $M_s = M_u$ geben kann, ist bereits in Abbildung 19 zu erkennen. Sollte der Verlauf beider Kurven tatsächlich so weitergehen wie in Abbildung 20 gezeigt, sind außerdem die effektiven Meson-Quark Kopplungen $g_{\pi\bar{q}q}$ und $g_{K\bar{q}q}$ gleich, was Abbildung 24 zu entnehmen ist.

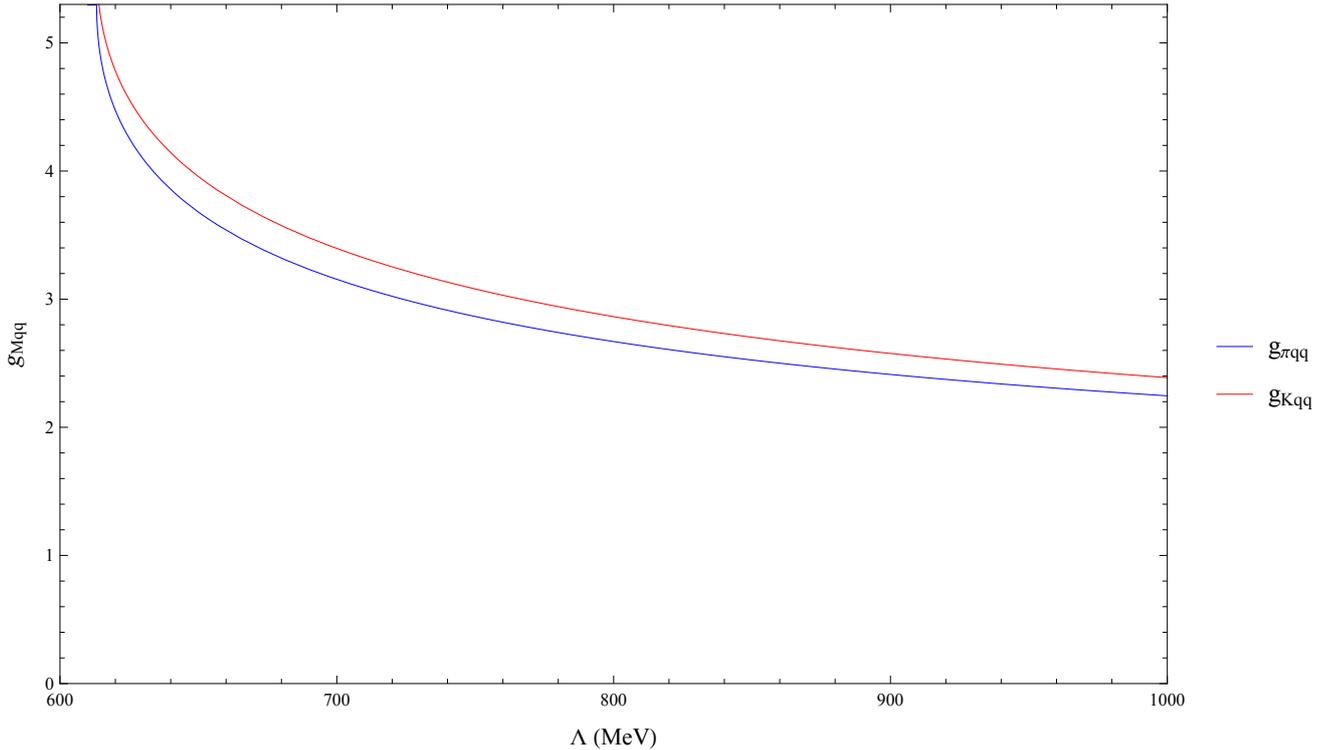


Abbildung 24: Quark-Meson Kopplungen als Funktion des Cutoffs Λ : Die effektiven Kopplungen scheinen ab einem gewissen Λ_{Zerfall} übereinzustimmen.

Auf jeden Fall lässt sich sagen, dass im chiralen Limes, also für verschwindende Stromquarkmassen m_f , beide Zerfallskonstanten identisch sind, da dann $M_s = M_u$ gilt.

6.2 Sechs-Punkt Wechselwirkung

Um sicher zu stellen, dass die $U(1)_A$ wie in der Natur gebrochen ist, ist es notwendig zur reinen Vier-Punkt Wechselwirkung einen Term in der Lagrangedichte hinzuzufügen. Für die Mesonen folgt dann, dass es im chiralen Limes insgesamt acht Goldstone-Bosonen geben muss. Das η' ist dann kein Goldstone-Boson mehr und besitzt auch im chiralen Limes eine von Null verschiedene Masse. Der zusätzliche Term in der Lagrangedichte des NJL-Modells muss minimal den Charakter eines Sechs-Punkt Vertex besitzen und ist in Gleichung (6.32) zu finden [6].

$$\mathcal{L}_{\text{NJL}}^{\text{6-Punkt}} = -K [\det_{\text{flavour}} (\bar{q}(1 + \gamma_5)q) + \det_{\text{flavour}} (\bar{q}(1 - \gamma_5)q)] \quad (6.32)$$

Auf Quarkebene wurde die Sechs-Punkt Wechselwirkung, genau wie die Vier-Punkt Wechselwirkung, mit Hilfe der MFA, in eine effektive Zwei-Punkt Wechselwirkung transformiert, woraus sich der Anteil

der Eigenwechselwirkung Σ ergeben hat. Zur Beschreibung von Mesonen ist es notwendig, die Sechspunkt Wechselwirkung in eine effektive Vier-Punkt Wechselwirkung umzuschreiben. Dies ergibt sich aus der Struktur der Streumatrix $i\mathcal{T}$ aus Kapitel 6.1. Im Gegensatz zur Quarkenebene werden für die Umwandlung in eine effektive Vier-Punkt Wechselwirkung die nächst höhere Ordnung der Fluktuation $\delta_{\bar{q}_f q_f}$ betrachtet. Hierzu setzt man in Gleichung (5.39) aus Abschnitt 5.4

$$\bar{q}_f q_f = \langle \bar{q}_f q_f \rangle + \delta_{\bar{q}_f q_f} \quad (6.33)$$

ein und vernachlässigt die Terme $\propto (\delta_{\bar{q}_f q_f})^3$ und höherer Ordnung. Man beachte, dass dies jeweils für die in Abschnitt 5.4 definierten Operatoren A^\pm durchzuführen ist. Während dieser Rechnung treten auch Terme auf, welche $\propto \gamma_5$ sind. Für diese Terme gilt:

$$\bar{q}_f \gamma_5 q_f = \delta_{\bar{q}_f \gamma_5 q_f} \quad (6.34)$$

Nach einer langwierigen Rechnung folgt letztendlich für $\mathcal{L}_{\text{NJL}}^{6\text{-Punkt}}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{NJL}}^{6\text{-Punkt}} = 2K (& - \langle \bar{u}u \rangle \langle \bar{d}d \rangle \langle \bar{s}s \rangle + \langle \bar{u}u \rangle \langle \bar{d}d \rangle \bar{s}s + \bar{u}u \langle \bar{d}d \rangle \langle \bar{s}s \rangle + \langle \bar{u}u \rangle \bar{d}d \langle \bar{s}s \rangle \\ & - \bar{u}u \langle \bar{d}d \rangle \bar{s}s - \langle \bar{u}u \rangle \bar{d}d \bar{s}s - \bar{u}u \bar{d}d \langle \bar{s}s \rangle \\ & + \langle \bar{u}u \rangle \bar{d}s \bar{s}d + \bar{u}s \langle \bar{d}d \rangle \bar{s}u + \bar{u}d \bar{d}u \langle \bar{s}s \rangle \\ & - \bar{u} \gamma_5 u \langle \bar{d}d \rangle \bar{s} \gamma_5 s - \bar{u} \gamma_5 u \bar{d} \gamma_5 d \langle \bar{s}s \rangle - \langle \bar{u}u \rangle \bar{d} \gamma_5 d \bar{s} \gamma_5 s \\ & + \langle \bar{u}u \rangle \bar{d} \gamma_5 s \bar{s} \gamma_5 d + \bar{u} \gamma_5 s \langle \bar{d}d \rangle \bar{s} \gamma_5 u + \bar{u} \gamma_5 d \bar{d} \gamma_5 u \langle \bar{s}s \rangle) \end{aligned} \quad (6.35)$$

In den Termen 2 bis 4 ist die Struktur einer effektiven Zwei-Punkt Wechselwirkung zu erkennen, wie sie bei der Betrachtung auf Quarkenebene bereits aufgetaucht ist. Die dann fehlenden Vorfaktoren ergeben sich durch sukzessives Anwenden der MFA und Vernachlässigung der quadratischen Ordnung in den Fluktuationen auf die anderen Terme. Der erste Term stellt das konstante Potenzial dar, in dem sich die Quarks bewegen.

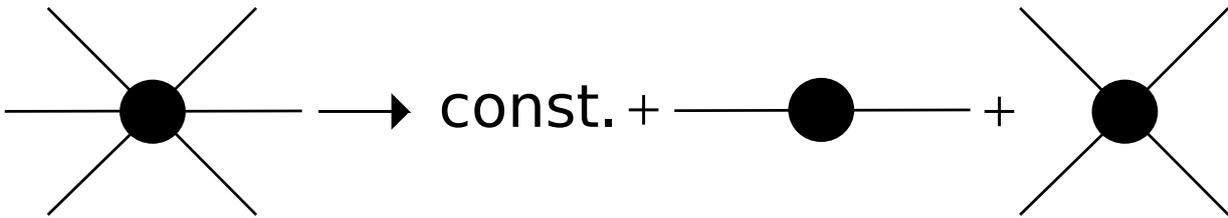


Abbildung 25: Die Sechspunkt Wechselwirkung spaltet sich unter Berücksichtigung der quadratischen Ordnung der Fluktuationen in eine Zwei-Punkt und eine Vier-Punkt Wechselwirkung auf.

Es ist nun möglich Gleichung (6.35) mit Hilfe der Gell-Mann-Matrizen auszudrücken.

Da dies aus zeitlichen Gründen nicht mehr vollständig möglich war, sei an dieser Stelle auf Quelle [3] verwiesen.

7 Zusammenfassung und Ausblick

Aufgrund der Komplexität der QCD-Lagrangedichte wurde das NJL-Modell verwendet, welches die selben Symmetrien aufweist wie die QCD. Bei der Herleitung der Gap-Gleichungen aus der Lagrangedichte des NJL-Modells in der MFA und der anschließenden Untersuchung dieser, stellte sich heraus, dass es bei verschwindenden Stromquarkmassen zur Erzeugung von Kondensaten ab einer kritischen Kopplung aus gebundenen Quarkzuständen kommt. Dieses Verhalten steht im direkten Zusammenhang zum spontanen Bruch der chiralen Symmetrie und dem damit verbundenen chiralen Phasenübergang. Im Anschluss war es möglich das Mesonenspektrum im Drei-Flavour Fall für die reine Vier-Punkt Wechselwirkung mit einem zur MFA konsistenten Näherungsverfahren herzuleiten. Hierzu war es notwendig die Polarisationschleifen für jedes Meson zu berechnen und anschließend in die entsprechende Streumatrix einzusetzen. Die Resonanzzustände der Streumatrizen in Verbindung mit den zuvor berechneten Gap-Gleichungen lieferte dann die Massen der Mesonen. Analog zur Nukleon-Nukleon Wechselwirkung war es möglich eine effektive Kopplungskonstante zwischen Quarks und Mesonen zu definieren und zu bestimmen. Zur Erzeugung der Parametersätze wurden außerdem die Zerfallskanäle genauer untersucht und die Zerfallskonstanten ermittelt. Die Parametersätze ließen sich dann durch Variation des Quark-Kondensates in den hierfür gefundenen experimentellen Grenzen aufstellen und miteinander vergleichen.

Da bei der Berechnung der Mesonenmassen lediglich die reine Vier-Punkt Wechselwirkung betrachtet wurde, wäre die vollständige Untersuchung der Sechs-Punkt Wechselwirkung und deren Einfluss auf die Parametersätze interessant gewesen. Damit verbunden ist die Analyse der Mischzustände aus η^8 und η^0 und die Auswertung von deren Massen. Eine weitere Verbesserung der gesamte Theorie ergibt sich durch die Einbindung von Vektor-Wechselwirkungen und die Betrachtung im Medium. Auch die thermodynamischen Aspekte des NJL-Modells, wie das Verhalten des Kondensates bei nicht verschwindendem chemischen Potenzial und die Temperaturabhängigkeit der Konstituentenmassen der Quarks ließe sich untersuchen. Hiermit verbunden wäre auch die Frage, wie die Massen der Mesonen im Medium von der Temperatur und dem chemischen Potenzial abhängen. All diese Verbesserungen und Erweiterungen benötigen jedoch ein geeigneteres numerisches Verfahren.

Insgesamt zeigt sich, dass es noch viele interessante Themengebiete im NJL-Modell zu untersuchen gibt. Erstaunlich dabei ist, dass sich physikalische Observablen, wie die Mesonenmassen mit Hilfe dieser effektiven Theorie berechnen lassen, obwohl die eigentlich zugrunde liegende Theorie der QCD wesentlich komplexer ist.



8 Anhang

A Verwendete Konventionen

Der in der Arbeit verwendete Minkowski-Raum hat die vierdimensionale Struktur

$$(x_\mu) = \begin{pmatrix} t \\ -x_1 \\ -x_2 \\ -x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ -\vec{x} \end{pmatrix} \quad (\text{A.1})$$

und besitzt als Metrik:

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.2})$$

Griechische Indizes sind dabei Elemente der natürlichen Zahlen von 0-3, während lateinische Buchstaben, wenn nicht anderes angegeben, Werte von 1-8 annehmen können. Gemäß der Einstein'schen Summationskonvention wird über obere und untere griechische Indizes summiert. Da die Dirac-Matrizen eine Clifford-Algebra erfüllen, gilt folgende Antikommutator Relation:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} \cdot \mathbb{1}_{4 \times 4} \quad (\text{A.3})$$

Als Basis-Matrizen der $SU(3)$ werden die Gell-Mann-Matrizen in ihrer kleinsten möglichen Darstellung genutzt:

$$\lambda_0 = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.4})$$

$$\lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.5})$$

$$\lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.6})$$

$$\lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.7})$$

$$\lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad (\text{A.8})$$

Im Gegensatz zu den Dirac-Matrizen bilden die Gell-Mann-Matrizen eine Lie-Algebra und erfüllen eine Kommutator Relation:

$$[\lambda^i, \lambda^j] = \lambda^i \lambda^j - \lambda^j \lambda^i = 2i f_{ijk} \lambda^k \quad (\text{A.9})$$

Wobei f_{ijk} komplett anti-symmetrisch unter Vertauschung zweier Indizes ist und die Strukturkonstanten der Lie-Algebra repräsentieren. Die nicht verschwindenden Strukturkonstanten sind gegeben durch:

$$f_{123} = 1 \quad (\text{A.10})$$

$$f_{213} = -1 \quad (\text{A.11})$$

$$f_{147} = f_{165} = f_{246} = f_{257} = f_{345} = f_{376} = \frac{1}{2} \quad (\text{A.12})$$

$$f_{458} = f_{678} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (\text{A.13})$$

Außerdem werden alle Rechnungen in natürlichen Einheiten, mit

$$c_0 = \hbar = 1 \quad (\text{A.14})$$

durchgeführt.

B Mesonen

B.1 Polarisationschleife der Pionen

Wie in Abschnitt 6 bereits erwähnt, ist der Vakuum Polarisationsloop definiert durch:

$$-i\Pi_{NM}(q^2) = - \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[\tilde{\Gamma}_N iS(p + \frac{q}{2}) \Gamma_M iS(p - \frac{q}{2}) \right] \quad (\text{B.1})$$

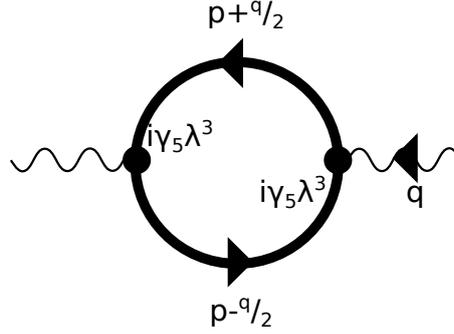


Abbildung 26: Polarisationsloop für das neutrale Pion π^0

Im Folgenden soll die Berechnung des Polarisationschleife für das π^0 durchgeführt werden. Das damit in Verbindung stehende Feynman-Diagramm ist in Abbildung 26 dargestellt. Für die anderen beiden Pionen des Isospin-Tripletts erfolgt die Rechnung analog. Es ergibt sich dann:

$$-i\Pi_{\pi^0}(q^2) = - \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[i\gamma_5\lambda^3 iS\left(p + \frac{q}{2}\right) i\gamma_5\lambda^3 iS\left(p - \frac{q}{2}\right) \right] \quad (\text{B.2})$$

Die Spur $\text{Tr}[\dots]$ ist in Gleichung (B.2) so zu verstehen, dass diese über den Flavour-, Farb- und Dirac-Raum auszuführen ist.

Verwendet man nun die für γ_5 wichtige Relation

$$\gamma_5 S(p) \gamma_5 = S(-p) \quad (\text{B.3})$$

erhält man:

$$-i\Pi_{\pi^0}(q^2) = - \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[i\lambda^3 iS\left(-\left(p + \frac{q}{2}\right)\right) i\lambda^3 iS\left(p - \frac{q}{2}\right) \right] \quad (\text{B.4})$$

$$= - \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[\begin{pmatrix} \tilde{S}^u S^u & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{S}^d S^d & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \quad (\text{B.5})$$

$$= -N_c \text{tr}_{\text{Dirac}} [\tilde{S}^u S^u + \tilde{S}^d S^d] \quad (\text{B.6})$$

Dabei wurde die Abkürzung $\tilde{S}^u := S^u(-p + \frac{q}{2})$ und $S := S(p - \frac{q}{2})$ verwendet. Untersucht man diese Gleichung im Isospin-Limes, also $S^u = S^d$, ergibt sich:

$$-i\Pi_{\pi^0}(q^2) = -2N_c \text{tr}_{\text{Dirac}} [\tilde{S}^u S^u] \quad (\text{B.7})$$

Betrachte $\tilde{S}^u S^u$:

$$S\left(-\left(p + \frac{q}{2}\right)\right) \cdot S\left(p - \frac{q}{2}\right) = \frac{\left(-\not{p} - \frac{q}{2} + M_u\right) \cdot \left(\not{p} - \frac{q}{2} + M_u\right)}{\left[\left(p + \frac{q}{2}\right)^2 - M_u^2\right] \cdot \left[\left(p - \frac{q}{2}\right)^2 - M_u^2\right]} \quad (\text{B.8})$$

Die Auswertung der Spur im Dirac-Raum liefert unter Beachtung, dass $\text{tr}_{\text{Dirac}}[\not{a}] = 0$ und $\text{tr}_{\text{Dirac}}[\not{a}\not{b}] = 4ab$ gilt:

$$\text{tr}_{\text{Dirac}}[\tilde{S}^u S^u] = 4 \frac{-p^2 - \frac{q^2}{4} + M_u^2}{\left[\left(p + \frac{q}{2}\right)^2 - M_u^2\right] \cdot \left[\left(p - \frac{q}{2}\right)^2 - M_u^2\right]} \quad (\text{B.9})$$

Insgesamt erhält man:

$$-i\Pi_{\pi^0}(q^2) = -8N_c \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{-p^2 - \frac{q^2}{4} + M_u^2}{\left[\left(p + \frac{q}{2}\right)^2 - M_u^2\right] \cdot \left[\left(p - \frac{q}{2}\right)^2 - M_u^2\right]} \quad (\text{B.10})$$

Das Integral lässt sich nun mit Hilfe einer Partialbruchzerlegung umschreiben:

$$\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{-p^2 - \frac{q^2}{4} + M_u^2}{\left[\left(p + \frac{q}{2}\right)^2 - M_u^2\right] \cdot \left[\left(p - \frac{q}{2}\right)^2 - M_u^2\right]} \quad (\text{B.11})$$

$$= - \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\left(p + \frac{q}{2}\right)^2 - M_u^2} + \frac{1}{\left(p - \frac{q}{2}\right)^2 - M_u^2} \right) + \frac{q^2}{2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{\left[\left(p + \frac{q}{2}\right)^2 - M_u^2\right] \cdot \left[\left(p - \frac{q}{2}\right)^2 - M_u^2\right]} \quad (\text{B.12})$$

Hieraus folgt, dass sich der Polarisationsloop schreiben lässt als:

$$\begin{aligned} -i\Pi_{\pi^0}(q^2) &= 8N_c \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\left(p + \frac{q}{2}\right)^2 - M_u^2} + \frac{1}{\left(p - \frac{q}{2}\right)^2 - M_u^2} \right) \quad (\text{B.13}) \\ &\quad - 8N_c \frac{q^2}{2} \underbrace{\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{\left[\left(p + \frac{q}{2}\right)^2 - M_u^2\right] \cdot \left[\left(p - \frac{q}{2}\right)^2 - M_u^2\right]}}_{=: I_2(q^2)} \end{aligned}$$

Die beiden Terme des ersten Integrals lassen sich durch geeignete Variablentransformationen ineinander überführen. Insgesamt ergibt sich dann:

$$-i\Pi_{\pi^0}(q^2) = 8N_c \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2 - M_u^2 + i\epsilon} - 4N_c q^2 I_2(q^2) \quad (\text{B.14})$$

$$\implies \Pi_{\pi^0}(q^2) = -2 \frac{1}{M_u} \langle \bar{u}u \rangle - 4N_c q^2 I_2(q^2) \quad (\text{B.15})$$

Die Berechnung der Polarisations Schleifen für das π^\pm liefert im Isospin-Limes das gleiche Ergebnis.

B.2 Polarisations Schleife der Kaonen

Zur Berechnung der Polarisations Schleife der Kaonen ist es notwendig folgendes Feynman Diagramm auszuwerten:

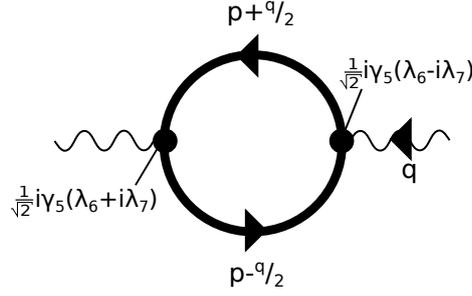


Abbildung 27: Polarisationsloop für das neutrale Kaon \bar{K}^0

Die Rechnung wird wieder beispielhaft für das \bar{K}^0 ausgeführt. Für die anderen Kaonen resultiert durch ein analoges Vorgehen im Isospin-Limes, das gleiche Ergebnis. Die Auswertung von Abbildung 27 mit Definition des Polarisationsloops liefert:

$$-i\Pi_{\bar{K}^0}(q^2) = -\frac{1}{2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[i\gamma_5(\lambda^6 + i\lambda^7) iS(p + \frac{q}{2}) i\gamma_5(\lambda^6 - i\lambda^7) iS(p - \frac{q}{2}) \right] \quad (\text{B.16})$$

$$= -\frac{1}{2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{Tr} [(\lambda^6 + i\lambda^7) \tilde{S}(\lambda^6 - i\lambda^7) S] \quad (\text{B.17})$$

Dabei wurde wieder $\tilde{S} := S(-p + \frac{q}{2})$ und $S := S(p - \frac{q}{2})$ verwendet. Es folgt durch Einsetzen der Gell-Mann-Matrizen:

$$-i\Pi_{\bar{K}^0}(q^2) = -\frac{1}{2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4\tilde{S}^s S^d & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \quad (\text{B.18})$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot 4N_c \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{tr}_{\text{Dirac}} [\tilde{S}^s S^d] \quad (\text{B.19})$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot 4N_c \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{tr}_{\text{Dirac}} \left[\frac{-\not{p} - \frac{q}{2} + M_s}{[(p + \frac{q}{2})^2 - M_s^2]} \cdot \frac{\not{p} - \frac{q}{2} + M_d}{[(p - \frac{q}{2})^2 - M_d^2]} \right] \quad (\text{B.20})$$

$$= -8N_c \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{-p^2 + \frac{q^2}{4} + M_s M_d}{[(p + \frac{q}{2})^2 - M_s^2] \cdot [(p - \frac{q}{2})^2 - M_d^2]} \quad (\text{B.21})$$

An dieser Stelle lässt sich der Bruch wieder durch eine Partialbruchzerlegung aufspalten:

$$\begin{aligned} \Rightarrow -i\Pi_{\bar{K}^0}(q^2) &= 4N_c \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \left(\frac{1}{(p + \frac{q}{2})^2 - M_s^2} + \frac{1}{(p - \frac{q}{2})^2 - M_s^2} \right) \\ &\quad + 4N_c \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{(M_s - M_d)^2}{[(p + \frac{q}{2})^2 - M_s^2] \cdot [(p - \frac{q}{2})^2 - M_d^2]} \\ &\quad - 4N_c \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{q^2}{[(p + \frac{q}{2})^2 - M_s^2] \cdot [(p - \frac{q}{2})^2 - M_d^2]} \end{aligned} \quad (\text{B.22})$$

Aus der Definition

$$I_3(q^2) := \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{\left[(p + \frac{q}{2})^2 - M_s^2\right] \cdot \left[(p - \frac{q}{2})^2 - M_d^2\right]} \quad (\text{B.23})$$

und der Definition des Kondensates sowie der Betrachtung im Isospin-Limes, ergibt sich:

$$-i\Pi_{\bar{K}^0}(q^2) = i\frac{1}{M_s}\langle\bar{s}s\rangle + i\frac{1}{M_u}\langle\bar{u}u\rangle + 4N_c I_3(q^2) \left((M_s - M_u)^2 - q^2\right) \quad (\text{B.24})$$

B.3 Bestimmung der Pionzerfallskonstante

Die Pionzerfallskonstante berechnet sich aus dem Matrixelement

$$\langle 0 | j_a^\mu | \pi_b \rangle =: f_\pi q^\mu \delta_{ab} \quad (\text{B.25})$$

Das dazugehörige Feynman-Diagramm ist in Abbildung 18 gegeben und soll in diesem Abschnitt für das π^0 ausgewertet werden. Entsprechend wird λ_3 für die vorkommenden Gell-Mann-Matrizen verwendet. Es ergibt sich für das Diagramm

$$f_\pi q^\mu = - \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[\gamma_\mu \gamma_5 \frac{\lambda^3}{2} iS\left(p + \frac{q}{2}\right) i g_{\pi qq} \gamma_5 \lambda^3 iS\left(p - \frac{q}{2}\right) \right] \quad (\text{B.26})$$

$$= -\frac{i}{2} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[\gamma_\mu \gamma_5 \lambda^3 S\left(p + \frac{q}{2}\right) g_{\pi qq} \gamma_5 \lambda^3 S\left(p - \frac{q}{2}\right) \right] \quad (\text{B.27})$$

$$= -iN_c g_{\pi qq} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \text{tr}_{\text{Dirac}} [\gamma_\mu \tilde{S}^u S^u] \quad (\text{B.28})$$

mit

$$\tilde{S}^f := S^f \left(-\not{p} - \frac{\not{q}}{2} \right) = \frac{-\not{p} - \frac{\not{q}}{2} + M_f}{\left(\not{p} + \frac{\not{q}}{2}\right)^2 - M_f^2} \quad (\text{B.29})$$

$$S^f := S^f \left(\not{p} - \frac{\not{q}}{2} \right) = \frac{\not{p} - \frac{\not{q}}{2} + M_f}{\left(\not{p} - \frac{\not{q}}{2}\right)^2 - M_f^2} \quad (\text{B.30})$$

und

$$f = u, d, s. \quad (\text{B.31})$$

Für den Zähler des Integrals ergibt sich dann:

$$\text{tr}_{\text{Dirac}} \left[\gamma_\mu \left(-\not{p}^2 + \frac{\not{q}^2}{4} + M_u^2 - \not{q} M_u \right) \right] = -\text{tr}_{\text{Dirac}} [\gamma_\mu \not{q} M_u] \quad (\text{B.32})$$

$$= -4M_u q^\mu \quad (\text{B.33})$$

Dabei wurde verwendet, dass für die Dirac-Matrizen

$$\text{tr}_{\text{Dirac}} [\gamma^\mu \gamma^\nu] = 4g^{\mu\nu} \quad (\text{B.34})$$

gilt. Insgesamt folgt somit für die Pionzerfallskonstante:

$$f_\pi q^\mu = -4N_c g_{\pi qq} M_u q^\mu i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{\left(\left(\not{p} + \frac{\not{q}}{2}\right)^2 - M_u^2\right) \left(\left(\not{p} - \frac{\not{q}}{2}\right)^2 - M_u^2\right)} \quad (\text{B.35})$$

$$= -4N_c g_{\pi qq} M_u q^\mu i I_2(q^2) \quad (\text{B.36})$$

Ein Vergleich beider Seiten liefert dann das Ergebnis, welches in Gleichung (6.29) zu finden ist.

B.4 Bestimmung der Kaonzerfallskonstante

Die Kaonzerfallskonstante f_K ist definiert durch:

$$\langle 0 | j_a^\mu | K_b \rangle =: f_K q^\mu \delta_{ab} \quad (\text{B.37})$$

Die Rechnung verläuft analog wie für die Pionzerfallskonstante. Ein entscheidender Unterschied ist jedoch, dass im Nenner des Integrals zwei unterschiedliche Massen stehen:

$$f_K q^\mu = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[\gamma_\mu \gamma_5 \frac{\lambda^5}{2} iS \left(p + \frac{q}{2} \right) i g_{\pi qq} \gamma_5 \lambda^5 iS \left(p - \frac{q}{2} \right) \right] \quad (\text{B.38})$$

$$= i \frac{1}{2} g_{K\bar{q}q} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \hat{\text{Tr}} [\tilde{S}^s S^u + \tilde{S}^u S^s] \quad (\text{B.39})$$

$$= i \frac{N_c}{2} g_{K\bar{q}q} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{tr}_{\text{Dirac}} \left[\frac{\gamma_\mu (-2p^2 + \not{p}q - q\not{p} + \frac{q^2}{2} - qM_s - qM_u + 2M_s M_u)}{[(p + \frac{q}{2})^2 - M_s^2] \cdot [(p - \frac{q}{2})^2 - M_u^2]} \right] \quad (\text{B.40})$$

Dabei wurde die Linearität des Integrals und eine geeignete Variablentransformation verwendet, wodurch letztendlich beide Summanden in der Spur gleich sind. Die Spur im Dirac-Raum lässt sich nun weiter vereinfachen:

$$f_K q^\mu = i \frac{N_c}{2} g_{K\bar{q}q} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{\text{tr}_{\text{Dirac}} [-\gamma_\mu q (M_s + M_u)]}{[(p + \frac{q}{2})^2 - M_s^2] \cdot [(p - \frac{q}{2})^2 - M_u^2]} \quad (\text{B.41})$$

$$= -2N_c g_{K\bar{q}q} (M_s + M_u) q^\mu i \underbrace{\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{[(p + \frac{q}{2})^2 - M_s^2] \cdot [(p - \frac{q}{2})^2 - M_u^2]}}_{=I_3(q^2)} \quad (\text{B.42})$$

Insgesamt ergibt sich dann für die Kaonzerfallskonstante:

$$f_K = -2N_c g_{K\bar{q}q} (M_s + M_u) i I_3(q^2) \quad (\text{B.43})$$

C Bestimmung des Integrals I_2 und I_3

Bei der Auswertung der Feynman-Diagramme für die Polarisationschleifen trifft man auf zwei divergente Integrale. Diese müssen gemäß Abschnitt 5.2 regularisiert werden, um die auftretenden Divergenzen zu umgehen. Die beiden Integrale lauten:

$$I_3(q^2) := \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{\left[(p + \frac{q}{2})^2 - M_s^2 + i\epsilon\right] \cdot \left[(p - \frac{q}{2})^2 - M_u^2 + i\epsilon\right]} \quad (\text{C.1})$$

$$I_2(q^2) := \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{\left[(p + \frac{q}{2})^2 - M_u^2 + i\epsilon\right] \cdot \left[(p - \frac{q}{2})^2 - M_u^2 + i\epsilon\right]} \quad (\text{C.2})$$

Das Integral I_2 ergibt sich aus I_3 im Falle identischer Massen im Nenner. Es genügt also, das Integral I_3 zu betrachten und anschließend M_s durch M_u zu ersetzen um I_2 zu erhalten. Das in diesem Abschnitt verallgemeinerte Integral I_3 lautet:

$$I_3(q^2) := \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{\left[(p + \frac{q}{2})^2 - M_1^2 + i\epsilon\right] \cdot \left[(p - \frac{q}{2})^2 - M_2^2 + i\epsilon\right]} \quad (\text{C.3})$$

Ähnlich wie in Abschnitt 5.1 lässt sich die p_0 Integration separieren, um im Anschluss den Residuensatz verwenden zu können. Es folgt:

$$iI_3(q^2) = - \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \int \frac{dp_0}{(2i\pi)} \frac{1}{\left(p_0 + \frac{q_0}{2}\right)^2 - E_{\vec{p} + \frac{\vec{q}}{2}, M_1}^2 + i\epsilon} \cdot \frac{1}{\left(p_0 - \frac{q_0}{2}\right)^2 - E_{\vec{p} - \frac{\vec{q}}{2}, M_2}^2 + i\epsilon} \quad (\text{C.4})$$

$$= - \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \int \frac{dp_0}{(2i\pi)} \frac{1}{\left(p_0 + \frac{q_0}{2}\right) - (E_1 - i\epsilon)} \frac{1}{\left(p_0 + \frac{q_0}{2}\right) + (E_1 - i\epsilon)} \odot \quad (\text{C.5})$$

$$\odot \frac{1}{\left(p_0 - \frac{q_0}{2}\right) - (E_2 - i\epsilon)} \frac{1}{\left(p_0 + \frac{q_0}{2}\right) + (E_2 - i\epsilon)}$$

wobei

$$E_1 := E_{\vec{p} + \frac{\vec{q}}{2}, M_1} \quad (\text{C.6})$$

$$E_2 := E_{\vec{p} - \frac{\vec{q}}{2}, M_2} \quad (\text{C.7})$$

definiert wurde. Zwei der Pole liegen in der in Abbildung 28 gezeigten Kontur und tragen somit zum Integral bei. Die beiden Pole müssen jedoch nicht wie dargestellt einen negativen Realteil besitzen, was aus $E_1 \neq E_2$ folgt. Für das Integral I_2 würde dies im Fall $q = 0$ zutreffen, da $E_1 = E_2$ gilt.

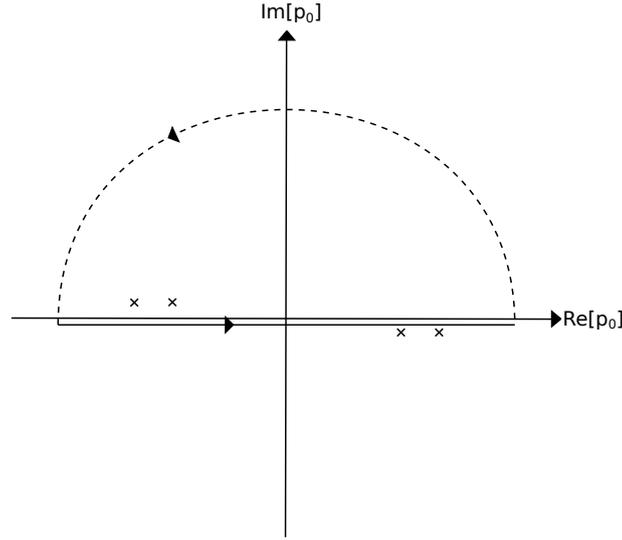


Abbildung 28: Integrationpfad für das Integral $I_3(q^2)$: Die Pole müssen, in Bezug auf deren Realteil, nicht so angeordnet sein wie auf dem Bild zu sehen, da hier der Spezialfall $M_1 = M_2$ betrachtet wurde.

Der Integrand lässt sich umformen um spätere Rechnungen zu vereinfachen. Man erhält:

$$\frac{1}{(p_0 + \frac{q_0}{2}) - (E_1 - i\epsilon)} \frac{1}{(p_0 + \frac{q_0}{2}) + (E_1 - i\epsilon)} \frac{1}{(p_0 - \frac{q_0}{2}) - (E_2 - i\epsilon)} \frac{1}{(p_0 + \frac{q_0}{2}) + (E_2 - i\epsilon)} \quad (\text{C.8})$$

$$= \frac{1}{2E_1} \frac{1}{2E_2} \left(\frac{1}{(p_0 + \frac{q_0}{2}) - E_1 - i\epsilon} - \frac{1}{(p_0 + \frac{q_0}{2}) + E_1 - i\epsilon} \right) \left(\frac{1}{p_0 - \frac{q_0}{2} - E_2 + i\epsilon} - \frac{1}{p_0 - \frac{q_0}{2} + E_2 - i\epsilon} \right)$$

Der Residuensatz liefert dann:

$$iI_3(q^2) = - \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_1} \frac{1}{2E_2} \left(\frac{1}{E_1 + E_2 - q_0 - 2i\epsilon} + \frac{1}{E_1 + E_2 + q_0 - 2i\epsilon} \right) \quad (\text{C.9})$$

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_1} \frac{1}{2E_2} \left(\frac{1}{q_0 - E_1 - E_2 + 2i\epsilon} + \frac{1}{q_0 + E_1 + E_2 - 2i\epsilon} \right) \quad (\text{C.10})$$

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_1} \frac{1}{2E_2} \left(\frac{E_1 + E_2}{q_0^2 - (E_1 + E_2 - 2i\epsilon)^2} \right) \quad (\text{C.11})$$

$$= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left(\frac{1}{2E_1} + \frac{1}{2E_2} \right) \frac{1}{q_0^2 - (E_1 + E_2)^2 + i\epsilon} \quad (\text{C.12})$$

Durch zweimaliges Einsetzen der Substitution $p \rightarrow -p - \frac{q}{2}$ erhält man:

$$iI_3(q^2) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{p},M_2}} \frac{1}{q_0^2 - (E_{\vec{p}+\vec{q},M_1} + E_{\vec{p},M_2})^2 + i\epsilon} + \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{p},M_1}} \frac{1}{q_0^2 - (E_{\vec{p},M_1} + E_{\vec{p}+\vec{q},M_2})^2 + i\epsilon} \quad (\text{C.13})$$

Hieran erkennt man bereits, dass das Integral invariant unter Vertauschung der beiden Massen ist. Diese Eigenschaft wurde bei der Berechnung der Kaonzerfallskonstante bereits verwendet. Weiter lässt sich mit $\vec{q} = 0$ in das Ruhesystem des Mesons wechseln, woraus mit $q_0^2 = q^2$ folgt:

$$iI_3(q^2) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{p},M_2}} \frac{1}{q^2 - (E_{\vec{p},M_1} + E_{\vec{p},M_2})^2 + i\epsilon} + \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_{\vec{p},M_1}} \frac{1}{q^2 - (E_{\vec{p},M_1} + E_{\vec{p},M_2})^2 + i\epsilon} \quad (\text{C.14})$$

Im Fall gleicher Massen $M_1 = M_2 = M$ lässt sich ein Ausdruck für $I_2(q^2)$ angeben:

$$I_2(q^2) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{E_{\vec{p},M}} \frac{1}{q^2 - 4E_{\vec{p},M}^2 + i\epsilon} \quad (\text{C.15})$$

Die Integrale $I_2(q^2)$ und $I_3(q^2)$ lassen sich dann mit dem Regularisierungsverfahren aus Abschnitt 5.2 analytisch lösen. Eine ausführliche Analyse des Integrals I_2 findet sich in [4]. Eine analytische Lösung für das Integral I_3 sei an dieser Stelle nicht gegeben, da die hierfür notwendigen mathematischen Betrachtungen aus zeitlichen Gründen nicht möglich waren.

Die beiden Integrale lassen sich nun auf deren Verhalten entlang der reellen Achse untersuchen. Es stellt sich heraus, dass für das Integral $I_2(q^2)$ der Imaginärteil bei $q^2 > 4M_{u/d}^2$ ungleich Null ist. Für das Integral I_3 ergibt sich ein nicht verschwindender Imaginärteil für $q^2 > (M_s + M_u)^2$. Diese Eigenschaft der Integrale $I_2(q^2)$ und $I_3(q^2)$ hat weitreichende Bedeutung für die Polarisationschleifen und damit für die Propagatoren der Mesonen.

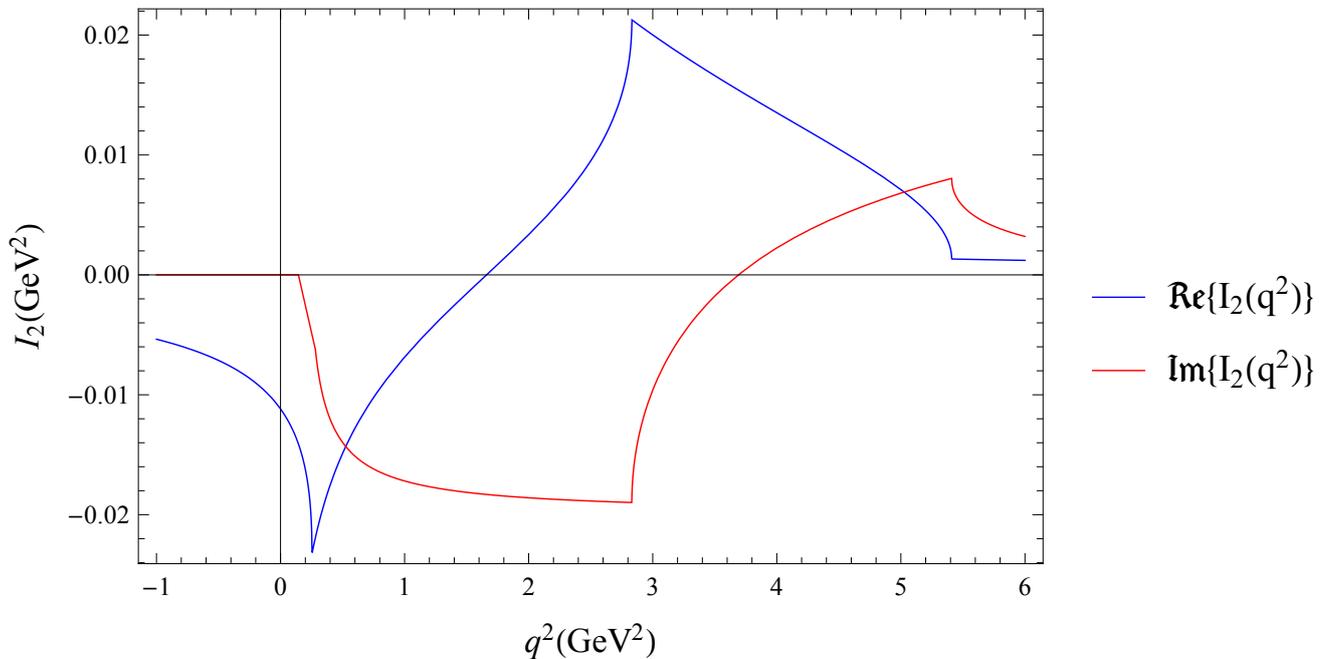


Abbildung 29: Real- und Imaginärteil von $I_2(q^2)$ (Parametersatz [D]): Man erkennt, dass sich ein nicht verschwindender Imaginärteil ab einem gewissen q^2 öffnet.

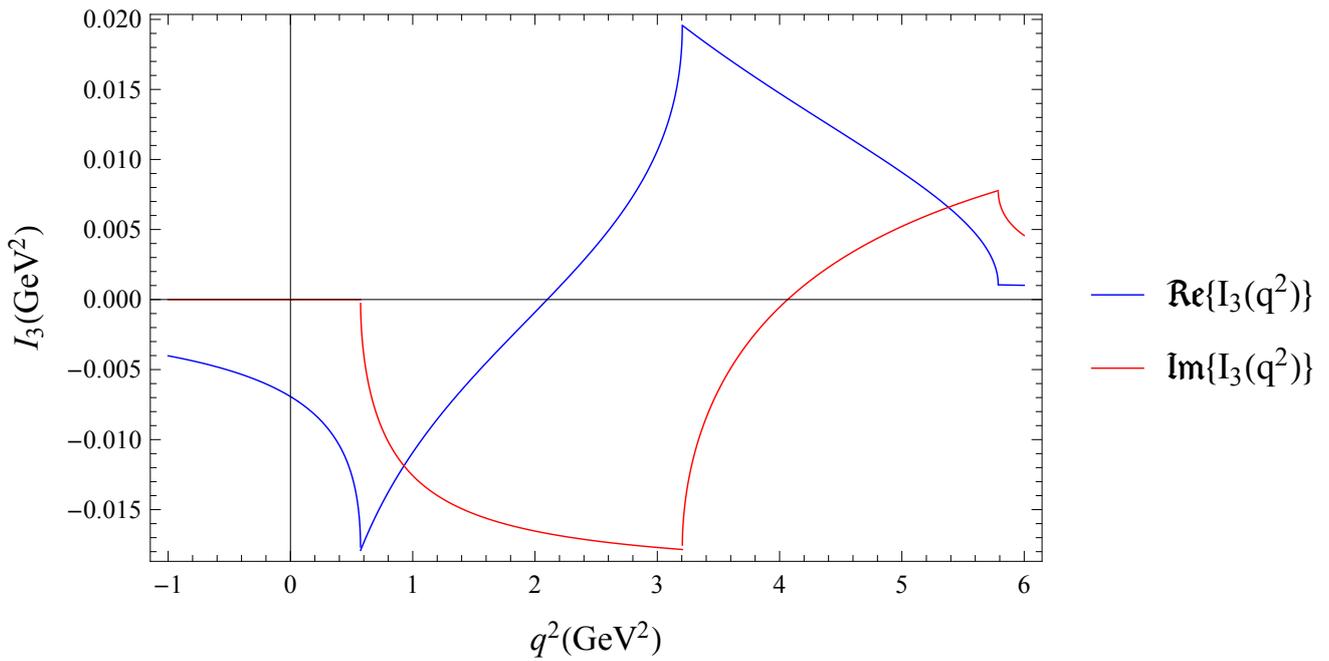


Abbildung 30: Real- und Imaginärteil von $I_3(q^2)$ (Parametersatz [D]): Das Verhalten von I_3 ist analog zu dem von I_2 . Der sich öffnende Imaginärteil des Integrals lässt sich mit einem Zerfallskanal in der Beschreibung der Mesonen identifizieren.

Literatur

- [1] D. Griffiths. *Introduction to Elementary Particles*. Wiley, New York, second edition, 2008.
- [2] M. Buballa. NJL-model analysis of dense quark matter. *Phys. Rept.*, (407):205–376, 2005.
- [3] S.P. Klevansky. The Nambu–Jona-Lasinio model of quantum chromodynamics. *Rev. Mod. Phys.*, (64(3)):649–708, July 1992.
- [4] S. Möller. *Pion-Pion Scattering and Shear Viscosity in the Nambu–Jona-Lasinio Model*. Master-Thesis, Technische Universität Darmstadt, 2012.
- [5] Y. Nambu and G. Jona-Lasinio. Dynamical Model of Elementary Particles Based on an Analogy with Superconductivity. II. *Phys. Rev.*, 124:246–254, Oct 1961.
- [6] B. Hiller A. A. Osipov, A. H. Blin. The 't Hooft determinant resolution of the eta' puzzle. 2004. (arXiv:hep-ph/0410148).
- [7] U. Vogl and W. Weise. The Nambu and Jona-Lasinio Model: Its Implications of Hadrons and Nuclei. *Progress in Particle and Nuclear Physics*, (27):195–272, 1991.
- [8] J. Beringer et al. Review of Particle Physics. *Phys. Rev. D*, 86:010001, Jul 2012.
- [9] D. Scheffler. *NJL model study of the QCD phase diagram using the Taylor series expansion technique*. Bachelor-Thesis, Technische Universität Darmstadt, 2007.
- [10] W. Pauli and F. Villars. On the invariant regularization in relativistic quantum theory. *Reviews of Modern Physics*, 21(3):434, 1949.
- [11] M. E. Peskin and D. V. Schroeder. *An Introduction To Quantum Field Theory*. Westview Press, New York, 1995.
- [12] O. Bohr. *Nichtperturbative Behandlung des linearen $SU(3)_L \otimes SU(3)_R$ - σ -Modells*. Diplomarbeit, Technische Universität Darmstadt, 1997.
- [13] V. Koch. Aspects of chiral symmetry. *International Journal of Modern Physics E*, 6(02):203–249, 1997.
- [14] M. Oertel. *Investigation of meson loop effects in the Nambu-Jona-Lasinio model*. PhD-Thesis, Technische Universität Darmstadt, 2000. (arXiv:hep-ph/0012224).
- [15] S. Klimt, M. F.M. Lutz, U. Vogl, and W. Weise. GENERALIZED SU(3) NAMBU-JONA-LASINIO MODEL. Part. 1. MESONIC MODES. *Nucl.Phys.*, A516:429–468, 1990.
- [16] U. Vogl, M. F.M. Lutz, S. Klimt, and W. Weise. Generalized SU(3) Nambu-Jona-Lasinio Model. Part 2. From Current to Constituent Quarks. *Nucl.Phys.*, A516:469–495, 1990.