
Phasenübergänge im PNJL-Modell bei imaginärem chemischen Potential

Phase transitions in the PNJL model with imaginary chemical potential

Bachelor-Thesis von Tobias Schulz

Oktober 2014



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Fachbereich Physik
Institut für Kernphysik
Theoriezentrum
NHQ-Gruppe

Phasenübergänge im PNJL-Modell bei imaginärem chemischen Potential
Phase transitions in the PNJL model with imaginary chemical potential

Vorgelegte Bachelor-Thesis von Tobias Schulz

1. Gutachten: PD Dr. Michael Buballa
2. Gutachten: Prof. Dr. Jochen Wambach

Tag der Einreichung:

Zusammenfassung

In dieser Arbeit wird das QCD-Phasendiagramm bei reellem und imaginärem chemischen Potential untersucht. Hierzu werden das Nambu–Jona-Lasinio-Modell (NJL-Modell), sowie das um den Polyakov-Loop erweiterte NJL-Modell (PNJL-Modell) für zwei leichte Quark-Flavour verwendet. Das PNJL-Modells bei imaginärem chemischen Potential zeigt sowohl die erweiterte \mathbb{Z}_3 -Symmetrie der QCD wie auch den Roberge-Weiss-Phasenübergang 1. Ordnung. Es werden sowohl der chirale wie auch der Confinement/Deconfinement Phasenübergang, bzw. Crossover analysiert. Zur Charakterisierung der Crossover wird zu Beginn ein Kriterium vorgestellt, welches konsistent während der gesamten Arbeit verwendet wird. Als Ziel sollen die Crossover-Übergänge hinsichtlich ihres Verhaltens für $\mu^2 \rightarrow 0^\pm$ untersucht werden und die Phasendiagramme in der μ^2 - T -Ebene und in der p - T -Ebene dargestellt werden.

Abstract

In this thesis the QCD phase diagram with a real and an imaginary chemical potential is investigated. For this purpose the Nambu–Jona-Lasinio model (NJL-model) and the NJL-model extended by the Polyakov-Loop (PNJL-model) are studied with regard to two lightest quark flavours. The PNJL-model with an imaginary chemical potential shows the extended \mathbb{Z}_3 -symmetry of QCD as well as the Roberge-Weiss first order phase transition. Both the chiral and the confinement/deconfinement phase transition and crossover will be analysed. First of all a criterion for the characterisation of crossovers is given, which will be used consistently throughout this work. The aim of this work is to investigate crossover transitions with regard to their characteristics at $\mu^2 \rightarrow 0^\pm$ and to attain the phase diagrams in the μ^2 - T -plane as well as in the p - T -plane.

Erklärung zur Bachelor-Thesis

Hiermit versichere ich, die vorliegende Bachelor-Thesis ohne Hilfe Dritter nur mit den angegebenen Quellen und Hilfsmitteln angefertigt zu haben. Alle Stellen, die aus Quellen entnommen wurden, sind als solche kenntlich gemacht. Diese Arbeit hat in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner Prüfungsbehörde vorgelegen.

Darmstadt, den 28. Oktober 2014

(Tobias Schulz)

1	Einleitung und Motivation	4
2	Grundlagen der Quantenchromodynamik	5
2.1	Das Phasendiagramm der QCD	5
2.2	Die Lagrange-Dichte der QCD	6
2.3	Symmetrien der QCD	6
3	Das Nambu–Jona-Lasinio-Modell	8
3.1	Lagrange-Dichte	8
3.2	Symmetrien	8
3.3	Berechnung der Konstituentenquarkmasse	9
3.4	Quarks in Materie	11
3.5	Regularisierung	12
3.6	Mean-Field-Näherung	12
3.7	Thermodynamisches Potential	13
4	Das Polyakov-Loop erweiterte Nambu–Jona-Lasinio-Modell	15
4.1	Lagrange-Dichte	15
4.2	Polyakov-Loop	15
4.3	Polyakov-Potential	16
4.4	Symmetrien	16
4.5	Thermodynamisches Potential	17
4.6	Erweiterung zu imaginärem chemischen Potential	17
4.6.1	Symmetrien	17
4.6.2	Thermodynamisches Potential	18
5	Numerische Berechnungen	20
5.1	Parametersätze	20
5.2	Berechnungsverfahren und Crossover-Kriterium	20
5.3	NJL-Modell bei reellem chemischen Potential	21
5.4	NJL-Modell bei imaginärem chemischen Potential	23
5.5	PNJL-Modell bei reellem chemischen Potential	25
5.6	PNJL-Modell bei imaginärem chemischen Potential	26
6	Zusammenfassung und Ausblick	30
7	Anhang	31
7.1	Einheiten und Konventionen	31
7.2	Dirac-Matrizen	31
7.3	SU(N)-Gruppe	31
7.4	Gap-Gleichungen für das NJL-Modell	32
7.4.1	Reelles chemisches Potential	32
7.4.2	Imaginäres chemisches Potential	32
7.5	Gap-Gleichungen für das PNJL-Modell	32
7.5.1	Reelles chemisches Potential	32
7.5.2	Imaginäres chemisches Potential	33
7.6	Berechnung des Integrals I_1	33
7.7	Berechnung des Integrals I_2	35

1 Einleitung und Motivation

Kurz nach dem Urknall befand sich das Universum in einem Zustand unvorstellbar hoher Dichte und Temperatur und war gefüllt mit einem Gemisch ultrarelativistischer Elementarteilchen, darunter hauptsächlich Quarks und Gluonen. In diesem extremen thermodynamischen Zustand war die Bindung zwischen diesen Teilchen so gering, dass sie sich frei bewegen konnten, was heute als „Quark-Gluon-Plasma“ bezeichnet wird [1].

Die Quantenchromodynamik (kurz: QCD) stellt die quantenfeldtheoretische Beschreibung der starken Wechselwirkung dar [2]. Dabei handelt es sich um jene der vier fundamentalen Kräfte der Physik, welche die Wechselwirkungen von Quarks und Gluonen beschreibt. Die Gluonen, bei welchen es sich um masselose Spin-1-Teilchen handelt, stellen dabei die Eichbosonen der starken Wechselwirkung dar.

In dem von M. Gell-Mann und G. Zweig im Jahr 1964 eingeführten Quark-Modell der Teilchenphysik [3, 4] können Quarks in sechs unterschiedlichen Formen, den sogenannten Quark-Flavour, existieren. Diese werden wie folgt benannt: up (u), down (d), strange (s), charm (c), bottom (b) und top (t). Die Untersuchung der Eigenschaften, Wechselwirkungen sowie die äußeren Parameter der Entstehung verschiedener Zustände von Systemen bestehend aus Quarks und Gluonen ist Teil der theoretischen Teilchenphysik. Die hierbei auftretenden Phasen sowie deren Grenzen werden im QCD-Phasendiagramm veranschaulicht und je nach konkretem Bereich im Phasendiagramm mittels verschiedener Verfahren untersucht.

In dieser Arbeit soll das QCD-Phasendiagramm, welches die verschiedenen Phasen von Quark-Materie anschaulich darstellt, studiert werden, wobei sich der Begriff der Quark-Materie auf verschiedene QCD-Phasen bezieht, deren Freiheitsgrade Quarks und Gluonen umfassen. Genauer untersucht werden soll die Phasengrenze zwischen der hadronischen Phase, in welcher Quarks zu Hadronen gebunden sind, sowie der Phase asymptotisch freier Quarks und Gluonen, dem zuvor angesprochenen Quark-Gluon-Plasma. Für reelle endliche chemische Potentiale μ sind auf Grund des „Vorzeichen-Problems“ keine Gitter-QCD (auch Lattice-QCD) Berechnungen möglich, da die Fermionen-Determinante der QCD-Zustandssumme komplexe Werte annimmt. Eine Möglichkeit das Vorzeichen-Problem zu umgehen stellt daher die Berechnung bei imaginärem chemischen Potential dar, wobei versucht wird, die hier auftretenden und betrachteten Übergänge zu reellem chemischen Potential hin analytisch fortzusetzen.

Die Untersuchung verschiedener QCD-Phasen erfolgt im Rahmen dieser Arbeit mit Hilfe eines effektiven Modells der QCD, dem sogenannte Nambu–Jona-Lasinio Modell (kurz: NJL-Modell), welches für die zwei leichtesten Quark-Flavour betrachtet wird. Die Vorteile der Nutzung dieses Modells sind zum einen die Möglichkeit von Berechnungen bei endlichem chemischen Potential und zum anderen die darin enthaltenen Symmetrien, welche gleichzeitig auch in der QCD präsent sind, darunter insbesondere die chirale Symmetrie. Von Nachteil ist die Tatsache, dass das Modell keine Beschreibung des Confinements bereitstellt und Gluonen nicht miteinbezieht.

Daher wird das um den Polyakov-Loop erweiterte NJL-Modell (kurz PNJL-Modell) eingeführt. Die hierbei auftretenden Erwartungswerte des Polyakov-Loops stellen Ordnungsparameter zur Charakterisierung von Phasenübergängen zwischen der Confinement- bzw. Deconfinement-Phase dar. Das PNJL-Modell bei imaginärem chemischen Potential besitzt als weiteren Unterschied zum NJL-Modell die erweiterte \mathbb{Z}_3 -Symmetrie. Die unter dieser Symmetrie invarianten Größen, wie das thermodynamische Potential und das chirale Kondensat, besitzen die sogenannte Roberge-Weiss-Periodizität.

Die im Phasendiagramm auftretenden Phasenübergänge 1. Ordnung werden allgemein durch Unstetigkeiten von Ordnungsparametern, welche sich als 1. Ableitung der Energie, bzw. des großkanonischen Potentials ergeben, charakterisiert. Als Crossover oder Crossover-Übergang wird im engeren Sinne ein stetiger und glatter Verlauf von Ordnungsparametern bezeichnet. Für diese existiert jedoch keine eindeutige Definition, sodass der genaue Verlauf im Phasendiagramm je nach Kriterium abweichen kann. In dieser Arbeit werden daher Crossover-Übergänge für ein konkretes Kriterium untersucht. Dabei werden sowohl der chirale als auch der Confinement/Deconfinement-Übergang betrachtet um schließlich die Phasendiagramme für reelles und imaginäres chemisches Potential zu berechnen. Als weiteres Ziel soll das Phasendiagramm in der p - T -Ebene dargestellt und diskutiert werden.

2 Grundlagen der Quantenchromodynamik

Im folgenden Abschnitt sollen die für diese Arbeit wichtigen und hilfreichen theoretischen Grundlagen und Eigenschaften der QCD, darunter u.a. Symmetrien, Confinement und asymptotische Freiheit kurz angesprochen und erläutert werden. Für eine ausführlichere Beschreibung sei auf die folgende Literatur verwiesen: [2, 5].

2.1 Das Phasendiagramm der QCD

Die Untersuchung von Quark-Materie in ihren verschiedenen Phasen, beispielsweise in der Confined-, bzw. Deconfined-Phase, stellt eine der entscheidenden und größten Herausforderungen der Theorie stark wechselwirkender Materie dar. Dabei werden die Wechselwirkungen von Quarks und Gluonen bei verschiedenen Parametern wie Druck, Temperatur, Volumen oder chemischem Potential, welches bezogen auf die Anzahl an Quarks eines Systems ist, betrachtet. Die verschiedenen Phasen und Phasengrenzen von Materie im Hochenergiebereich werden häufig in einem T - μ -Diagramm veranschaulicht, wobei auch die in diesem Zusammenhang deutlich seltener verwendete Darstellung mittels p - T -Diagramm möglich ist. Letztere Darstellung wird hingegen häufig in der klassischen Thermodynamik verwendet. In Abb. 1 ist eine schematische Darstellung des QCD-Phasendiagramms in einer T - μ -Auftragung dargestellt.

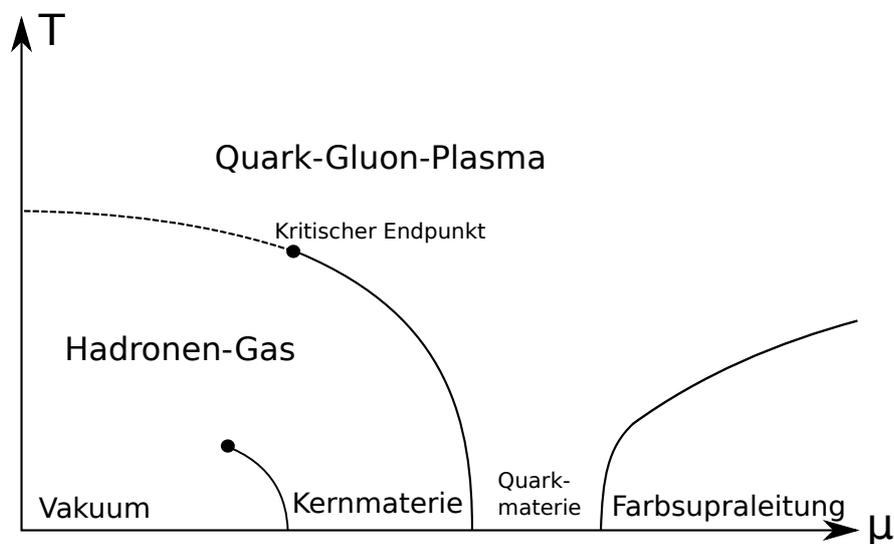


Abbildung 1: Schematische Darstellung des QCD-Phasendiagramms, erstellt gemäß [6].

Grundsätzlich sind bisher viele Bereiche sowie die genauen Phasengrenzen des Phasendiagramms noch nicht hinreichend bekannt. Die meisten Kenntnisse beziehen sich auf den Bereich $\mu = 0$, der mittels Gitter-QCD-Berechnungen untersucht wurde, sowie auf bestimmte Bereiche der Kernmaterie, die mit Hilfe von Kernmodellen wie dem Tröpfchenmodell analysiert werden konnten. Weitere Betrachtungen bezüglich der Phasenübergänge und Crossover beziehen sich auf Ergebnisse der Untersuchungen im Rahmen verschiedener Modelle der QCD.

Der Bereich, in dem $T \simeq 0$ und $\mu < \mu_0 \simeq 310$ MeV sind, entspricht dem Vakuu. Bei $\mu = \mu_0$ findet ein Gas-zu-Flüssigkeit-Phasenübergang vom Vakuu zum Bereich der Kernmaterie statt [7]. Wird bei geringer Temperatur der Bereich größer werdender chemischer Potentiale betrachtet, findet ein Phasenübergang zu farbsupraleitenden Phasen statt. In der hadronischen Phase finden sich Quarks nur in zu Hadronen gebundenen Zuständen wieder. Für große T und kleine μ findet ein Crossover-Übergang zur Phase der ungebundenen Quarks und Gluonen statt, dem Quark-Gluon-Plasma, welcher für größere μ und kleinere T zu einem Phasenübergang 1. Ordnung übergeht. Dieser Phasenübergang selbst besitzt einen kritischen Endpunkt, ab dem für kleiner werdende μ der Crossover beginnt.

Zur Untersuchung des Phasendiagramms gibt es je nach Bereich unterschiedliche Möglichkeiten, diese genauer zu untersuchen. Viele Erkenntnisse konnten durch ab-initio Monte-Carlo-Gitter-Berechnungen erlangt werden [8], die gerade durch die schnelleren Computerprozessoren enorm verbessert werden konnten. Für Bereiche, in denen $\mu > 0$ gilt, werden die Gitter-Berechnungen jedoch problematisch, da die Fermionen-Determinante in der QCD-Zustandssumme komplexe Werte annimmt, was auch als „Vorzeichen-Problem“ bezeichnet wird. Eine Möglichkeit dieses Problem zu umgehen, stellt die Erweiterung zu imaginärem chemischen Potential da $\mu \rightarrow i\mu$, da in diesem Fall die Fermionen-Determinante reell bleibt. Da ein imaginäres chemisches Potential jedoch keinen Bezug zu realen physikalischen Systemen besitzt, werden die Berechnungen zu reellem chemischen Potential extrapoliert und versucht, die Übergänge „analytisch“ fortzusetzen [9].

2.2 Die Lagrange-Dichte der QCD

Die QCD beschreibt die Wechselwirkung von farbgeladenen Teilchen. Diese intrinsische Quantenzahl der Farbladung wurde eingeführt, um das Pauli-Prinzip für fermionische Systeme zu gewährleisten. Jedes Quark kann dabei eine der drei Farbladungen rot (R), grün (G) oder blau (B) tragen. Jedoch können nicht nur Quarks, sondern auch Gluonen eine Farbladung besitzen. Diese Selbstwechselwirkung der Gluonen ist eine besondere Eigenschaft der QCD und verkompliziert deren Beschreibung maßgeblich. In der Natur wurden bisher nur Zustände mit einer nach außen hin farbneutralen „weißen“ Farbladung beobachtet. Die Tatsache, dass Systeme bestehend aus farbgeladenen Teilchen nach außen hin eine neutrale Farbladung besitzen müssen, wird auch als Confinement bezeichnet [5].

Ein wichtiger Schritt zum Verständnis der Struktur der starken Wechselwirkung ist die von D. Gross, F. Wilczek und D. Politzer im Jahr 1973 entdeckte Tatsache, dass jede nicht-abelsche Eichtheorie das Phänomen der asymptotischen Freiheit aufweist [10, 11]. Für diese Erkenntnis wurden sie 2004 mit dem Nobelpreis für Physik ausgezeichnet. Unter der asymptotischen Freiheit versteht man im Wesentlichen die Abnahme der Kopplungsstärke bei kleinen Distanzen, bzw. hohen Impulsen und Energien [12].

Die Lagrange-Dichte der QCD [13] lautet

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = \bar{\psi}(i\cancel{D} - \hat{m})\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu}_a. \quad (2.1)$$

Diese stellt eine spezielle Form der Lagrange-Dichte der Yang-Mills-Theorie basierend auf einer SU(3)-Eichgruppe im Farbraum dar [12]. Weiterhin bezeichnen ψ das Quarkfeld und $\bar{\psi} := \gamma^\dagger \gamma^0$ das adjungierte Quarkfeld. Zudem stellt

$$\hat{m} = \text{diag}(m_u, m_d, m_s, m_c, m_b, m_t) \quad (2.2)$$

die Massenmatrix des Feldes mit den entsprechenden Flavour-Quarkmassen dar und $\cancel{D} := \gamma^\mu D_\mu$ steht für das Skalarprodukt des Vektors der γ -Matrizen mit der kovarianten Ableitung D_μ . Für diese gilt

$$D_\mu = \partial_\mu - i g_c A_\mu^a t^a, \quad (2.3)$$

wobei g_c die Kopplungskonstante der QCD, A_μ^a die acht Eichfelder und t^a die Erzeuger der Eichtransformation, in diesem Fall die acht Gell-Mann-Matrizen λ^a (siehe Abschn. 7.3) darstellen

$$t^a = \frac{\lambda^a}{2}. \quad (2.4)$$

Für den Feldstärketensor, welcher auch die Wechselwirkung der Gluonen untereinander beinhaltet, gilt dann

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c, \quad (2.5)$$

wobei f^{abc} die antisymmetrischen Strukturfaktoren der SU(3)-Gruppe darstellen, welche entsprechend der folgenden Kommutatorrelation mit den Erzeugern der Eichtransformation, bzw. mit den Gell-Mann-Matrizen in Verbindung stehen

$$[t^a, t^b] = i f^{abc} t^c. \quad (2.6)$$

Die Komponenten der Lagrange-Dichte der QCD sind dabei Elemente der drei unterschiedlichen abstrakten Hilberträume, dem Dirac-, Flavour- bzw. Farbraum

$$\mathcal{H}_{\text{QCD}} = \mathcal{H}_{\text{Dirac}} \otimes \mathcal{H}_{\text{Flavour}} \otimes \mathcal{H}_{\text{Farbe}}. \quad (2.7)$$

2.3 Symmetrien der QCD

Die QCD ist eine nicht-abelsche Eichtheorie mit der SU(3)-Gruppe (siehe Abschn. 7.3) als Eichgruppe. Die Lagrange-Dichte \mathcal{L}_{QCD} ist somit symmetrisch unter der folgenden lokalen Eichtransformation im Farbraum

$$\psi \rightarrow U\psi \quad (2.8)$$

$$A_\mu \rightarrow UA_\mu U^{-1} - \frac{i}{g}(\partial_\mu U)U^{-1}, \quad (2.9)$$

wobei

$$U(\theta) = \exp(-i\theta_a(x)t^a), \quad (2.10)$$

die Transformationsmatrix, $\theta_a(x)$ mit $a = 1, 2, \dots, 8$ die Transformationsparameter und t^a (siehe Gl. (2.4)) die Erzeuger der $SU(3)$ -Gruppe darstellen. Weiterhin gilt der folgende Zusammenhang für das Eichfeld

$$A_\mu = t_a A_\mu^a. \quad (2.11)$$

Eine weitere und für die später erfolgenden Betrachtungen im (P)NJL-Modell bedeutende Symmetrie ist die chirale Symmetrie. Hierbei zeigt sich, dass die Lagrange-Dichte symmetrisch unter globalen Vektor- $SU(N_f)_V$ - und Axialvektor- $SU(N_f)_A$ -Transformationen ist

$$SU(N_f)_V : \quad \psi \rightarrow e^{i\theta_a \tau^a} \psi \quad (2.12)$$

$$SU(N_f)_A : \quad \psi \rightarrow e^{i\theta_a \gamma^5 \tau^a} \psi, \quad (2.13)$$

wobei N_f die Anzahl der Quark-Flavour, γ^5 die fünfte Dirac Matrix (siehe Abschn. 7.2) und τ^a die Erzeuger der $SU(N_f)$ -Gruppe bezeichnen. Die chirale Symmetrie ist jedoch keine exakte Symmetrie der QCD, da die Quarkmassen einen endlichen Wert besitzen. Daher ist die chirale Symmetrie explizit gebrochen. Nur im sogenannten chiralen Limes, bei welchem die N_f Quarks verschwindende Massen besitzen, ist die chirale Symmetrie eine exakte Symmetrie der QCD.

Im Vakuum findet zudem eine spontane Brechung der chiralen Symmetrie statt, welche erst im Medium bei hohen Temperaturen und chemischen Potentialen wiederhergestellt wird. Dass die chirale Symmetrie im Vakuum spontan gebrochen ist, erkennt man beispielsweise daran, dass nicht jedes Hadron einen annähernd entarteten „chiralen Partner“ entgegengesetzter Parität besitzt. Als Ordnungsparameter dieser spontanen Symmetriebrechung wird in einem später folgenden Abschnitt das chirale Kondensat eingeführt [9].

3 Das Nambu–Jona-Lasinio-Modell

Das Nambu–Jona-Lasinio-Modell (kurz: NJL-Modell) wurde im Jahr 1961 von Y. Nambu und G. Jona-Lasinio vorgestellt [14, 15]. Ursprünglich sollte das Modell die Wechselwirkung von Nukleonen (Protonen, Neutronen) in Form von Stoßprozessen beschreiben und hatte keinen Bezug zur QCD oder zur Beschreibung von Quarks, welche erst einige Jahre später eingeführt bzw. experimentell bestätigt wurden.

Demnach enthält das NJL-Modell weder eine Beschreibung des Confinement als bedeutenden und charakteristischen Aspekt der QCD, noch bezieht es Gluonen mit ein. Heute wird das Modell als effektives Quarkmodell verwendet und beinhaltet die entscheidenden globalen Symmetrien der QCD, darunter die chirale Symmetrie, verknüpft mit einem erhaltenen Axial-Vektor Noether-Strom. Für die Erhaltung dieser Symmetrie ist jedoch wie bereits zuvor angesprochen ein Verschwinden der Teilchenmassen erforderlich. Nambu und Jona-Lasinio erklärten die großen Nukleonenmassen und gleichzeitige Existenz der chiralen Symmetrie mit Hilfe einer Analogie zur Energielücke des Anregungsspektrums von Elektronen in der BCS-Theorie [16]. Im NJL-Modell entstehen die Nukleonenmassen durch die spontane Brechung der chiralen Symmetrie.

An dieser Stelle sei noch auf das verwendete Einheitensystem (siehe Abschn. 7.1) hingewiesen.

3.1 Lagrange-Dichte

Die Lagrange-Dichte des NJL-Modells für zwei Quark-Flavour ($N_f = 2$) lautet [15]

$$\mathcal{L}_{\text{NJL}} = \bar{\psi}(i\cancel{\partial} - \hat{m})\psi + g[(\bar{\psi}\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma_5\vec{\tau}\psi)^2]. \quad (3.1)$$

Dabei stellen ψ bzw. $\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0$ das Quark- bzw. das adjungierte Quarkfeld dar. Weiterhin bezeichnen \hat{m} die Massenmatrix des Quarkfeldes, g die Kopplungskonstante der Wechselwirkung und $\vec{\tau}$ den Vektor der Pauli-Matrizen im Isospinraum.

Im Falle des Zwei-Flavour-NJL-Modells, in welchem nur die beiden leichtesten Quarkflavour u (up) und d (down) betrachtet werden, gilt für die Massenmatrix

$$\hat{m} = \text{diag}(m_u, m_d). \quad (3.2)$$

Betrachtet man den sogenannten Isospin-Limes, sind die Quarkmassen entartet $m := m_u = m_d$ und die Massenmatrix erhält folgende einfache Gestalt

$$\hat{m}_{\text{is}} = \text{diag}(m, m) = m\mathbb{1}_2 \quad (3.3)$$

Die Lagrangedichte $\mathcal{L}_{\text{NJL}} = \mathcal{L}_{\text{free}} + \mathcal{L}_{\text{int}}$ besteht dabei aus zwei zusammengesetzten Anteilen, dem (freien) Dirac-Anteil

$$\mathcal{L}_{\text{free}} = \bar{\psi}(i\cancel{\partial} - \hat{m})\psi, \quad (3.4)$$

sowie dem Wechselwirkungsanteil

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = g[(\bar{\psi}\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma_5\vec{\tau}\psi)^2]. \quad (3.5)$$

Bei der betrachteten Wechselwirkung handelt es sich um eine Vierpunkt-Quark-Antiquark Wechselwirkung [7] mit zwei unterschiedlichen Wechselwirkungskanälen, entsprechend der beiden Terme im Wechselwirkungsanteil. Zum einen beinhaltet der Wechselwirkungsterm einen skalaren Kanal

$$\Gamma_{\mathbb{1}} : \bar{\psi}\mathbb{1}\psi \quad (3.6)$$

und drei pseudoskalare Kanäle (jeweils ein Kanal für jede der drei Komponenten von $\vec{\tau}$)

$$\Gamma_{i\gamma_5\vec{\tau}} : \bar{\psi}i\gamma_5\vec{\tau}\psi. \quad (3.7)$$

3.2 Symmetrien

Eine der größten Stärken des NJL-Modells ist die Tatsache, dass die wesentlichen Symmetrien der QCD, darunter die chirale Symmetrie, in der ursprünglichen Beschreibung des Modells bereits vorhanden sind. Dies stellt einen der Hauptgründe dar, weshalb das Modell trotz der fehlenden Beschreibung von Confinement und Gluonen dennoch als Modell zur Beschreibung von Quarks verwendet wird. Im Fall des Zwei-Flavour-NJL-Modells ($N_f = 2$) besitzt die NJL-Lagrangedichte

die selben globalen Symmetrien wie die Lagrangedichte der QCD [7]. Kompakt wird die globale Symmetrie der NJL-Lagrangedichte mit zwei Quark-Flavour wie folgt geschrieben

$$U(1)_V \times SU(2)_V \times SU(2)_A. \quad (3.8)$$

Der erste Anteil $U(1)_V$ beschreibt dabei die Invarianz unter einer globalen Phasentransformation der Form

$$\begin{aligned} \psi &\rightarrow \psi e^{-i\theta} \\ \bar{\psi} &\rightarrow \bar{\psi} e^{i\theta}, \end{aligned} \quad (3.9)$$

wobei $\theta \in \mathbb{R}$ ist. Der zweite und dritte Anteil der Symmetrien in Gl. (3.8) beschreiben die chirale Symmetrie, also die Invarianz unter globalen Vektor- $SU(2)_V$ und Axialvektor- $SU(2)_A$ -Transformationen. Die Vektor- $SU(2)_V$ -Transformation, welche nur im Isospin-Limes (vgl. Gl. (3.3)) gültig ist, besitzt dabei die Gestalt

$$\begin{aligned} \psi &\rightarrow \exp\left(-\frac{i}{2}\vec{\tau} \cdot \vec{\theta}\right)\psi \\ \bar{\psi} &\rightarrow \bar{\psi} \exp\left(\frac{i}{2}\vec{\tau} \cdot \vec{\theta}\right), \end{aligned} \quad (3.10)$$

wobei $\vec{\theta} \in \mathbb{R}^3$ ist. Für die Axialvektor- $SU(2)_A$ -Transformation, welche nur im chiralen Limes ($\hat{m} = 0$) exakt ist, lautet die Transformationsvorschrift

$$\begin{aligned} \psi &\rightarrow \exp\left(-\frac{i}{2}\gamma_5 \vec{\tau} \cdot \vec{\theta}\right)\psi \\ \bar{\psi} &\rightarrow \bar{\psi} \exp\left(-\frac{i}{2}\gamma_5 \vec{\tau} \cdot \vec{\theta}\right), \end{aligned} \quad (3.11)$$

wobei erneut $\vec{\theta} \in \mathbb{R}^3$ gilt [7].

3.3 Berechnung der Konstituentenquarkmasse

Auf Grund der Wechselwirkung der Quarks untereinander ist die Konstituentenquarkmasse im Vakuum größer als die nackte Quarkmasse. Die genannte Wechselwirkung wird durch den Wechselwirkungsterm in der Lagrange-Dichte des NJL-Modells (siehe Gl. (3.5)) beschrieben.

Die mit der Wechselwirkung verbundene Selbstenergie wird in Hartree-Näherung berechnet, wobei die zugehörige Dyson-Gleichung in Abb. 2 dargestellt ist [17].

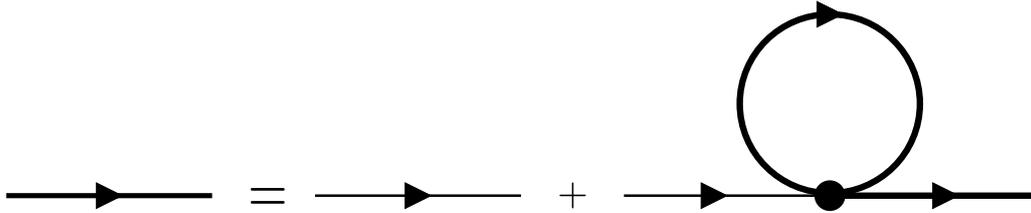


Abbildung 2: Darstellung der Dyson-Gleichung als Feynman-Diagramm mit wechselwirkendem (dicke Linie) und freiem Propagator (dünne Linie).

Der wechselwirkende Quark-Propagator wird als Dirac-Propagator für Fermionen wie folgt eingeführt

$$S(p) = \frac{\not{p} + M}{p^2 - M^2 + i\epsilon}, \quad (3.12)$$

wobei für den freien (nackten) Quark-Propagator folgende Beziehung gilt

$$S_0(p) = \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2 + i\epsilon}. \quad (3.13)$$

Aus der Darstellung der Dyson-Gleichung in Abb. 2 kann die folgende Relation abgelesen werden

$$S(p) = S_0(p) + S_0(p)(\Sigma)S(p). \quad (3.14)$$

Der Beitrag der Selbstenergieschleife wird hierbei durch Σ dargestellt. Durch Multiplikation der obigen Gleichung mit $S_0^{-1}(p)$ von links und mit $S^{-1}(p)$ von rechts erhält man

$$S_0^{-1}(p) = S^{-1}(p) + \Sigma. \quad (3.15)$$

Mit Hilfe der Darstellung der inversen Propagatoren

$$S^{-1}(p) = \not{p} - M \quad (3.16)$$

$$S_0^{-1}(p) = \not{p} - m \quad (3.17)$$

erhält man nun die folgende Darstellung der Konstituenten-Quarkmasse

$$M = m + \Sigma. \quad (3.18)$$

Eine Anwendung der Feynmanregeln auf die Selbstenergieschleife Σ erlaubt deren Berechnung bei bekannter Zusammensetzung der Wechselwirkung, bzw. deren Kanäle. Im Allgemeinen gilt dabei

$$\Sigma = \sum_n 2ig_n \Gamma_n \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Sp}(\Gamma_n S(k)). \quad (3.19)$$

Im oben diskutierten NJL-Modell (siehe Abschn. 3.1) existieren die beiden unterschiedlichen Wechselwirkungskanäle

$$\Gamma_{\mathbb{1}} = \mathbb{1} \quad (3.20)$$

$$\Gamma_{i\gamma_5 \vec{\tau}} = i\gamma_5 \vec{\tau}, \quad (3.21)$$

sodass mit Hilfe von Gl. (3.19) folgende Relation für die Selbstenergie gefolgert werden kann

$$\Sigma = 2ig\Gamma_{\mathbb{1}} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Sp}(\Gamma_{\mathbb{1}} S(k)) + 2ig\Gamma_{i\gamma_5 \vec{\tau}} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Sp}(\Gamma_{i\gamma_5 \vec{\tau}} S(k)) \quad (3.22)$$

$$= 2ig\mathbb{1} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Sp}(\mathbb{1} S(k)) + 2igi\gamma_5 \tau^n \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Sp}(i\gamma_5 \tau^n S(k)), \quad (3.23)$$

wobei $S(k)$ den wechselwirkenden Quark-Propagator (siehe Gl. (3.12)) darstellt. Auf Grund der Tatsache, dass alle Pauli-Matrizen eine verschwindende Spur besitzen, $\text{Sp}(\tau^i) = \text{Sp}(\sigma^i) = 0$, ist der zweite Term von Gl. (3.23) identisch Null

$$\Sigma = 2ig\mathbb{1} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Sp}(\mathbb{1} S(k)) = 2ig\mathbb{1} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Sp}\left(\mathbb{1} \frac{\not{k} + M}{k^2 - M^2 + i\epsilon}\right). \quad (3.24)$$

Gleichzeitig verschwindet auch die Spur über die Dirac-Matrizen (siehe Abschn. 7.2) $\text{Sp}(\gamma^\mu) = 0$ sodass sich letztlich folgender Ausdruck ergibt

$$\Sigma = 2ig \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Sp}\left(\mathbb{1} \frac{M}{k^2 - M^2 + i\epsilon}\right). \quad (3.25)$$

Die Spur-Abbildung wird dabei im Dirac-, Flavour- und Farb-Raum gebildet, sodass sich ein zusätzlicher Faktor von $4N_f N_c$ ergibt

$$\Sigma = 8igMN_f N_c \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - M^2 + i\epsilon}, \quad (3.26)$$

wobei N_f die Zahl der Quark-Flavour und N_c die Zahl der Farbladungen bezeichnen.

Definiert man nun noch das hierbei auftretende uneigentliche Integral

$$I_1 := \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - M^2 + i\epsilon}, \quad (3.27)$$

so ergibt sich die Selbstenergie zu

$$\Sigma = 8igMN_f N_c I_1. \quad (3.28)$$

Das Integral I_1 lässt sich mit Hilfe des Residuensatzes bestimmen (siehe Abschn. 7.6), sodass sich insgesamt folgender Ausdruck ergibt

$$\Sigma = 8igN_f N_c M \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - M^2 + i\epsilon} = 8gMN_f N_c \int_0^\infty \frac{dk}{(2\pi)^2} \frac{k^2}{\sqrt{k^2 + M^2}}. \quad (3.29)$$

Offensichtlich divergiert das Integral auf der rechten Seite von Gl. (3.29), weshalb eine entsprechende Regularisierung vorgenommen werden muss. Dafür existieren unterschiedliche Verfahren, welche in Abschn. 3.5 weiter diskutiert werden. Durch die Berechnung der Selbstenergie kann nun die Gap-Gleichung, welche numerisch gelöst wird, zur Berechnung der Konstituentenquarkmasse aufgestellt werden

$$M = m + 8igMN_f N_c I_1. \quad (3.30)$$

3.4 Quarks in Materie

Die bisherigen Betrachtungen der Dynamik von Quarksystemen bezog sich auf die Situation, dass sich diese Systeme im Vakuum, also bei verschwindender Temperatur und chemischem Potential ($T = \mu = 0$) befinden. Für den Übergang zu endlicher Temperatur werden Formalismen der thermischen Feldtheorie (auch „thermal field theory“) benötigt. Eine ausführliche Darstellung findet man beispielsweise in [18, 19].

Eine der hierfür am häufigsten verwendeten Formalismen ist der sogenannte Matsubara-Formalismus. Hierbei werden die Erwartungswerte von Operatoren im thermischen Ensemble als jene in der gewöhnlichen Quantenfeldtheorie bei imaginärer Zeitentwicklung $\tau = -it$ ($0 \leq \tau \leq \beta$) verwendet, wobei $\beta = 1/T$ gilt [7]. Der Übergang erfolgt dann mittels der Ersetzung des eindimensionalen Impulsintegrals über die nullte Impulskomponente durch eine Summe über die fermionischen Matsubara-Frequenzen

$$\omega_n := (2n + 1)\pi T, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (3.31)$$

sodass für die Integrale die folgende Ersetzung vorgenommen wird

$$i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} f(k^0, \vec{k}) \rightarrow -T \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} f(i\omega_n + \mu, \vec{k}). \quad (3.32)$$

Die Selbstenergie des Quarksystems lässt sich daher folgendermaßen schreiben

$$\Sigma = -8gN_f N_c M T \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(i\omega_n + \mu)^2 - E_k^2 + i\epsilon} \quad (3.33)$$

$$\Sigma = 8gN_f N_c I_2, \quad (3.34)$$

wobei $E_k = \sqrt{\vec{k}^2 + M^2}$ die Teilchenenergie darstellt. Die Berechnung des hierbei auftretenden Ausdrucks

$$I_2 := -T \sum_{n \in \mathbb{N}} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{(i\omega_n + \mu)^2 - E_k^2 + i\epsilon} \quad (3.35)$$

kann in Abschn. 7.7 nachvollzogen werden. Daraus ergibt sich die Selbstenergie zu

$$\Sigma = 8gN_f N_c M \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_k} \left(1 - \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{E_k + \mu}{T}\right)} - \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{E_k - \mu}{T}\right)} \right). \quad (3.36)$$

Nun können die Quark-, bzw. Antiquark-Besetzungszahlen in Anlehnung an die Fermi-Dirac-Verteilungsfunktion angegeben werden

$$n_q(k, \mu, T) := \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{E_k - \mu}{T}\right)} \quad (3.37)$$

$$n_{\bar{q}}(k, \mu, T) := \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{E_k + \mu}{T}\right)}, \quad (3.38)$$

sodass sich die Selbstenergie kompakt zu folgendem Ausdruck ergibt

$$\Sigma = 8gN_f N_c M \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_k} (1 - n_q(k, \mu, T) - n_{\bar{q}}(k, \mu, T)). \quad (3.39)$$

Die in Gl. (3.30) angegebene Gap-Gleichung schreibt sich nun wie folgt

$$M = m + 8gN_f N_c M \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_k} (1 - n_q(k, \mu, T) - n_{\bar{q}}(k, \mu, T)). \quad (3.40)$$

3.5 Regularisierung

Die Tatsache, dass sowohl das NJL-, wie auch das PNJL-Modell nicht renormierbar sind, erfordern eine geeignete Form der Regularisierung divergenter Ausdrücke. Beispielsweise ist das in Gl. (3.27) hergeleitete Integral

$$iI_1 = i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - M^2 + i\epsilon} = \int_0^\infty \frac{dk}{(2\pi)^2} \frac{k^2}{\sqrt{k^2 + M^2}} \quad (3.41)$$

offensichtlich nicht konvergent, sodass dieses mittels entsprechender Methode regularisiert werden muss. Dabei existieren mehrere unterschiedliche Verfahren. Im Rahmen dieser Arbeit soll der 3er-Impuls Cutoff verwendet werden, sodass sich divergente Integralausdrücke der obigen Form wie folgt transformieren

$$\int_0^\infty dk f(k) \rightarrow \int_0^\Lambda dk f(k), \quad (3.42)$$

wobei $\Lambda \in \mathbb{R}$ den sogenannten Cutoff-Parameter darstellt. Mit Hilfe dieser Regularisierung des Integrals bekommt dieses nun einen endlichen Wert und das obige Integral, welches sich analytisch lösen lässt, schreibt sich wie folgt

$$\int_0^\Lambda \frac{dk}{(2\pi)^2} \frac{k^2}{\sqrt{k^2 + M^2}} = \frac{1}{2(2\pi)^2} \left(\Lambda \sqrt{\Lambda^2 + M^2} - M^2 \text{Arsinh} \left(\frac{\Lambda}{M} \right) \right). \quad (3.43)$$

3.6 Mean-Field-Näherung

Mit Hilfe der sogenannten Mean-Field-Näherung lässt sich die Lagrange-Dichte des NJL-Modells linearisieren, indem die Wechselwirkungsanteile von Gl. (3.5) um ihre Erwartungswerte bis zu Fluktuationen erster Ordnung entwickelt werden

$$\bar{\psi}\psi = \langle \bar{\psi}\psi \rangle + \delta_{\bar{\psi}\psi} \quad (3.44)$$

$$\bar{\psi}i\gamma_5\vec{\tau}\psi = \langle \bar{\psi}i\gamma_5\vec{\tau}\psi \rangle + \delta_{\bar{\psi}i\gamma_5\vec{\tau}\psi}. \quad (3.45)$$

Dabei lassen sich die Erwartungswerte für den entsprechenden Wechselwirkungskanal über folgende Relation bestimmen [20]

$$\langle \bar{\psi}\Gamma_n\psi \rangle = -i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Sp}(\Gamma_n S(k)). \quad (3.46)$$

Somit verschwindet erneut der Anteil für $\bar{\psi}i\gamma_5\vec{\tau}\psi$, da dessen Spur verschwindet. Es wird nun das chirale Kondensat $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$ über folgende Relation definiert

$$\sigma := \langle \bar{\psi}\psi \rangle = -i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Sp}(S(k)). \quad (3.47)$$

Somit ist $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$ entsprechend Gln. (3.18) und (3.25) wie folgt mit der Selbstenergie und der nackten Quarkmasse, bzw. der Konstituentenquarkmasse verknüpft

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle = -\frac{\Sigma}{2g} = -\frac{M - m}{2g}. \quad (3.48)$$

Nun kann der Wechselwirkungsteil für den skalaren Kanal entwickelt werden

$$(\bar{\psi}\psi)^2 = (\langle \bar{\psi}\psi \rangle + \delta_{\bar{\psi}\psi})^2 = \langle \bar{\psi}\psi \rangle^2 + 2\langle \bar{\psi}\psi \rangle \delta_{\bar{\psi}\psi} + \delta_{\bar{\psi}\psi}^2 = \langle \bar{\psi}\psi \rangle^2 + 2\langle \bar{\psi}\psi \rangle \delta_{\bar{\psi}\psi} + \mathcal{O}(\delta_{\bar{\psi}\psi}^2). \quad (3.49)$$

Die Fluktuation $\delta_{\bar{\psi}\psi}$ aus Gl. (3.44) wird nun in die obige Gleichung eingesetzt

$$(\bar{\psi}\psi)^2 = \langle \bar{\psi}\psi \rangle^2 + 2\langle \bar{\psi}\psi \rangle (\bar{\psi}\psi - \langle \bar{\psi}\psi \rangle) + \mathcal{O}(\delta_{\bar{\psi}\psi}^2) = -\langle \bar{\psi}\psi \rangle^2 + 2\langle \bar{\psi}\psi \rangle \bar{\psi}\psi + \mathcal{O}(\delta_{\bar{\psi}\psi}^2). \quad (3.50)$$

Somit kann nun die Lagrange-Dichte in Mean-Field-Näherung angegeben werden

$$\mathcal{L}_{\text{NJL}}^{\text{MF}} = \bar{\psi}(i\vec{d} - M)\psi - \frac{(M - m)^2}{4g}. \quad (3.51)$$

Diese besteht nun nur noch aus der Lagrange-Dichte des freien Dirac-Feldes für Fermionen mit der Konstituentenquarkmasse M und einem konstanten Wechselwirkungsterm.

3.7 Thermodynamisches Potential

Im Folgenden soll die Beschreibung eines Quarksystems mittels Formalismen der statistischen Physik, genauer gesagt mit denen der statistischen Ensembles erfolgen. Dazu wird das großkanonische Ensemble verwendet, da das System sowohl einem Energie- als auch einem Teilchenaustausch mit der Umgebung unterliegen kann. Die großkanonische Zustandssumme ist dabei wie folgt definiert

$$Z(T, \mu, V) = \text{Sp} \left(e^{-\beta(H - \mu N)} \right). \quad (3.52)$$

Im Falle einer feldtheoretischen Beschreibung gilt entsprechend für die Zustandssumme

$$Z(T, \mu, V) = \text{Sp} \exp \left(-\beta \int d^3x (\mathcal{H} - \mu \mathcal{N}) \right). \quad (3.53)$$

Dabei stellen \mathcal{H} die Hamilton-Dichte, \mathcal{N} die Teilchenzahldichte, μ das chemische Potential und $\beta = 1/T$ die inverse Temperatur dar. Das großkanonische Potential pro Volumen lässt sich nun wie folgt aus der Zustandssumme ableiten

$$\Omega(T, \mu, V) = -\frac{T}{V} \ln Z(T, \mu, V) = -\frac{T}{V} \ln \text{Sp} \exp \left(-\beta \int d^3x (\mathcal{H} - \mu \mathcal{N}) \right). \quad (3.54)$$

Die Hamilton-Dichte des freien Dirac-Feldes lässt sich dabei wie üblich durch die Legendre-Transformation der Lagrange-Dichte wie folgt bestimmen

$$\mathcal{H} = \pi \dot{\psi} - \mathcal{L} = \bar{\psi} (-i\vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla} + m) \psi. \quad (3.55)$$

Für die Hamilton-Dichte der linearisierten Lagrange-Dichte des NJL-Modells (siehe Gl. (3.51)) gilt dann

$$\mathcal{H}_{\text{NJL}}^{\text{MF}} = \bar{\psi} (-i\vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla} + M) \psi + \frac{(M - m)^2}{4g}. \quad (3.56)$$

Die Teilchenzahldichte stellt die nullte Komponente des Noether-Stroms der $U(1)_V$ -Symmetrie dar, welche mit der Erhaltung der Baryonenzahl zusammenhängt

$$\mathcal{N} = j^0 = \bar{\psi} \gamma^0 \psi, \quad (3.57)$$

Das großkanonische Potential für das NJL-Modell in Mean-Field-Näherung lautet somit

$$\Omega(T, \mu, V, M) = -\frac{T}{V} \ln \text{Sp} \exp \left(-\beta \int d^3x \left(\bar{\psi} (-i\vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla} + m) \psi + \frac{(M - m)^2}{4g} - \mu \bar{\psi} \gamma^0 \psi \right) \right). \quad (3.58)$$

Der Anteil mit dem konstanten Term aus der Hamilton-Dichte in Mean-Field-Näherung kann direkt integriert werden und der Term vereinfacht sich zu

$$\Omega(T, \mu, V, M) = -\frac{T}{V} \ln \text{Sp} \exp \left(-\beta \int d^3x \left(\bar{\psi} (-i\vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla} + m) \psi - \mu \bar{\psi} \gamma^0 \psi \right) \right) + \frac{(M - m)^2}{4g}. \quad (3.59)$$

Das Potential in Gl. (3.59) unterteilt sich nun in einen Anteil für ein freies Fermionengas mit Fermionen der Masse M und in einen Anteil, welcher aus der Mean-Field-Hamilton-Dichte herrührt

$$\Omega(T, \mu, M) = \Omega_{\text{frei}}(T, \mu) + \frac{(M - m)^2}{4g}. \quad (3.60)$$

Das großkanonische Potential für das freie Fermionengas kann in [18] nachgeschlagen werden und besitzt die folgende Gestalt

$$\Omega_{\text{frei}}(T, \mu) = -2N_f N_c \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left(E(p) + T \ln \left(1 + e^{-\frac{E(p) - \mu}{T}} \right) + T \ln \left(1 + e^{-\frac{E(p) + \mu}{T}} \right) \right). \quad (3.61)$$

Damit ergibt sich insgesamt folgende Gleichung für das großkanonische Potential in Mean-Field-Näherung

$$\Omega_{\text{NJL}}(T, \mu, M) = -2N_f N_c \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left(E(p) + T \ln \left(1 + e^{-\frac{E(p) - \mu}{T}} \right) + T \ln \left(1 + e^{-\frac{E(p) + \mu}{T}} \right) \right) + \frac{(M - m)^2}{4g}. \quad (3.62)$$

Wird nun die in Abschn. 3.5 angesprochene Regularisierung des 3er-Impuls Cutoffs ausgeführt, so ergibt sich

$$\Omega_{\text{NJL}}(T, \mu, M) = -\frac{N_f N_c}{\pi^2} \left(\int_0^\Lambda dp p^2 E(p) + \int_0^\infty dp p^2 T \left(\ln \left(1 + e^{-\frac{E(p)-\mu}{T}} \right) + \ln \left(1 + e^{-\frac{E(p)+\mu}{T}} \right) \right) \right) + \frac{(M-m)^2}{4g}. \quad (3.63)$$

Die Regularisierung wird hierbei nur auf den Vakuum-Anteil des Potentials angewendet, da sich für diesen Fall der korrekte Stefan-Boltzmann-Limes für hohe Temperaturen ergibt [21]. Die in Gl. (3.40) angegebene Gap-Gleichung ist dabei äquivalent zu den stationären Punkten des thermodynamischen Potentials. Somit schreibt sich die Gap-Gleichung auch als

$$\frac{\partial \Omega_{\text{NJL}}}{\partial M}(T, \mu, M) = 0. \quad (3.64)$$

Durch die numerische Lösung von Gl. (3.64) für (T, μ) erhält man verschiedene Lösungstriple (T, μ, M) . Die physikalisch stabile Lösung ergibt sich als jene Lösung (T, μ, M) von Gl. (3.64), für die das großkanonische Potential $\Omega(T, \mu, M)$ ein globales Minimum aufweist.

Für das zuvor definierte großkanonische Potential des NJL-Modells Ω_{NJL} ergibt sich der Druck über folgende Relation

$$p(T, \mu, M) = -\Omega_{\text{NJL}}(T, \mu, M) + p_0. \quad (3.65)$$

Soll erreicht werden, dass der Druck p im Vakuumzustand $(T, \mu) = (0, 0)$ verschwindet, so ist $p_0 = \Omega_{\text{NJL}}(0, 0, M)$ und der Druck bestimmt sich über die Gleichung

$$p(T, \mu, M) = -\Omega_{\text{NJL}}(T, \mu, M) + \Omega_{\text{NJL}}(0, 0, M). \quad (3.66)$$

Diese Relation zwischen Potential und Druck wird zur Bestimmung des Phasendiagramms in der p - T -Ebene verwendet.

4 Das Polyakov-Loop erweiterte Nambu–Jona-Lasinio-Modell

Das NJL-Modell bietet für viele Betrachtungen, wie beispielsweise der Untersuchung des chiralen Phasenübergangs oder der Berechnung der Konstituentenquarkmasse, eine ausreichend gute physikalische Beschreibung. Da das Modell jedoch kein Confinement sowie keine Gluonen miteinbezieht, können keine Untersuchungen bezüglich möglicher Confinement/Deconfinement-Übergänge vorgenommen werden. Daher wird im Folgenden das um den Polyakov-Loop erweiterte NJL-Modell, welches auch PNJL-Modell genannt wird, eingeführt und vorgestellt.

4.1 Lagrange-Dichte

Die Lagrange-Dichte des PNJL-Modells für zwei Quark-Flavour wird wie folgt gegeben [22]

$$\mathcal{L}_{\text{PNJL}} = \bar{\psi}(i\not{D} - \hat{m})\psi + g[(\bar{\psi}\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma_5\vec{\tau}\psi)^2] - \mathcal{U}(\Phi, \bar{\Phi}, T). \quad (4.1)$$

Dabei sind die einzelnen Bezeichnungen der Terme analog zum bereits betrachteten NJL-Modell (siehe Abschn. 3.1), wobei nun die kovariante Ableitung mit

$$D_\nu = \partial_\nu + iA_\nu \quad (4.2)$$

und dem modifizierten Eichfeld

$$A_\nu = \delta_\nu^0 g_c A_0^a t^a \quad (4.3)$$

sowie den Erzeugern der SU(3)-Gruppe (siehe Abschn. 7.3) verwendet wird. Dabei bezeichnen A_ν^a das Eichfeld, g_c die Kopplungskonstante der QCD und $\mathcal{U}(\Phi, \bar{\Phi}, T)$ das Polyakov-Potential.

4.2 Polyakov-Loop

Der Polyakov-Loop stellt neben der kovarianten Ableitung die Erweiterung im PNJL-Modell verglichen zum einfachen NJL-Modell dar. Dieser wird wie folgt definiert [23]

$$L(\vec{x}) := \mathcal{P} \exp \left(i \int_0^\beta d\tau A_4(\vec{x}, \tau) \right). \quad (4.4)$$

Dabei bezeichnen \mathcal{P} die Pfadordnung und $\beta = 1/T$ die inverse Temperatur. Weiterhin gilt die folgende Definition

$$A_4(\vec{x}, \tau) := iA_0. \quad (4.5)$$

Der Polyakov-Loop selbst stellt eine Matrix im Farbraum dar. Wie bereits in Gl. (2.7) angesprochen, sind die Komponenten der Lagrangedichte Elemente verschiedener separierter Hilberträume. Daher stellt $A_4(\vec{x}, \tau)$ eine Diagonalmatrix im Flavour-Raum dar. In der Polyakov-Eichung besitzt der Polyakov-Loop $L(\vec{x})$ eine Diagonaldarstellung im Farbraum, die mittels der beiden Gell-Mann-Matrizen λ^3 und λ^8 als Elemente der Erzeuger der SU(3)-Gruppe wie folgt angegeben werden kann [23]

$$L = e^{i\beta(\varphi_3\lambda^3 + \varphi_8\lambda^8)}, \quad (4.6)$$

wobei $\varphi_3, \varphi_8 \in \mathbb{R}$ reelle Parameter darstellen. Einsetzen der Matrixdarstellung der beiden Gell-Mann-Matrizen (siehe Abschn. 7.3) liefert dann die folgende Diagonaldarstellung

$$L = \text{diag}(e^{i\beta\varphi_a}, e^{i\beta\varphi_b}, e^{i\beta\varphi_c}). \quad (4.7)$$

Für die Parameter $\varphi_a, \varphi_b, \varphi_c \in \mathbb{R}$ gelten dann folgende Relationen

$$\begin{aligned} \varphi_a &= \varphi_3 + \frac{\varphi_8}{\sqrt{3}} \\ \varphi_b &= -\varphi_3 + \frac{\varphi_8}{\sqrt{3}} \\ \varphi_c &= -\frac{2}{\sqrt{3}}\varphi_8. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Für die Untersuchung bezüglich der Confinement/Deconfinement-Übergänge werden die Erwartungswerte, genauer gesagt, die Ensemblemittelwerte der Spur des Polyakov-Loops betrachtet, welche in dieser Arbeit wie folgt definiert werden [24]

$$\Phi := \frac{1}{N_c} \langle \text{Sp}(L) \rangle \quad (4.9)$$

$$\bar{\Phi} := \frac{1}{N_c} \langle \text{Sp}(L^\dagger) \rangle, \quad (4.10)$$

wobei $N_c = 3$ die Anzahl der Farbladungen darstellt. Für reelles chemisches Potential werden Φ und $\bar{\Phi}$ im Folgenden als voneinander unabhängige reelle Zahlen behandelt. Dies kann dadurch motiviert werden, dass Φ bzw. $\bar{\Phi}$ mit der freien Energie eines ruhenden Quarks F_q , bzw. Anti-Quarks $F_{\bar{q}}$ in folgender Form verknüpft sind [24]

$$\Phi = \exp\left(-\frac{F_q}{T}\right) \quad (4.11)$$

$$\bar{\Phi} = \exp\left(-\frac{F_{\bar{q}}}{T}\right). \quad (4.12)$$

Für kleine Temperaturen und Dichten befindet sich das System in der Confined-Phase, in welcher Quarks nur in zu Hadronen gebunden Zuständen auftreten. In diesem Fall kann kein isoliertes Quark erzeugt werden und die zugehörige freie Energie wird unendlich groß $F_q = \infty$, sodass $\Phi = 0$ ist. Im Bereich hoher Temperaturen und Dichten legt die asymptotische Freiheit nahe, dass Quarks und Gluonen deconfined werden, sodass die freie Energie endlich wird $F_q < \infty$ und damit $\Phi \neq 0$ gilt.

4.3 Polyakov-Potential

Es gibt unterschiedliche Möglichkeiten für die Parametrisierung des Polyakov-Potentials $\mathcal{U}(\Phi, \bar{\Phi}, T)$. Im Zuge dieser Arbeit wird ein logarithmischer Ansatz der folgenden Form [25]

$$\mathcal{U}(\Phi, \bar{\Phi}, T) = -\frac{a(T)}{2} T^4 \Phi \bar{\Phi} + b(T) T^4 \ln(1 - 6\Phi \bar{\Phi} + 4(\Phi^3 + \bar{\Phi}^3) - 3(\Phi \bar{\Phi})^2) \quad (4.13)$$

verwendet. Die hier auftretenden temperaturabhängigen Funktionen $a(T)$ und $b(T)$ besitzen die folgende Gestalt

$$a(T) = a_0 + a_1 \frac{T_0}{T} + a_2 \left(\frac{T_0}{T}\right)^2 \quad (4.14)$$

$$b(T) = b_3 \left(\frac{T_0}{T}\right)^3. \quad (4.15)$$

Zunächst ist anzumerken, dass die Form des Potentials die Bedingung $\Phi < 1$ vorschreibt, da das Potential andernfalls logarithmisch divergiert. Der Grenzfall $\Phi \rightarrow 1$ tritt dabei nur für $T \rightarrow \infty$ auf. Die in den Funktionen auftretenden Konstanten besitzen die folgenden Werte.

a_0	a_1	a_2	b_3	T_0 in MeV
3,51	-2,47	15,2	-1,75	212

Abbildung 3: Parameter im Polyakov-Potential, entnommen aus [25]

Diese Werte wurden zum einen aus Fits an Daten von Gitter-QCD-Berechnungen im reinen Eichfall, bei dem keine Quarks sondern nur Gluonen betrachtet werden, gewonnen und zum anderen aus dem Verhalten des Polyakov-Loops als Funktion der Temperatur [25]. Die Bedingungen an die Fits sind dabei einerseits der Stefan-Boltzmann-Limes für $T \rightarrow \infty$ und andererseits das Auftreten eines Phasenübergangs 1. Ordnung bei $T = T_0$. Weitere mögliche Parametrisierungen für das Polyakov-Potential sind beispielsweise in [21] beschrieben.

4.4 Symmetrien

Das PNJL-Modell bei reellem chemischen Potential besitzt bis auf die globale $SU(3)_C$ -Symmetrie die gleichen globalen Symmetrien wie das bereits diskutierte NJL-Modell (siehe Abschn. 3.2). Beim PNJL-Modell liegt im chiralen Limes ($\hat{m} = 0$) die folgende exakte globale Symmetrie vor [21]

$$SU(2)_V \times SU(2)_A \times U(1)_V \times SU(3)_C. \quad (4.16)$$

Die chirale Symmetrie ist dabei für endliche Quarkmassen explizit gebrochen. Weiterhin ist sie im Vakuum auch spontan gebrochen (siehe Abschn. 2.3). Das bereits in Gl. (3.47) eingeführte chirale Kondensat $\langle \bar{\psi} \psi \rangle$ dient hierbei im chiralen Limes als exakter Ordnungsparameter für diese spontane Symmetriebrechung und für endliche Quarkmassen als approximativer Ordnungsparameter [21].

4.5 Thermodynamisches Potential

Das großkanonische Potential für das PNJL-Modell lässt sich in ähnlicher Form, wie bereits in Abschn. 3.7 diskutiert, herleiten. Hierbei sei angemerkt, dass die unten angegebene Darstellung nur für den Fall $N_c = 3$ gültig ist. Analog zur Rechnung in Abschn. 3.6 wird das großkanonische Potential in Mean-Field-Näherung angegeben. Bei den Ordnungsparameter handelt es sich um das chirale Kondensat $\sigma = \langle \bar{\psi}\psi \rangle$ und den Polyakov-Loop Φ bzw. $\bar{\Phi}$. Für das reelle PNJL-Modell ergibt sich folgendes Potential

$$\begin{aligned} \Omega_{\text{PNJL}}(T, \mu, \sigma, \Phi, \bar{\Phi}) = & -2N_f \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left[N_c E(p) \right. \\ & + T \ln \left(1 + 3\Phi e^{-\frac{E(p)-\mu}{T}} + 3\bar{\Phi} e^{-2\frac{E(p)-\mu}{T}} + e^{-3\frac{E(p)-\mu}{T}} \right) \\ & \left. + T \ln \left(1 + 3\bar{\Phi} e^{-\frac{E(p)+\mu}{T}} + 3\Phi e^{-2\frac{E(p)+\mu}{T}} + e^{-3\frac{E(p)+\mu}{T}} \right) \right] \\ & + g\sigma^2 + \mathcal{U}(\Phi, \bar{\Phi}, T). \end{aligned} \quad (4.17)$$

Das Polyakov-Potential $\mathcal{U}(\Phi, \bar{\Phi}, T)$ ist dabei wie in Gl. (4.13) angegeben definiert. Als Regularisierung wird erneut der 3er-Impuls-Cutoff-Formalismus (siehe Abschn. 3.6) verwendet, sodass das Potential die folgende Form annimmt

$$\begin{aligned} \Omega_{\text{PNJL}}(T, \mu, \sigma, \Phi, \bar{\Phi}) = & -\frac{N_f N_c}{\pi^2} \int_0^\Lambda dp p^2 E(p) \\ & -\frac{N_f}{\pi^2} \int_0^\infty dp p^2 \left(T \ln \left(1 + 3\Phi e^{-\frac{E(p)-\mu}{T}} + 3\bar{\Phi} e^{-2\frac{E(p)-\mu}{T}} + e^{-3\frac{E(p)-\mu}{T}} \right) \right. \\ & \left. + T \ln \left(1 + 3\bar{\Phi} e^{-\frac{E(p)+\mu}{T}} + 3\Phi e^{-2\frac{E(p)+\mu}{T}} + e^{-3\frac{E(p)+\mu}{T}} \right) \right) \\ & + g\sigma^2 + \mathcal{U}(\Phi, \bar{\Phi}, T). \end{aligned} \quad (4.18)$$

Im Fall des PNJL-Modells existieren im Gegensatz zum NJL-Modell nun drei Gap-Gleichungen statt lediglich einer. Diese werden erneut über die stationären Punkte des großkanonischen Potentials bestimmt und lauten

$$\frac{\partial \Omega_{\text{PNJL}}}{\partial \sigma} = 0, \quad \frac{\partial \Omega_{\text{PNJL}}}{\partial \Phi} = 0, \quad \frac{\partial \Omega_{\text{PNJL}}}{\partial \bar{\Phi}} = 0. \quad (4.19)$$

Wie auch im Fall des NJL-Modells werden für jeden Punkt in der (T, μ) -Ebene die zugehörigen Lösungen $(T, \mu, \sigma, \Phi, \bar{\Phi})$ des obigen Gleichungssystems (Gl. (4.19)) in das großkanonische Potential eingesetzt und die Lösung mit dem kleinsten Wert für das Potential als physikalisch stabile Lösung verwendet. Analog zum NJL-Modell lässt sich der Druck im PNJL-Modell mittels folgender Gleichung bestimmen

$$p(T, \mu, \sigma, \Phi, \bar{\Phi}) = -\Omega_{\text{PNJL}}(T, \mu, \sigma, \Phi, \bar{\Phi}) + \Omega_{\text{PNJL}}(0, 0, \sigma, \Phi, \bar{\Phi}). \quad (4.20)$$

4.6 Erweiterung zu imaginärem chemischen Potential

Das PNJL-Modell soll in dieser Arbeit sowohl bei reellem, als auch bei imaginärem chemischen Potential betrachtet werden. Auf Grund der Form des großkanonischen Potentials (siehe Gl. (4.17)) bietet sich die folgende Ersetzung für das chemische Potential an

$$\mu = i\theta T, \quad (4.21)$$

wobei T die Temperatur darstellt und $\theta \in \mathbb{R}$ den Winkelparameter für das imaginäre chemische Potential bezeichnet.

4.6.1 Symmetrien

Das PNJL-Modell bei imaginärem chemischen Potential weist einige Unterschiede im Vergleich zu reellem chemischen Potential auf, die im Folgenden kurz angesprochen werden sollen. Betrachtet man den reinen Eichfall, also die Abwesenheit von Quarks so zeigt sich, dass die QCD-Lagrangedichte symmetrisch unter einer \mathbb{Z}_N -Transformation ist, wobei

$N = N_c$ die Anzahl der Farbladungen bezeichnet [24]. Diese lässt sich durch die folgende Transformation des komplexen Polyakov-Loops charakterisieren [21]

$$\Phi \rightarrow \Phi e^{-2\pi i k/N}, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (4.22)$$

Die oben genannte \mathbb{Z}_N -Transformation geht jedoch bei der Einbeziehung von Quarks verloren. Jedoch konnten A. Roberge und N. Weiss im Jahr 1986 feststellen, dass die QCD-Zustandssumme $Z(\theta)$ für die erweiterte \mathbb{Z}_N -Transformation in θ periodisch ist, mit der Periodenlänge $2\pi/N$ [?]. Die erweiterte \mathbb{Z}_N -Transformation besteht aus der oben genannten \mathbb{Z}_N -Transformation (siehe Gl. (4.22)) sowie der gleichzeitigen Transformation von

$$\theta \rightarrow \theta + 2\pi k/N. \quad (4.23)$$

Diese erweiterte \mathbb{Z}_N -Transformation wird im Folgenden für den Fall $N_c = 3$ betrachtet. Der Polyakov-Loop ist nicht invariant unter obiger erweiterter \mathbb{Z}_3 -Transformation, da er wie folgt transformiert

$$\begin{aligned} \Phi &\rightarrow \Phi e^{-2\pi i k/3} \\ \bar{\Phi} &\rightarrow \bar{\Phi} e^{2\pi i k/3}. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Definiert man nun jedoch den modifizierten Polyakov-Loop via

$$\begin{aligned} \Psi &:= \Phi e^{i\theta} \\ \bar{\Psi} &:= \bar{\Phi} e^{-i\theta}, \end{aligned} \quad (4.25)$$

so ist diese Größe invariant unter der erweiterten \mathbb{Z}_3 -Transformation

$$\begin{aligned} \Psi &\rightarrow \Phi e^{-2\pi i k/3} e^{i(\theta+2\pi k/3)} = \Phi e^{i\theta} = \Psi \\ \bar{\Psi} &\rightarrow \bar{\Phi} e^{2\pi i k/3} e^{-i(\theta+2\pi k/3)} = \bar{\Phi} e^{-i\theta} = \bar{\Psi}. \end{aligned} \quad (4.26)$$

4.6.2 Thermodynamisches Potential

Betrachtet man ein imaginäres chemisches Potential, so wird der modifizierte Polyakov-Loop Ψ , bzw. $\bar{\Psi}$ verwendet. Entsprechend dessen Definition (siehe Gl. (4.25)) werden im großkanonischen Potential des reellen PNJL-Modells (siehe Gl. (4.18)) folgende Ersetzungen vorgenommen

$$\begin{aligned} \mu &= i\theta T \\ \Phi &= \Psi e^{-i\theta} \\ \bar{\Phi} &= \bar{\Psi} e^{i\theta}. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Das großkanonische Potential bei imaginärem chemischen Potential schreibt sich demnach wie folgt

$$\begin{aligned} \Omega_{\text{PNJL}}(T, \theta, \sigma, \Psi, \bar{\Psi}) &= -\frac{N_f N_c}{\pi^2} \int_0^\Lambda dp p^2 E(p) \\ &\quad -\frac{N_f}{\pi^2} \int_0^\infty dp p^2 \left(T \ln \left(1 + 3\Psi e^{-\frac{E(p)}{T}} + e^{3i\theta} \left(3\bar{\Psi} e^{-2\frac{E(p)}{T}} + e^{-3\frac{E(p)}{T}} \right) \right) \right. \\ &\quad \left. + T \ln \left(1 + 3\bar{\Psi} e^{-\frac{E(p)}{T}} + e^{-3i\theta} \left(3\Psi e^{-2\frac{E(p)}{T}} + e^{-3\frac{E(p)}{T}} \right) \right) \right) \\ &\quad + g\sigma^2 + -\frac{a(T)}{2} T^4 \Psi \bar{\Psi} + b(T) T^4 \ln \left(1 - 6\Psi \bar{\Psi} + 4(\Psi^3 e^{-3i\theta} + \bar{\Psi}^3 e^{3i\theta}) - 3(\Psi \bar{\Psi})^2 \right). \end{aligned} \quad (4.28)$$

In dieser Darstellung ist gut zu erkennen, dass das Potential invariant unter der erweiterten \mathbb{Z}_3 -Transformation ist, da es nur von Größen abhängt, die selbst invariant unter dieser Transformation sind. Dabei handelt es sich um die Größen

Ψ , $\bar{\Psi}$, σ und $e^{\pm 3i\theta}$. Es stellt sich heraus, dass für die Lösungen, die Ω_{PNJL} minimieren, die beiden folgenden Relationen gelten

$$\Psi\left(\theta + \frac{2\pi k}{3}\right) = \Psi(\theta) \quad (4.29)$$

$$\bar{\Psi}\left(\theta + \frac{2\pi k}{3}\right) = \bar{\Psi}(\theta). \quad (4.30)$$

Betrachtet man Transformationen der Form $\theta \rightarrow \theta + 2\pi k/3$, so gilt für das Potential

$$\Omega\left(T, \theta + \frac{2\pi k}{3}, \Psi\left(\theta + \frac{2\pi k}{3}\right), \bar{\Psi}\left(\theta + \frac{2\pi k}{3}\right)\right) = \Omega\left(T, \theta + \frac{2\pi k}{3}, \Psi, \bar{\Psi}\right) \quad (4.31)$$

$$= \Omega(T, \theta, \Psi, \bar{\Psi}), \quad (4.32)$$

da die Abhängigkeit von θ nur in der Form von $e^{\pm 3i\theta}$ auftritt, und dieser Term invariant unter der Transformation $\theta \rightarrow \theta + 2\pi k/3$ ist. Dies stellt die sogenannte Roberge-Weiss-Periodizität da, welche kompakt in folgender Form geschrieben wird

$$\Omega\left(\theta + \frac{2\pi k}{3}\right) = \Omega(\theta). \quad (4.33)$$

Um zu gewährleisten, dass das großkanonische Potential eine reelle Größe darstellt, was auf Grund der physikalischen Realität gewährleistet sein muss, müssen die Ψ und $\bar{\Psi}$ zueinander komplex konjugierte Größen darstellen, sodass $\text{Re}(\Psi) = \text{Re}(\bar{\Psi})$ und $\text{Im}(\Psi) = -\text{Im}(\bar{\Psi})$ erfüllt ist. Auf Grund dieser Tatsache bietet sich eine Darstellung der beiden Größen in Polarkoordinaten an. Als Ordnungsparameter werden nun der Betrag $|\Psi|$ und die zugehörige Phase $\varphi := \arg(\Psi)$ verwendet

$$\Psi = |\Psi|e^{i\varphi} \quad (4.34)$$

$$\bar{\Psi} = |\Psi|e^{-i\varphi}.$$

Das großkanonische Potential schreibt sich dann in der folgenden Form

$$\begin{aligned} \Omega_{\text{PNJL}}(T, \theta, \sigma, |\Psi|, \varphi) = & -\frac{N_f N_c}{\pi^2} \int_0^\Lambda dp p^2 E(p) \quad (4.35) \\ & - \int_0^\infty dp p^2 T \ln \left(1 + e^{-6\frac{E(p)}{T}} + 6|\Psi| \cos(\varphi) \left(e^{-\frac{E(p)}{T}} + e^{-5\frac{E(p)}{T}} \right) \right. \\ & \quad \left. + (9|\Psi|^2 + 6|\Psi| \cos(\varphi - 3\theta)) \left(e^{-2\frac{E(p)}{T}} + e^{-4\frac{E(p)}{T}} \right) \right. \\ & \quad \left. + (18|\Psi|^2 \cos(3\theta - 3\varphi) + 2 \cos(3\theta)) e^{-3\frac{E(p)}{T}} \right) \\ & + g\sigma^2 - \frac{a(T)}{2} T^4 |\Psi|^2 + b(T) T^4 \ln \left(1 - 6|\Psi|^2 + 8|\Psi|^3 \cos(3\varphi - 3\theta) - 3|\Psi|^4 \right). \end{aligned}$$

Es ergeben sich die folgenden Gap-Gleichungen, welche analog zum Fall $\mu \in \mathbb{R}$ (siehe Abschn. 4.5) gelöst werden

$$\frac{\partial \Omega_{\text{PNJL}}}{\partial \sigma} = 0, \quad \frac{\partial \Omega_{\text{PNJL}}}{\partial |\Psi|} = 0, \quad \frac{\partial \Omega_{\text{PNJL}}}{\partial \varphi} = 0. \quad (4.36)$$

5 Numerische Berechnungen

Im folgenden Abschnitt werden die numerischen Ergebnisse der oben diskutierten Inhalte angegeben. Dabei werden zunächst die verwendeten Parametersätze aufgeführt. Anschließend werden die numerischen Berechnungen im Zwei-Flavour NJL-Modell präsentiert und deren Eigenschaften angesprochen. Zum Ende dieses Abschnitts werden die Phasendiagramme in der μ^2 - T - sowie in der p - T -Ebene gezeigt.

Danach werden die Resultate der numerischen Berechnungen im PNJL-Modell diskutiert und die Phasendiagramme in der θ - T und der μ^2 - T -Ebene präsentiert. Auch in diesem Abschnitt wird das Phasendiagramm in der p - T -Ebene besprochen.

5.1 Parametersätze

In den bisherigen Betrachtungen zum Zwei-Flavour-NJL- bzw. PNJL-Modell sind unterschiedliche freie Parameter aufgetreten. Diese werden für die folgenden Berechnungen fixiert. Ein Parametersatz (Λ, m, g) besteht hierbei aus den drei Parametern: Cutoff-Parameter Λ , nackte Quarkmasse m und Kopplungskonstante g . Insgesamt wurden zwei unterschiedliche Parametersätze, entsprechend der beiden betrachteten Modelle, dem NJL- und dem PNJL-Modell verwendet. Zunächst wird der im Zwei-Flavour NJL-Modell verwendete Parametersatz angegeben.

Λ in MeV	m in MeV	$g\Lambda^2$
587,9	5,6	2,44

Abbildung 4: Parametersatz für das Zwei-Flavour NJL-Modell, entnommen aus [9].

Für das Zwei-Flavour PNJL-Modell wurde der folgende Parametersatz verwendet.

Λ in MeV	m in MeV	$g\Lambda^2$
631,5	5,5	2,1925

Abbildung 5: Parametersatz für das Zwei-Flavour PNJL-Modell, entnommen aus [21].

Die Parameter werden dabei für gewöhnlich durch Fits der Pionenmasse, der Pionen-Zerfallskonstante und des Quarkkondensats festgelegt. Dabei sind die Pionenmasse und die Pionen-Zerfallskonstante recht genau bekannt. Große Unsicherheiten ergeben sich jedoch für das Quarkkondensat. Mittels Fits der Pionenmasse und Zerfallskonstante an ihre empirischen Werte, kann Λ bei fixiertem m und g bestimmt werden [9].

Die aufgeführten Parameter bleiben dabei während der gesamten Arbeit unverändert.

5.2 Berechnungsverfahren und Crossover-Kriterium

Für die numerischen Berechnungen wurden stets die dem jeweiligen Modell entsprechenden Gap-Gleichungen und großkanonischen Potentiale verwendet, welche in den Abschn. 7.4 und 7.5 angegeben sind. Dabei wurden stets jene Lösungen der Gap-Gleichungen, welche den minimalen Wert des entsprechenden großkanonischen Potentials aufwiesen, als physikalisch stabile Lösungen verwendet.

Während des gesamten Abschnitts wurde, sofern nicht explizit angesprochen, stets das selbe Kriterium zur Charakterisierung von Crossover-Übergängen verwendet. Hierbei wird ein Crossover als Punkt der stärksten Steigung des entsprechenden Ordnungsparameters bei konstantem μ für reelles chemisches Potential und bei konstantem θ für imaginäres chemisches Potential definiert. Andere Crossover-Kriterien wären jedoch ebenfalls denkbar. Beispielsweise können Kriterien der Form gewählt werden, dass Crossover durch jene Punkte charakterisiert werden, an denen der jeweilige normierte Ordnungsparameter die Hälfte des Maximal- bzw. Vakuumwertes annimmt, oder durch die Punkte der jeweiligen maximalen Suszeptibilitäten [21].

5.3 NJL-Modell bei reellem chemischen Potential

Zunächst wird die Konstituentenquarkmasse M bei reellem chemischen Potential im NJL-Modell numerisch berechnet. Hierfür wird die Formulierung der Gap-Gleichung in Abschn. 7.4.1 verwendet. Die Ergebnisse sind in den folgenden Abbildungen dargestellt.

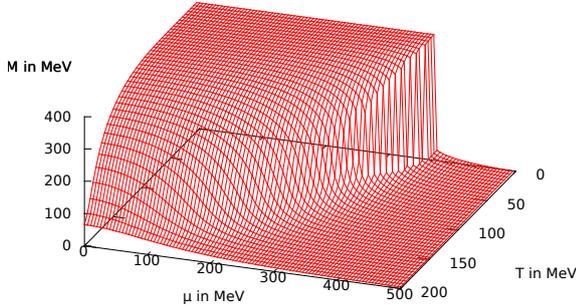


Abbildung 6: Konstituentenquarkmasse in der T - μ -Ebene bei nicht verschwindender nackter Quarkmasse.

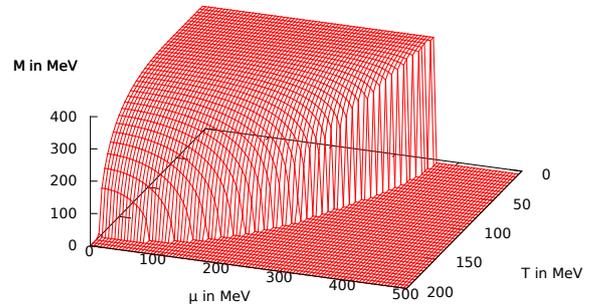


Abbildung 7: Konstituentenquarkmasse in der T - μ -Ebene bei verschwindender nackter Quarkmasse.

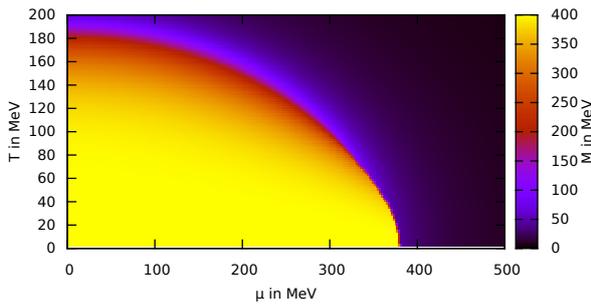


Abbildung 8: Projektion von M auf die T - μ -Ebene bei nicht verschwindender nackter Quarkmasse.

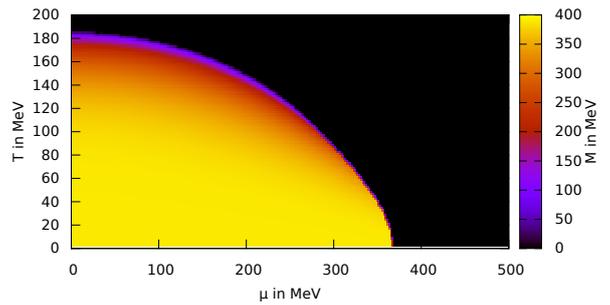


Abbildung 9: Projektion von M auf die T - μ -Ebene bei verschwindender nackter Quarkmasse.

In den Abbildungen 6 und 8 ist der Fall nicht verschwindender nackter Quarkmassen m (siehe Abb. 4) gezeigt. In Abb. 6 ist die Konstituentenquarkmasse M aufgetragen über der T - μ -Ebene. Im Bereich kleiner Werte von T und μ bildet sich ein Plateau mit einem Wert von $M = 399,44$ MeV. Für kleine $T \approx 0$ MeV und große $\mu \approx 380$ MeV findet sich ein Phasenübergang 1. Ordnung, welcher auf der Achse für $T = 0$ bei $\mu = 382,10$ MeV auftritt. Dieser ist in Abb. 6 gut an dem steilen Abfall der Konstituentenquarkmasse M erkennbar. Der Phasenübergang selbst wird durch die Unstetigkeit der Konstituentenquarkmasse bei konstantem T und variablem μ charakterisiert. Der kritische Endpunkt, ab welchem der Phasenübergang 1. Ordnung in einen Crossover übergeht, befindet sich ungefähr bei $(T; \mu) = (82, 90$ MeV; 321 MeV). Ab diesem Punkt weist die Konstituentenquarkmasse bei einem kleineren Wert von μ entlang der Achse mit $\mu = \text{const.}$ keine Unstetigkeiten mehr auf. Der Verlauf ist in diesem Fall kontinuierlich, was auch in Abb. 8 ersichtlich wird.

Die gleichen Betrachtungen werden nun auch im chiralen Limes ($m = 0$) vorgenommen. Die Ergebnisse sind in den Abbildungen 7 und 9 gezeigt. Auch hier zeigt sich in Abb. 7 für kleine Werte von T und μ ein Plateau, wobei der Vakuumwert diesmal bei $M = 387,92$ MeV liegt. Genau wie im Fall der endlichen Quarkmasse findet sich für kleine T und große μ ein Phasenübergang 1. Ordnung. Für kleiner werdende μ und größer werdende T geht die Ordnung dieses Phasenübergangs in einen Übergang 2. Ordnung über. Dies ist gut in Abb. 9 zu erkennen, wo die Konstituentenquarkmasse im Bereich dieses Übergangs quasi direkt auf Werte nahe Null abfällt.

Im Folgenden wird zum einen gezeigt, wie sich die Konstituentenquarkmasse M für konstantes μ bei verschiedenen T , sowie bei konstantem T für verschiedene μ verhält. Dies ist sowohl für den Fall endlicher Quarkmassen, wie auch für den chiralen Limes gezeigt.

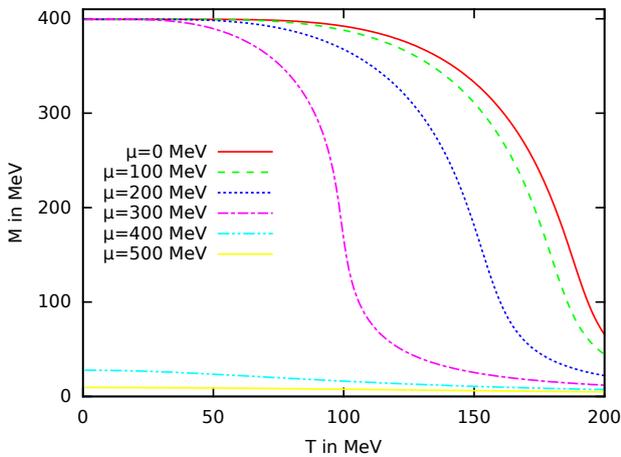


Abbildung 10: Auftragung der Konstituentenquarkmasse über der Temperatur bei verschiedenen konstanten chemischen Potentialen, bei endlicher nackter Quarkmasse.

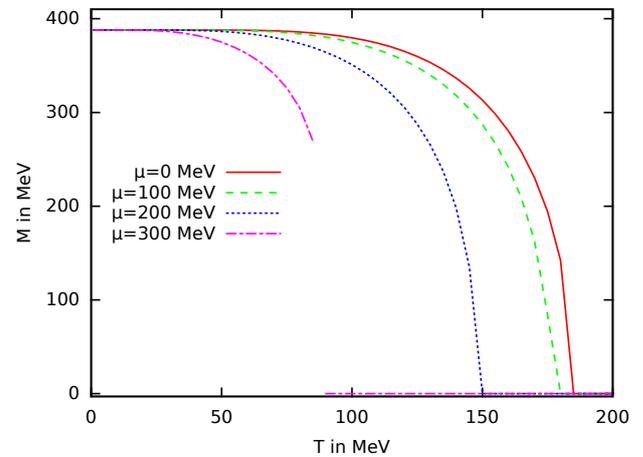


Abbildung 11: Auftragung der Konstituentenquarkmasse über der Temperatur bei verschiedenen konstanten chemischen Potentialen im chiralen Limes.

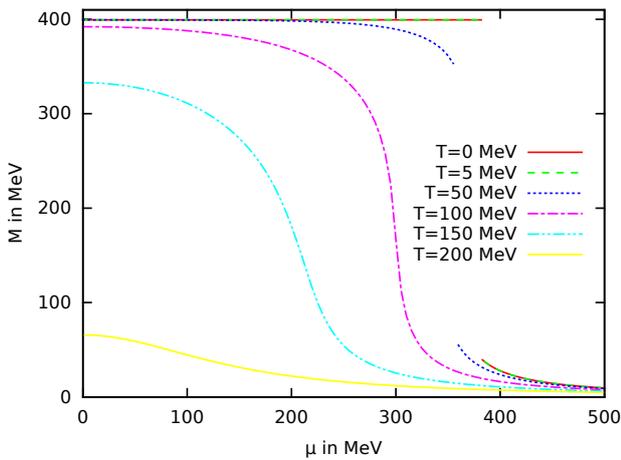


Abbildung 12: Auftragung der Konstituentenquarkmasse über dem chemischen Potential bei verschiedenen konstanten Temperaturen, bei endlicher nackter Quarkmasse.

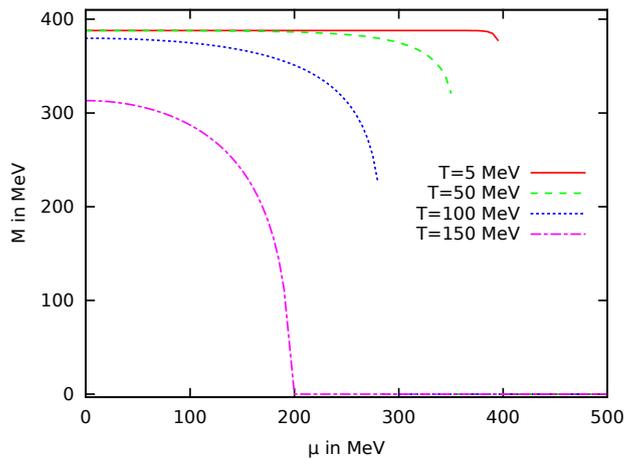


Abbildung 13: Auftragung der Konstituentenquarkmasse über dem chemischen Potential bei verschiedenen konstanten Temperaturen im chiralen Limes.

In Abb. 10 ist gut erkennbar, an welchen Stellen T die größte Steigung der jeweiligen Kurve bei konstantem μ auftritt. Mit zunehmendem μ treten diese Stellen bei kleiner werdenden Temperaturen auf. Erst ab einem Wert von $\mu = 321,00$ MeV treten Unstetigkeiten auf, da ab diesem Wert der Phasenübergang 1. Ordnung beginnt. Für $\mu > 382,10$ MeV sind keine Übergänge oder Crossover mehr auffindbar. In Abb. 12 ist erkennbar, dass für Temperaturen $T < 100$ MeV Unstetigkeiten in den Kurven auftreten. Genauer gesagt treten diese erst für $T < 82,90$ MeV auf. Da es im chiralen Limes nur Phasenübergänge 1. und 2. Ordnung gibt, besitzen alle Kurven in den Abbildungen 11 und 13 an den jeweiligen Stellen der Phasenübergänge entweder Unstetigkeiten (1. Ordnung) oder fallen quasi direkt auf Werte von $M = 0$ ab (2. Ordnung). Mit der Kenntnis aller Punkte (T, μ) , an welchen der Phasenübergang 1. Ordnung, bzw. ein Crossover auftritt, kann das Phasendiagramm des NJL-Modells bei reellem chemischen Potential dargestellt werden. Das Phasendiagramm für endliche nackte Quarkmassen ist dabei in Abb. 14 dargestellt.

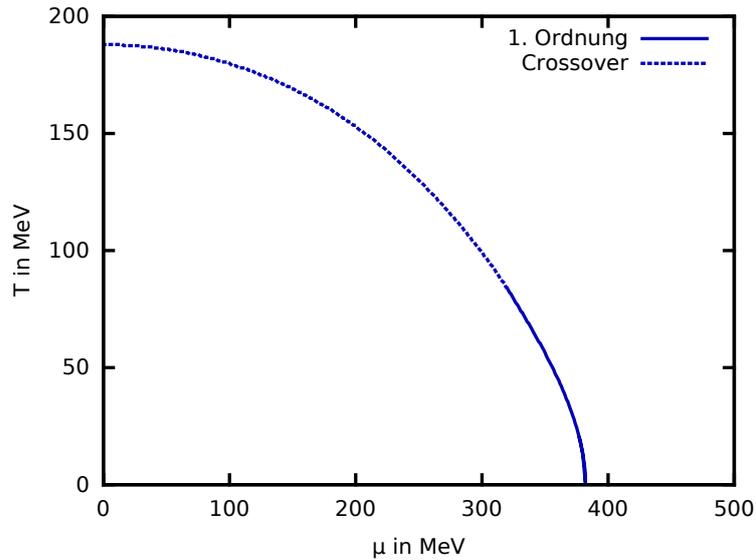


Abbildung 14: Phasendiagramm des NJL-Modells bei reellem chemischen Potential. Der Phasenübergang 1. Ordnung ist mittels durchgezogener blauer Linie, der Crossover durch die gestrichelte blaue Linie gekennzeichnet.

5.4 NJL-Modell bei imaginärem chemischen Potential

Im Folgenden wird das NJL-Modell bei imaginärem chemischen Potential betrachtet. Dabei wird zunächst die Konstituentenquarkmasse M mittels der in Abschn. 7.4.2 angegebenen Gap-Gleichung berechnet und anschließend über der T - θ -Ebene aufgetragen. Die Ergebnisse sind in den Abbildungen 15 und 16 dargestellt.

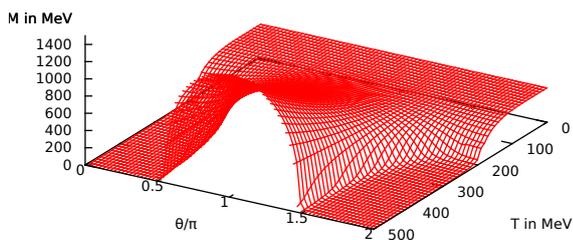


Abbildung 15: Konstituentenquarkmasse in der T - θ -Ebene bei nicht verschwindender nackter Quarkmasse.

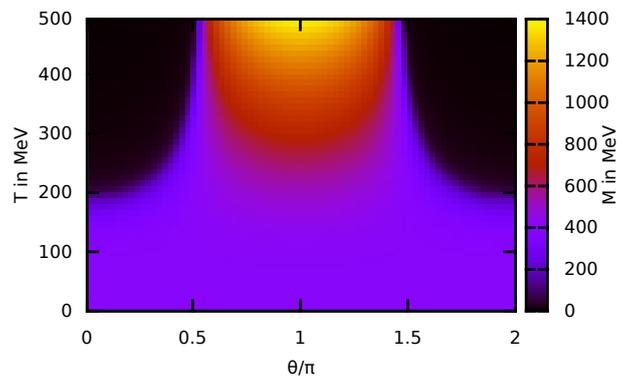


Abbildung 16: Projektion in die T - θ -Ebene bei nicht verschwindender nackter Quarkmasse.

Zum einen ist auffällig, dass die Masse M einen deutlich höheren maximalen Wert als im reellen Fall annimmt. In Abb. 15 ist die Spiegelsymmetrie zur Ebene $\theta = \pi$ deutlich erkennbar. Dies wird auf Grund der Invarianz des großkanonischen Potentials unter Transformationen der Form $\theta \rightarrow \theta + 2\pi$ und $\theta \rightarrow -\theta$ erwartet. In Abb. 16 ist zu erkennen, dass keine Unstetigkeitsstellen im gesamten Verlauf auftreten, was darauf hinweist, dass keine Phasenübergänge und nur Crossover auftreten.

Für $\theta = 0$ ergibt sich eine kritische Temperatur von ungefähr $T = 188 \text{ MeV}$. Nun wird das Phasendiagramm für das NJL-Modell in der μ^2 - T -Ebene in Abb. 17 gezeigt.

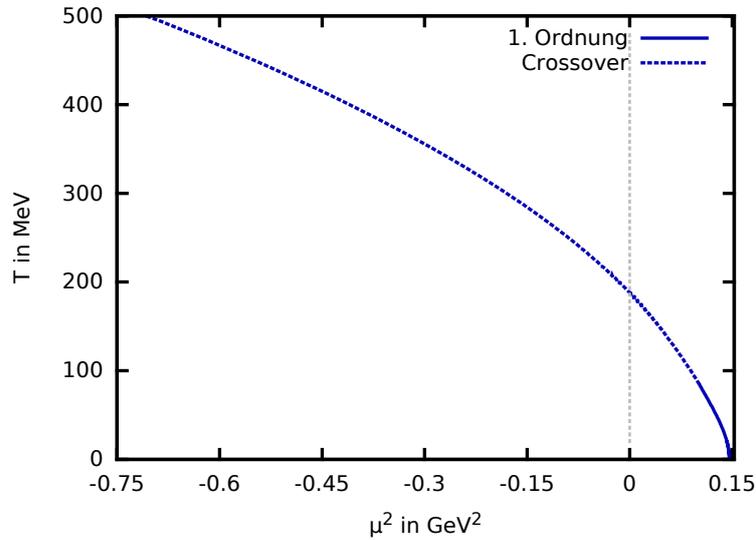


Abbildung 17: Phasendiagramm des NJL-Modells in der μ^2 - T -Ebene. Der Phasenübergang 1. Ordnung ist mit Hilfe der durchgezogenen blauen Linie, der Crossover durch die gestrichelte blaue Linie gekennzeichnet.

In dieser Auftragsung können die Ergebnisse aus der Rechnung mit reellem und imaginärem μ verknüpft werden. Zu sehen ist, dass sich für $\mu^2 \rightarrow 0^\pm$ ein glatter Übergang für den Verlauf des Crossover ergibt.

Mit diesen Informationen und mit Hilfe von Gl. 3.66 kann nun auch das Phasendiagramm in der p - T -Ebene angegeben werden, welches in Abb. 18 gezeigt ist. Neben der Darstellung des Drucks für den chiralen Phasenübergang, bzw. Crossover, wird auch die Kurve des minimal möglichen Drucks abgebildet. Diese ergibt sich aus den Werten des Drucks bei verschiedenen Temperaturen und verschwindendem chemischen Potential $\mu = 0$. Physikalisch sind somit keine Drücke unterhalb dieser Kurve möglich, weshalb der Bereich unter der Kurve als unphysikalischer Bereich bezeichnet wird.

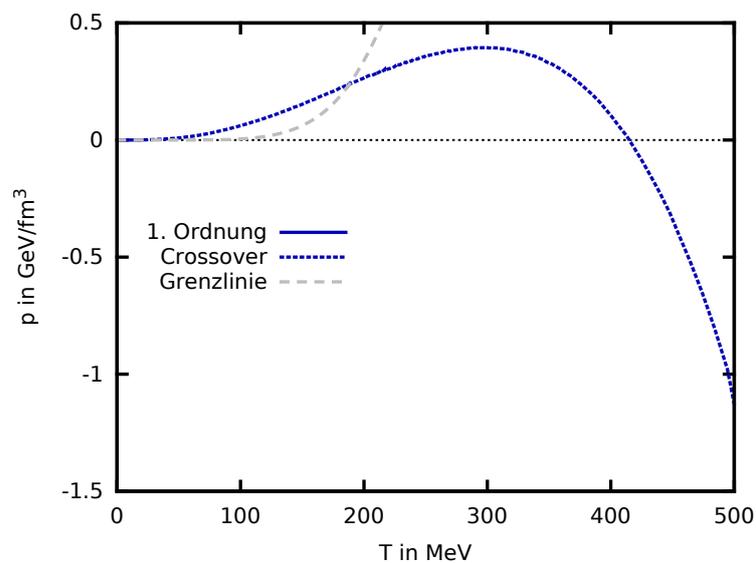


Abbildung 18: Phasendiagramm des NJL-Modells in der p - T -Ebene. Die Kurve des minimalen Drucks wird durch die gestrichelte graue Linie gezeigt. Die weiteren Bezeichnungen sind analog zu denen in Abb. 17.

Der Crossover bei imaginärem chemischen Potential befindet sich offenbar vollständig im unphysikalischen Bereich. Ab einer Temperatur von ungefähr $T = 413 \text{ MeV}$ nimmt der Druck sogar negative Werte (Werte unterhalb des Vakuumdrucks) an und fällt für anwachsende Temperaturen steil ab.

5.5 PNJL-Modell bei reellem chemischen Potential

In diesem Abschnitt werden Phasenübergänge und Crossover im PNJL-Modell bei reellem chemischen Potential untersucht. Dabei sind sowohl der chirale Phasenübergang bzw. Crossover mit dem chiralen Kondensat σ als Ordnungsparameter, wie auch der Confinement/Deconfinement-Crossover mit dem Polyakov-Loop Φ als Ordnungsparameter von Interesse. Das Phasendiagramm in der μ - T -Ebene ist in Abb. 19 angegeben.

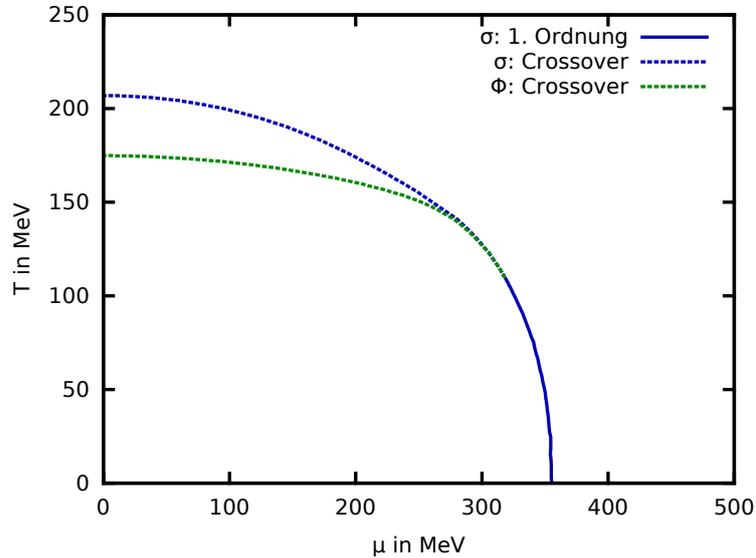


Abbildung 19: Phasendiagramm des PNJL-Modells bei reellem chemischen Potential. Der chirale Phasenübergang 1. Ordnung ist als durchgezogene blaue Linie, der chirale Crossover als gestrichelte blaue Linie und der Deconfinement-Crossover als grüne gestrichelte Linie gekennzeichnet.

Zu erkennen ist, dass der Deconfinement-Crossover stets bei kleineren Temperaturen als der chirale Crossover auftritt. Weiterhin enden beide Crossoverlinien im kritischen Endpunkt, welcher sich ungefähr bei $(T; \mu) = (109 \text{ MeV}; 319 \text{ MeV})$ befindet. Für $T = 0$ tritt der chirale Phasenübergang 1. Ordnung bei einem Wert von $\mu = 355,2 \text{ MeV}$ auf. Auf der Achse $\mu = 0$ tritt der chirale Crossover bei $T = 206,9 \text{ MeV}$ auf und der Deconfinement-Crossover bei $T = 174,9 \text{ MeV}$.

5.6 PNJL-Modell bei imaginärem chemischen Potential

Nun sollen die Eigenschaften des PNJL-Modell bei imaginärem chemischen Potential genauer untersucht werden. Hierfür werden zunächst die Ordnungsparameter σ , $|\Psi$, φ sowie das großkanonische Potential Ω_{PNJL} und der Real- und Imaginärteil des modifizierten Polyakov-Loops Ψ für die Temperaturen $T \in \{170 \text{ MeV}, 180 \text{ MeV}, 190 \text{ MeV}\}$ über dem Parameter θ aufgetragen. Das betrachtete Intervall beschränkt sich dabei auf $\theta \in [0, 2\pi/3]$. Hierbei soll insbesondere auch das Auftreten des Roberge-Weiss-Phasenübergangs 1. Ordnung untersucht werden, welches mit der Unstetigkeit von $\text{Im}(\Psi)$ charakterisiert werden kann [22]. Weiterhin werden die Parameter hinsichtlich ihrer Symmetrie und Periodizität betrachtet. Die Ergebnisse werden in den Abbildungen 20 bis 25 gezeigt. Wir finden zunächst, dass alle betrachteten Größen die Roberge-Weiss-Periodizität zeigen, also jeder Ordnungsparameter \mathcal{O} die Periodizität $\mathcal{O}(\theta) = \mathcal{O}(\theta + 2\pi k/3)$ besitzt. In Abbildung 20 ist das großkanonische Potential im betrachteten Intervall zu sehen.

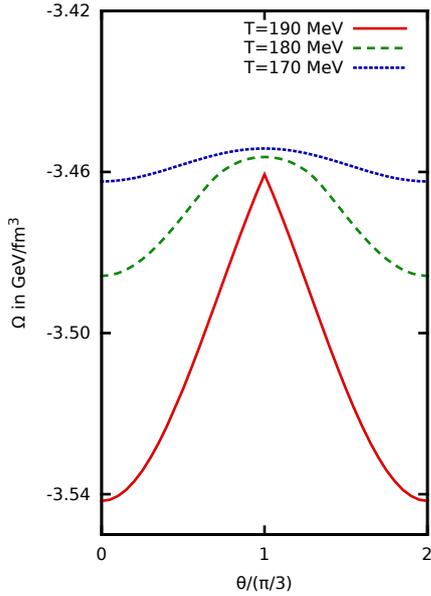


Abbildung 20: Großkanonisches Potential aufgetragen über θ .

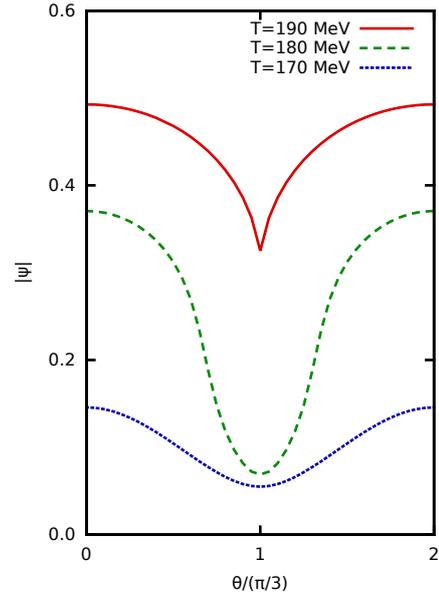


Abbildung 21: Betrag des modifizierten Polyakov-Loops aufgetragen über θ .

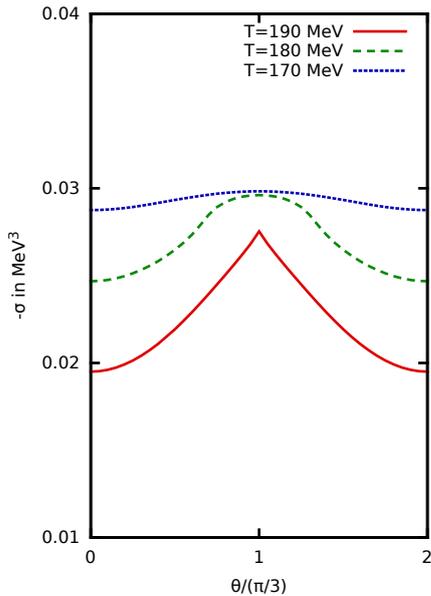


Abbildung 22: Negatives chirales Kondensat aufgetragen über θ .

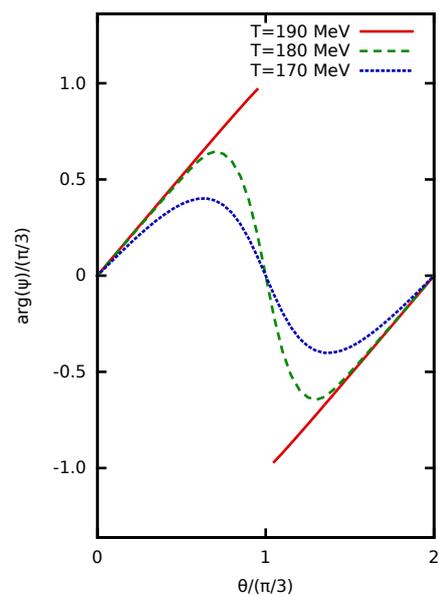


Abbildung 23: Argument des modifizierten Polyakov-Loops aufgetragen über θ .

Es weist eine Achsensymmetrie zur Achse $\theta_0 := (2k + 1)\pi/3$ ($k \in \mathbb{Z}$) auf, sodass $\Omega(-\theta + \theta_0) = \Omega(\theta + \theta_0)$ gilt. Die gleiche Symmetrie wird auch bei den Ordnungsparametern σ (siehe Abb. 22), $|\Psi|$ (siehe Abb. 23) und $\text{Re}(\Psi)$ (siehe Abb. 24) beobachtet. Daher sind diese Ordnungsparameter gerade bezüglich θ_0 . Die Größen $\varphi = \arg(\Psi)$ und $\text{Im}(\Psi)$ sind offenbar antisymmetrisch zu θ_0 , sodass $\arg\Psi(-\theta + \theta_0) = -\arg\Psi(\theta + \theta_0)$ und $\text{Re}\Psi(-\theta + \theta_0) = -\text{Re}\Psi(\theta + \theta_0)$ gilt. Somit sind diese Ordnungsparameter ungerade bezüglich θ_0 .

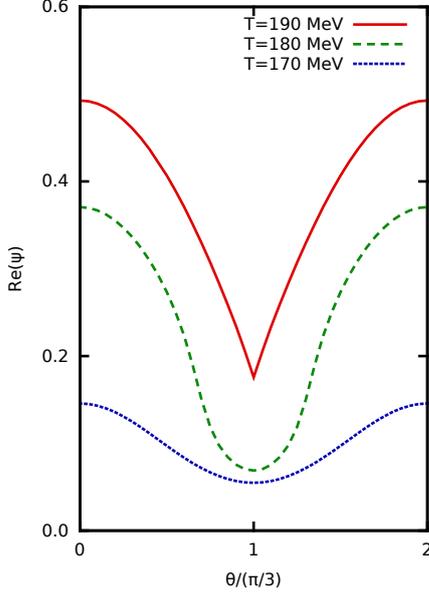


Abbildung 24: Realteil des modifizierten Polyakov-Loops aufgetragen über θ .

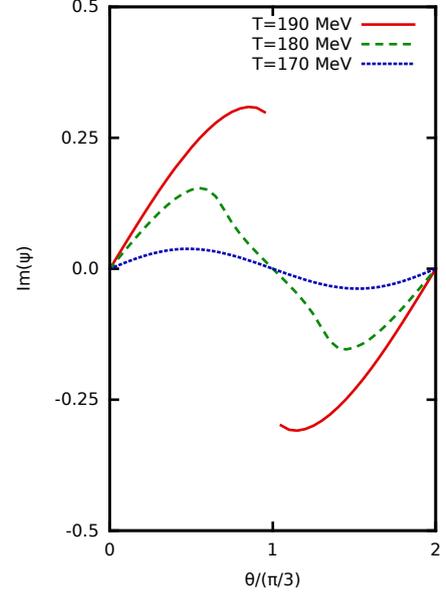


Abbildung 25: Imaginärteil des modifizierten Polyakov-Loops aufgetragen über θ .

Grundsätzlich fällt auf, dass alle Größen für die Temperaturen $T = 170$ MeV und $T = 180$ MeV im gesamten betrachteten Intervall einen glatten Verlauf zeigen. Dies ist für $T = 190$ MeV nicht mehr erfüllt. Hier zeigen alle Ordnungsparameter entweder eine Unstetigkeit oder einen stetigen jedoch nicht glatten Verlauf. Dabei sind genau die ungeraden Ordnungsparameter $\arg(\Psi)$ und $\text{Im}(\Psi)$ bei $\theta = \theta_0$ unstetig. Diese Unstetigkeit von $\text{Im}(\Psi)$ wird zur Charakterisierung des Roberge-Weiss (RW)-Phasenübergangs 1. Ordnung verwendet [22].

Mit der Kenntnis der Stellen, an welchen der RW-Phasenübergang 1. Ordnung, bzw. der chirale und Deconfinement Crossover auftreten, kann das Phasendiagramm in der θ - T -Ebene erzeugt werden. Dieses wird in Abb. 26 gezeigt. Gemäß der RW-Periodizität ist das Phasendiagramm symmetrisch bezüglich $\theta_0 = k\pi/3$ ($k \in \mathbb{Z}$). Gezeigt werden der RW-Phasenübergang 1. Ordnung ab einer Temperatur von ungefähr $T = 190$ MeV, sowie der chirale und der Deconfinement Crossover. Hierbei fällt auf, dass der chirale Crossover stets bei höheren Temperaturen auftritt als der Deconfinement Crossover, was auch in [21] und [22] beobachtet wird. Des Weiteren besitzt der chirale Crossover einen stärkeren Anstieg für $\theta \rightarrow \pi/3^\pm$. Für $\theta = 0$ tritt der chirale Crossover bei $T = 207$ MeV und der Deconfinement Crossover bei $T = 175$ MeV auf. An der Stelle $\theta = \pi/3$ finden sich der chirale Crossover bei $T = 254$ MeV und der Deconfinement Crossover bei $T = 190$ MeV.

Durch Zusammensetzen der Daten für reelles und imaginäres μ kann das Phasendiagramm in der μ^2 - T -Ebene erstellt werden, welches in Abb. 27 gezeigt wird. Entscheidend ist die Tatsache, dass die Crossover-Kurven für reelles und imaginäres μ bei $\mu^2 = 0$ aneinander anknüpfen und von $\mu^2 < 0$ und $\mu^2 > 0$ das gleiche Steigungsverhalten besitzen, um zu gewährleisten, dass die Kurven an diesem Punkt analytisch sind. Aus Abb. 27 wird deutlich, dass sowohl der chirale, wie auch der Deconfinement Crossover für $\mu^2 \rightarrow 0^\pm$ das gleiche Steigungsverhalten zu besitzen scheinen und der Übergang glatt ist. Genauere Analysen bezüglich des Verhaltens der Steigung in diesem Bereich wurden im Umfang dieser Arbeit jedoch nicht durchgeführt. Dennoch scheint das gewählte Crossover-Kriterium im Sinne dieser Ergebnisse eine vernünftige Charakterisierung darzustellen, obwohl es trotzdem nicht analytisch ist.

Neben dem hier gewählten Crossover-Kriterium wurden Berechnungen für ein alternatives Kriterium, das der stärksten Steigung der Ordnungsparameter für konstantes μ^2/T^2 , durchgeführt, welche jedoch keinen glatten Übergang bei $\mu^2 = 0$ ergaben. Diese Tatsache könnte mit der unterschiedlichen Definition der Polyakov-Loops bei reellem und imaginärem μ in Verbindung stehen. Zur Erinnerung sei erwähnt, dass Φ und $\bar{\Phi}$ bei reellem μ als zwei voneinander unabhängige reelle Größen behandelt werden, bei imaginärem μ die modifizierten Polyakov-Loops jedoch zueinander komplex-konjugierte Größen darstellen. Genauere Untersuchungen in dieser Hinsicht wurden im Rahmen dieser Arbeit nicht durchgeführt.

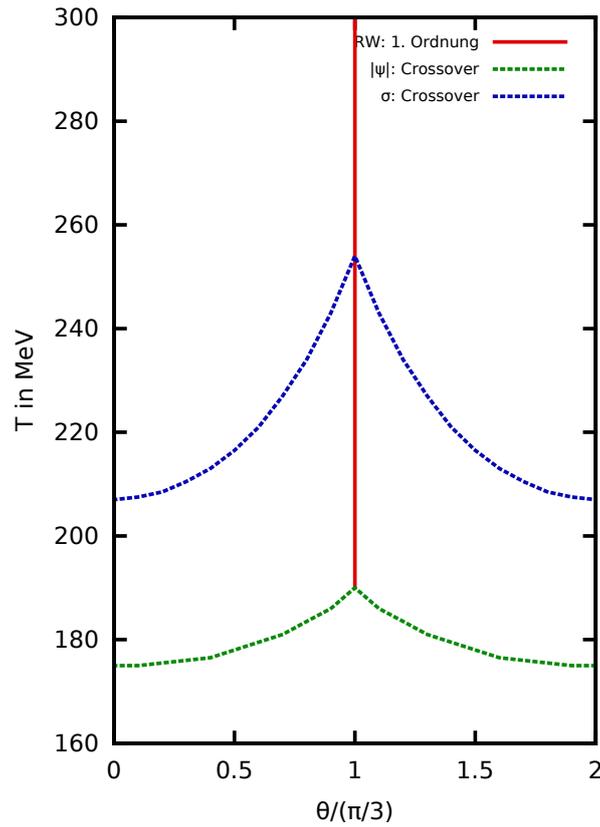


Abbildung 26: Phasendiagramm des PNJL-Modells bei imaginärem chemischen Potential in der θ - T -Ebene. Der RW-Phasenübergang ist mit einer durchgezogenen roten Linie gekennzeichnet. Die Crossover sind mit gestrichelten Linien dargestellt, wobei der chirale Crossover in blauer Farbe und der Deconfinement-Crossover in grüner Farbe gezeigt werden.

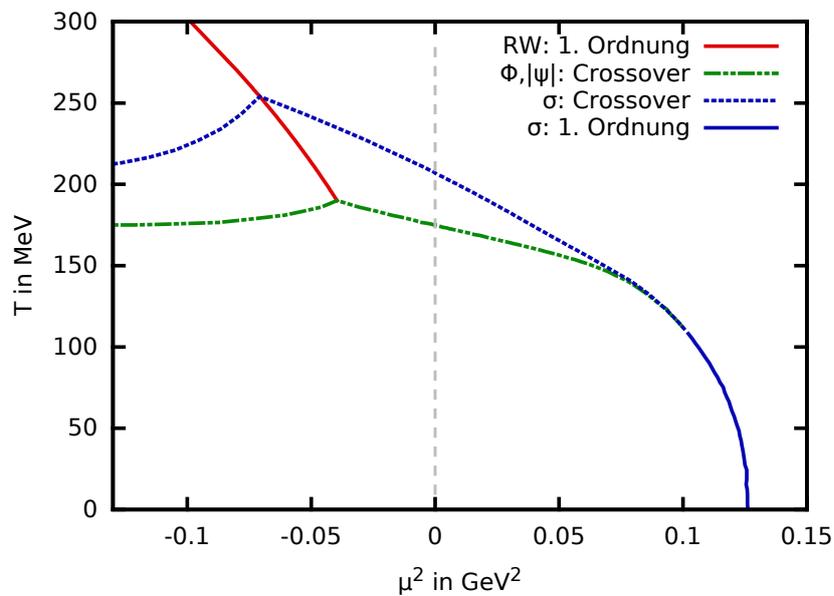


Abbildung 27: Phasendiagramm des PNJL-Modells bei imaginärem chemischen Potential in der μ^2 - T -Ebene. Die Benennung der Phasenübergänge und Crossover ist dabei größtenteils analog zu der in Abbildung 26. Hinzu kommt der chirale Phasenübergang 1. Ordnung, welcher mittels durchgezogener blauer Linie gekennzeichnet ist.

Abschließend kann nun auch das Phasendiagramm in der p - T -Ebene angegeben werden. Dieses wird in Abb. 28 gezeigt. Die Berechnung der Punkte erfolgt hier mit Hilfe von Gl. (4.20)).

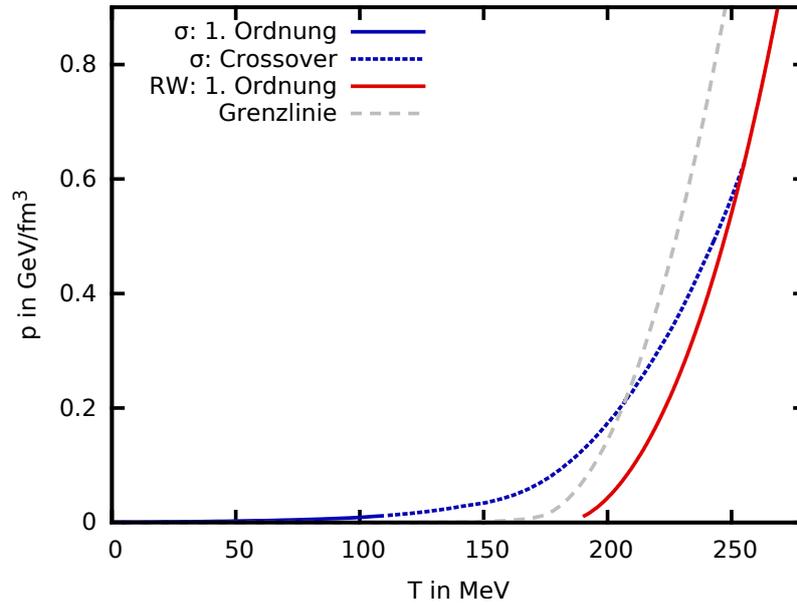


Abbildung 28: Phasendiagramm des PNJL-Modells in der p - T -Ebene. Die Kurve minimalen Drucks ist mittels grob gestrichelter grauer Linie gezeichnet. Der chirale Phasenübergang 1. Ordnung ist in durchgezogener blauer Linie, der chirale Crossover in fein gestrichelter blauer Linie dargestellt. Der Roberge-Weiss-Übergang 1. Ordnung wird in der durchgezogenen roten Linie gezeigt.

Zunächst kann festgestellt werden, dass alle Kurven einen glatten Verlauf zeigen. Insbesondere der chirale Crossover zeigt für $\mu^2 \rightarrow 0^\pm$ ein stetiges und vermutlich differenzierbares Verhalten. Wie auch bereits zuvor für das p - T -Diagramm des NJL-Modells erklärt wurde, stellt die in Abbildung 28 gezeigte gestrichelte graue Linie die Kurve minimalen Drucks dar. Diese entsteht durch den Druck bei verschiedenen Temperaturen und verschwindendem chemischen Potential $\mu = 0$. Sie stellt eine Grenzlinie dar, da physikalisch keine Zustände unterhalb dieser Kurve existieren können. Der Bereich unterhalb der Kurve wird erneut als unphysikalischer Bereich bezeichnet. Der chirale Phasenübergang 1. Ordnung, sowie der chirale Crossover für reelles μ befinden sich im physikalischen Bereich, wohingegen der chirale Crossover bei imaginärem μ komplett im unphysikalischen Bereich verläuft. Dies trifft auch auf den Roberge-Weiss-Phasenübergang zu. Wie bereits Abb. 27 nahelegt, gibt es einen Schnittpunkt des chiralen Crossovers und des RW-Phasenübergangs im Bereich von imaginärem μ .

6 Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wurden Phasenübergänge und Crossover im Rahmen des NJL- und PNJL-Modells bei reellem und imaginärem chemischen Potential untersucht. Dabei konnten sowohl das NJL- wie auch das PNJL-Modell erfolgreich implementiert und die verschiedenen Abhängigkeiten der Ordnungsparameter bezogen auf Temperatur und chemisches Potential untersucht werden. Des Weiteren wurde das Phasendiagramm im NJL-Modell bei reellem chemischen Potential sowie im PNJL-Modell bei reellem und imaginärem chemischen Potential bestimmt. Für beide Modelle untersucht wurden letztlich auch die Phasendiagramme in der μ^2 - T - sowie in der p - T -Darstellung.

Da für Crossover keine eindeutige Definition existiert, wurde während der gesamten Arbeit ein einheitliches Crossover-Kriterium gewählt und die damit verbundenen Crossover-Übergänge in Hinblick auf einen glatten Verlauf von imaginärem hin zu reellem chemischen Potential untersucht. Hierzu diente im Wesentlichen die Darstellung der Phasendiagramme in der μ^2 - T -Ebene. Im Rahmen des NJL-Modells konnte dabei festgestellt werden, dass sich ein in allen Bereichen glatter Verlauf des chiralen Crossovers zeigte.

Auch die im PNJL-Modell berechneten Kurven zeigten für das gewählte Crossover-Kriterium einen durchweg glatten Verlauf in der gesamten μ^2 - T -Ebene, sodass das Kriterium in diesem Umfang als sinnvoll angesehen werden kann.

Anderweitige Betrachtungen in diesem Bereich könnten sich auf die Analyse von Phasenübergängen und Crossover bei konstantem Verhältnis von μ^2/T^2 beziehen. Gleichzeitig bietet die genauere Untersuchung der Auswirkungen der zuvor angesprochenen unterschiedlichen Definitionen des Polyakov-Loops einen Ausblick auf zukünftige Arbeiten auf diesem Gebiet. Weitere Untersuchungen könnten sich auch auf weitere alternative Crossover-Kriterien beziehen, um zu untersuchen, in welcher Form sich die genauen Punkte der Crossover verhalten. Dies kann auch in Bezug auf die Verwendung anderer Formen des Polyakov-Potentials erfolgen. Als Ausblick sei noch angemerkt, dass die berechneten Daten mit denen von Gitter-QCD-Berechnungen verglichen werden könnten.

7 Anhang

7.1 Einheiten und Konventionen

Es werden natürliche Einheiten verwendet. In diesem Fall gilt

$$\hbar = c = k_B = 1. \quad (7.1)$$

Es wird die Minkowski-Metrik der speziellen Relativitätstheorie verwendet. Für den metrischen Tensor gilt dann

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1). \quad (7.2)$$

7.2 Dirac-Matrizen

Für die vier kovarianten Dirac-Matrizen γ^μ gilt in der Dirac-Darstellung

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_2 & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_2 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad (7.3)$$

sowie für das Produkt der vier Dirac-Matrizen

$$\gamma^5 := i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_2 \\ \mathbb{1}_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (7.4)$$

wobei σ^i die drei Pauli-Matrizen als Erzeuger der $SU(2)$ -Gruppe bezeichnet

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (7.5)$$

Es gilt weiterhin die wichtige Antikommutatorrelation

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}\mathbb{1}_4. \quad (7.6)$$

Dabei stellt $\mathbb{1}_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $\mathbb{1}_n = \text{diag}(1, 1, \dots, 1)$ und $n \in \mathbb{N}$ die n -dimensionale Einheitsmatrix dar.

7.3 $SU(N)$ -Gruppe

Die $SU(N)$ -Gruppe wird als spezielle unitäre Gruppe bezeichnet, welche alle unitären Abbildungen $U : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ mit der Eigenschaft $\det(U) = +1$ beinhaltet. Die Dimension der Gruppe ist $d = N^2 - 1$, weshalb sie genau d unabhängige Erzeuger besitzt.

Die $SU(3)$ -Gruppe für $N = 3$ besitzt demnach $d = 3^2 - 1 = 8$ unabhängige Erzeuger λ^a , wobei $a = 1, 2, \dots, 8$. Diese Erzeuger werden auch als Gell-Mann-Matrizen bezeichnet

$$\lambda^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (7.7)$$

$$\lambda^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda^6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda^7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda^8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \quad (7.8)$$

Dabei gelten die beiden folgenden Relationen

$$\text{Sp}(\lambda^i) = 0, \quad (7.9)$$

$$\text{Sp}(\lambda^i \lambda^j) = 2\delta_{ij}. \quad (7.10)$$

7.4 Gap-Gleichungen für das NJL-Modell

7.4.1 Reelles chemisches Potential

Entsprechend Gleichung 3.64 ist die Gap-Gleichung äquivalent zur Stationarität des großkanonischen Potentials

$$\Omega_{\text{NJL}}(T, \mu, M) = -\frac{N_f N_c}{\pi^2} \left(\int_0^\Lambda dp p^2 E(p) + \int_0^\infty dp p^2 T \left(\ln \left(1 + e^{-\frac{E(p)-\mu}{T}} \right) + \ln \left(1 + e^{-\frac{E(p)+\mu}{T}} \right) \right) \right) + \frac{(M-m)^2}{4g}. \quad (7.11)$$

Somit schreibt sich die Gap-Gleichung wie folgt

$$\frac{\partial \Omega_{\text{NJL}}}{\partial M}(T, \mu, M) = -\frac{N_f N_c}{\pi^2} \left(\int_0^\Lambda dp p^2 \frac{M}{E(p)} - \int_0^\infty dp p^2 \frac{M}{E(p)} \left(\frac{1}{1 + e^{-\frac{E(p)+\mu}{T}}} + \frac{1}{1 + e^{-\frac{E(p)-\mu}{T}}} \right) \right) + \frac{(M-m)}{2g} = 0. \quad (7.12)$$

Wie bereits angesprochen gilt dabei natürlich $E(p) = \sqrt{p^2 + M^2}$, wobei $p = |\vec{p}|$ ist.

7.4.2 Imaginäres chemisches Potential

Für das rein imaginäre chemische Potential nimmt das großkanonische Potential folgende Gestalt an

$$\Omega_{\text{NJL}}(T, \theta, M) = \frac{(M-m)^2}{4g} - \frac{N_f N_c}{\pi^2} \left(\int_0^\Lambda dp p^2 E(p) + \int_0^\infty dp p^2 T \ln \left(1 + 2 \cos(\theta) e^{-\frac{E(p)}{T}} + e^{-2\frac{E(p)}{T}} \right) \right) \quad (7.13)$$

Die Gap-Gleichung lautet dann in diesem Fall

$$\frac{\partial \Omega_{\text{NJL}}}{\partial M}(T, \theta, M) = \frac{(M-m)}{2g} - \frac{N_f N_c}{\pi^2} \left(\int_0^\Lambda dp p^2 \frac{M}{E(p)} - 2 \int_0^\infty dp p^2 \frac{M}{E(p)} \frac{\cos(\theta) e^{-\frac{E(p)}{T}} + e^{-2\frac{E(p)}{T}}}{1 + 2 \cos(\theta) e^{-\frac{E(p)}{T}} + e^{-2\frac{E(p)}{T}}} \right) = 0. \quad (7.14)$$

7.5 Gap-Gleichungen für das PNJL-Modell

7.5.1 Reelles chemisches Potential

Im Falle von reellem chemischen Potential $\mu \in \mathbb{R}$ lautet das großkanonische Potential

$$\Omega_{\text{PNJL}}(T, \mu, \sigma, \Phi, \bar{\Phi}) = -\frac{N_f N_c}{\pi^2} \int_0^\Lambda dp p^2 E(p) \quad (7.15)$$

$$- \frac{N_f}{\pi^2} \int_0^\infty dp p^2 T \left[\ln \left(1 + 3\Phi e^{-\frac{E(p)-\mu}{T}} + 3\bar{\Phi} e^{-2\frac{E(p)-\mu}{T}} + e^{-3\frac{E(p)-\mu}{T}} \right) \right. \quad (7.16)$$

$$\left. \ln \left(1 + 3\bar{\Phi} e^{-\frac{E(p)+\mu}{T}} + 3\Phi e^{-2\frac{E(p)+\mu}{T}} + e^{-3\frac{E(p)+\mu}{T}} \right) \right] \quad (7.17)$$

$$+ g\sigma^2 - \frac{a(T)}{2} T^4 \Phi \bar{\Phi} + b(T) T^4 \ln(1 - 6\Phi \bar{\Phi} + 4(\Phi^3 + \bar{\Phi}^3) - 3(\Phi \bar{\Phi})^2) \quad (7.18)$$

Die Gap-Gleichungen lauten in diesem Fall

$$\frac{\partial \Omega_{\text{PNJL}}}{\partial \sigma} = 0, \quad \frac{\partial \Omega_{\text{PNJL}}}{\partial \Phi} = 0, \quad \frac{\partial \Omega_{\text{PNJL}}}{\partial \bar{\Phi}} = 0. \quad (7.19)$$

An dieser Stelle wurde auf die explizit ausgeschriebene Form der Gap-Gleichungen verzichtet, da es sich um verhältnismäßig lange Ausdrücke handelt. Für die Energie gilt hierbei $E(p) = \sqrt{p^2 + (m - 2g\sigma)^2}$.

7.5.2 Imaginäres chemisches Potential

Betrachtet man den Fall von rein imaginärem chemischen Potential, so lautet das großkanonische Potential

$$\Omega_{\text{PNJL}}(T, \theta, \sigma, |\Psi|, \varphi) = -\frac{N_f N_c}{\pi^2} \int_0^\Lambda dp p^2 E(p) \quad (7.20)$$

$$- \int_0^\infty dp p^2 T \ln \left(1 + e^{-6\frac{E(p)}{T}} + 6|\Psi| \cos(\varphi) \left(e^{-\frac{E(p)}{T}} + e^{-5\frac{E(p)}{T}} \right) \right) \quad (7.21)$$

$$+ (9|\Psi|^2 + 6|\Psi| \cos(\varphi - 3\theta)) \left(e^{-2\frac{E(p)}{T}} + e^{-4\frac{E(p)}{T}} \right) \quad (7.22)$$

$$+ (18|\Psi|^2 \cos(3\theta - 3\varphi) + 2 \cos(3\theta)) e^{-3\frac{E(p)}{T}} \quad (7.23)$$

$$+ g\sigma^2 - \frac{a(T)}{2} T^4 |\Psi|^2 + b(T) T^4 \ln(1 - 6|\Psi|^2 + 8|\Psi|^3 \cos(3\varphi - 3\theta) - 3|\Psi|^4) \quad (7.24)$$

Die Gap-Gleichungen ergeben sich zu

$$\frac{\partial \Omega_{\text{PNJL}}}{\partial \sigma} = 0, \quad \frac{\partial \Omega_{\text{PNJL}}}{\partial |\Psi|} = 0, \quad \frac{\partial \Omega_{\text{PNJL}}}{\partial \varphi} = 0. \quad (7.25)$$

Auch hier wird auf die ausgeschriebene Form auf Grund der länglichen Ausdrücke verzichtet. Zu beachten ist, dass $\varphi = \arg(\Psi)$ und $E(p) = \sqrt{p^2 + (m - 2g\sigma)^2}$ gilt.

7.6 Berechnung des Integrals I_1

Mit Hilfe des Residuensatzes soll das folgende uneigentliche Integral berechnet werden

$$I_1 := \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - M^2 + i\epsilon}. \quad (7.26)$$

Dazu wird der Nenner von I_1 zunächst wie folgt umgeformt

$$I_1 = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - M^2 + i\epsilon} = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^\mu k_\mu - M^2 + i\epsilon} = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k_0^2 - \vec{k}^2 - M^2 + i\epsilon}. \quad (7.27)$$

Nun wird die Teilchenenergie wie folgt definiert

$$E_k := \sqrt{\vec{k}^2 + M^2}, \quad (7.28)$$

sodass sich für das obige Integral der folgende Ausdruck ergibt

$$I_1 = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k_0^2 - E_k^2 + i\epsilon} = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} dk_0 \frac{1}{k_0^2 - E_k^2 + i\epsilon}. \quad (7.29)$$

Es ist festzustellen, dass der Integrand

$$f(k_0) := \frac{1}{k_0^2 - E_k^2 + i\epsilon} \quad (7.30)$$

als isolierte Singularitäten genau zwei Polstellen 1. Ordnung aufweist

$$k_0^+ := +\sqrt{E_k^2 - i\epsilon} \quad (7.31)$$

$$k_0^- := -\sqrt{E_k^2 - i\epsilon}. \quad (7.32)$$

Wird nun der Integrationsweg aus Abbildung 29 in der komplexen Ebene gewählt, welcher nur die Polstelle k_0^- umschließt, so kann nun der Residuensatz zur Berechnung des obigen Integrals I_1 angewendet werden. Das Residuum im

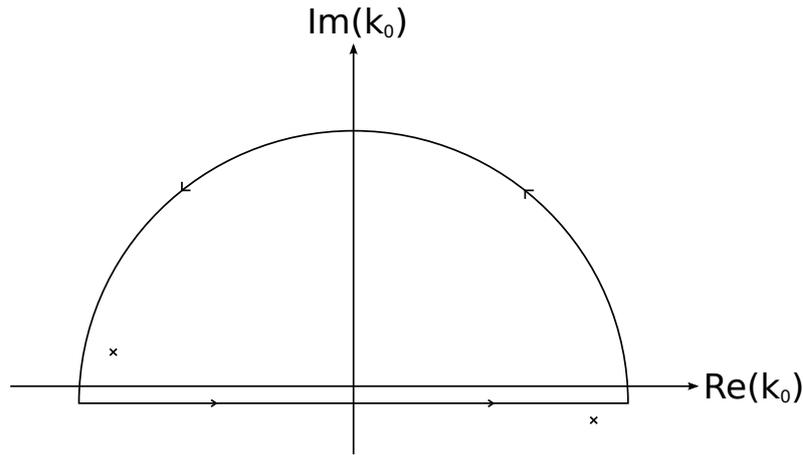


Abbildung 29: Integrationsweg in der komplexen Ebene mit den beiden Polstellen k_0^+ und k_0^-

Punkt $z = k_0^-$ ergibt sich zu

$$\text{Res}_f(k_0^-) = \lim_{k_0 \rightarrow k_0^-} (k_0 - k_0^-) f(k_0) = \lim_{k_0 \rightarrow k_0^-} (k_0 - k_0^-) \frac{1}{(k_0 - k_0^-)(k_0 - k_0^+)} = \lim_{k_0 \rightarrow k_0^-} \frac{1}{k_0 - k_0^+} \quad (7.33)$$

$$= \frac{1}{k_0^- - k_0^+} = \frac{1}{-2\sqrt{E_k^2 - i\epsilon}} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} -\frac{1}{2E_k}. \quad (7.34)$$

Zu beachten ist, dass der Kreisbogen in Abb. 29 keinen Beitrag liefert. Anwenden des Residuensatzes

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{\omega} \text{Ind}(\gamma, \omega) \text{Res}_f(\omega) \quad (7.35)$$

liefert dann den Wert des Integrals zu

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk_0 \frac{1}{k_0^2 - E_k^2 + i\epsilon} = 2\pi i \cdot 1 \cdot \left(-\frac{1}{2E_k}\right) = \frac{\pi}{iE_k} \quad (7.36)$$

Einsetzen in obige Gleichung 7.29 ergibt dann den Wert von I_1

$$I_1 = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} dk_0 \frac{1}{k_0^2 - E_k^2 + i\epsilon} = \frac{\pi}{i(2\pi)^4} \int d^3k \frac{1}{E_k} = \frac{\pi}{i(2\pi)^4} \int d^3k \frac{1}{\sqrt{\vec{k}^2 + M^2}}. \quad (7.37)$$

Nun erfolgt auf Grund der sphärischen Geometrie des Integranden eine Koordinatentransformation in sphärische Koordinaten (Kugelkoordinaten)

$$\int d^3k f(k) \rightarrow 4\pi \int_0^{\infty} dk f(k) k^2 \quad (7.38)$$

sodass sich mittels $k = |\vec{k}|$ der folgende Ausdruck ergibt

$$I_1 = \frac{\pi}{i(2\pi)^4} (4\pi) \int_0^{\infty} dk \frac{k^2}{E_k} = -i \int_0^{\infty} \frac{dk}{(2\pi)^2} \frac{k^2}{\sqrt{k^2 + M^2}}. \quad (7.39)$$

7.7 Berechnung des Integrals I_2

Berechnet werden soll nun im Folgenden der Ausdruck

$$I_2 := -T \sum_{n \in \mathbb{N}} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{(i\omega_n + \mu)^2 - E_k^2 + i\epsilon} \quad (7.40)$$

Durch die Anwendung des Residuensatzes (siehe Gl. 7.35) in umgekehrter Richtung, also von der Summe über die Residuen hin zum komplexen Kurvenintegral, erhält man nun folgendes Kurvenintegral, dessen Integrand

$$f(z) := \frac{1}{1 + \exp(z/T)} \frac{1}{(z + \mu)^2 - E_k^2} \quad (7.41)$$

isolierte Singularitäten an allen Stellen $z_n = i\omega_n = i(2n + 1)\pi T$ ($n \in \mathbb{Z}$) mit Residuum $\text{Res}_f(z_n) = -T$, also bei allen Matsubara-Frequenzen besitzt

$$I_2 = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\pi i} \int dz \frac{1}{1 + \exp(z/T)} \frac{1}{(z + \mu)^2 - E_k^2}. \quad (7.42)$$

Der Integrand besitzt jedoch noch zwei weitere Polstellen 1. Ordnung als isolierte Singularitäten an den beiden Stellen

$$z_{\pm} := \pm E_k - \mu. \quad (7.43)$$

Der in Abb. 30 gezeigte Integrationsweg wird so deformiert, dass über die beiden Polstellen z_{\pm} , statt über die Polstellen

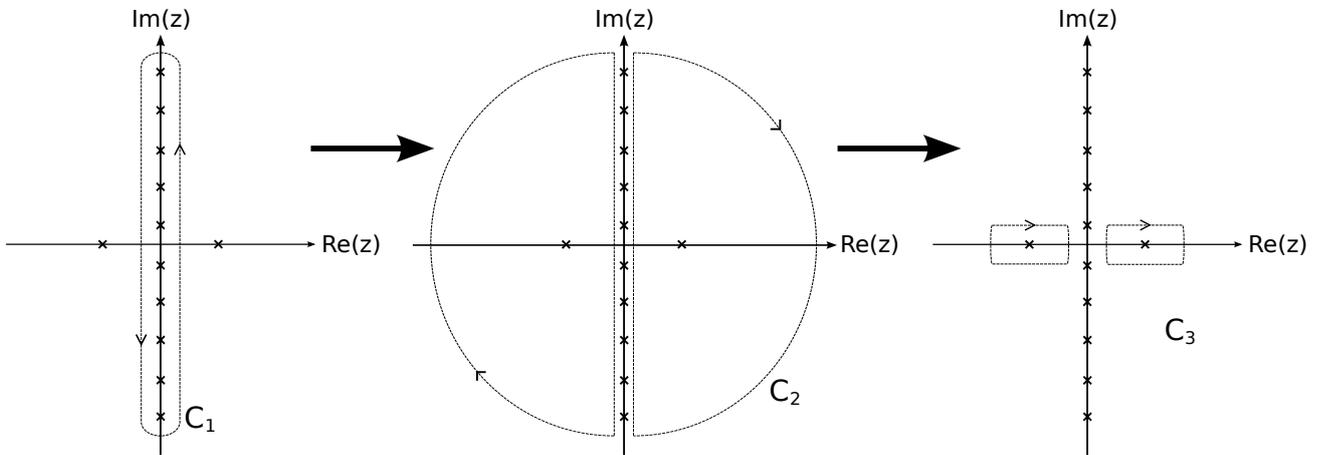


Abbildung 30: Integrationswege in der komplexen Ebene. Links befindet sich der ursprüngliche Integrationsweg C_1 , welcher zweimal deformiert wird.

$z_n = i\omega_n$ bei den Matsubara-Frequenzen integriert wird. Um den Residuensatz vom Kurvenintegral hin zur Darstellung als Summe über die Residuen anzuwenden, müssen diese berechnet werden.

$$\text{Res}_f(z_+) = \lim_{z \rightarrow z_+} (z - z_+) f(z) = \lim_{z \rightarrow z_+} (z - z_+) \frac{1}{1 + \exp(z/T)} \frac{1}{(z - z_+)(z - z_-)} \quad (7.44)$$

$$= \lim_{z \rightarrow z_+} \frac{1}{1 + \exp(z/T)} \frac{1}{(z - z_-)} = \frac{1}{1 + \exp(z_+/T)} \frac{1}{2E_k} \quad (7.45)$$

Die Rechnung für $\text{Res}_f(z_-)$ verläuft dabei analog. Es gilt dabei die folgende Beziehung zwischen den beiden Polstellen

$$\pm(z_+ - z_-) = \pm 2E_k. \quad (7.46)$$

Mit den vorherigen Überlegungen ergibt sich die folgende Darstellung

$$I_2 = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_k} \left(\frac{1}{1 + \exp\left(\frac{-E_k - \mu}{T}\right)} - \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{E_k - \mu}{T}\right)} \right). \quad (7.47)$$

Verwendet man noch die folgende Umformung

$$\frac{1}{1 + \exp\left(\frac{-E_k + \mu}{T}\right)} = 1 - \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{E_k + \mu}{T}\right)}, \quad (7.48)$$

so ergibt sich letztlich

$$I_2 = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_k} \left(1 - \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{E_k + \mu}{T}\right)} - \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{E_k - \mu}{T}\right)} \right) \quad (7.49)$$

Literatur

- [1] CERN. *Heavy ions and quark-gluon plasma*. About CERN. Abgerufen am 5. September 2014. <http://home.web.cern.ch/about/physics/heavy-ions-and-quark-gluon-plasma>.
- [2] W. Greiner, S. Schramm, E. Stein. *Quantum Chromodynamics*. Third Edition. Springer Verlag, 2006.
- [3] M. Gell-Mann. *A Schematic Model of Baryons and Mesons*. Phys. Lett., 8:214, 1964.
- [4] G. Zweig. *An SU(3) Model for Strong Interaction Symmetry and its Breaking*. CERN Report No.8182/TH.401, 1964.
- [5] P. Schmöser. *Feynman-Graphen und Eichtheorien für Experimentalphysiker*. Zweite, neubearbeitete Auflage. Springer Verlag, 1995.
- [6] M. A. Stephanov. *QCD phase diagram and the critical point*. Prog. Theor. Phys. Suppl., 153:139, 2004. [arXiv:hep-ph/0402115].
- [7] S. Möller. *Pion-Pion Scattering and Shear Viscosity in the Nambu–Jona-Lasinio Model*. Master-Thesis, Fachbereich Physik. Technische Universität Darmstadt, 2012. (<http://theorie.ikp.physik.tu-darmstadt.de/nhq/downloads/thesis/master.moeller.pdf>).
- [8] C. Hoelbling. *Lattice QCD: concepts, techniques and some results*. 2014. [arXiv:hep-lat/1410.3403]
- [9] M. Buballa. *NJL-model analysis of dense quark matter*. Phys. Rept., 407:205, 2005. [arXiv:hep-ph/0402234].
- [10] D. J. Gross, F. Wilczek. *Ultraviolet Behavior of Nonabelian Gauge Theories*. Phys. Rev. Lett., 30:1343, 1973.
- [11] H. D. Politzer. *Reliable perturbative results for strong interactions?* Phys. Rev. Lett., 30:1346, 1973.
- [12] M. E. Peskin, D. V. Schröder. *An Introduction to Quantum Field Theory*. Advanced Book Program. Westview Press, 1995.
- [13] H. Frizsch, M. Gell-Mann, H. Leutwyler. *Advantages of the color octet gluon picture*. Phys. Lett., 47B:365, 1973.
- [14] Y. Nambu and G. Jona-Lasinio. *Dynamical model of elementary particles based on an analogy with superconductivity*. I. Phys. Rev., 122:345, 1961.
- [15] Y. Nambu and G. Jona-Lasinio. *Dynamical model of elementary particles based on an analogy with superconductivity*. II. Phys. Rev., 124:246, 1961.
- [16] J. Bardeen, L. N. Cooper, and J. R. Schrieffer. *Theory of Superconductivity*. Phys. Rev., 108:1175, 1957.
- [17] D. Müller. *Untersuchung des Sigma Mesons im NJL Modell am kritischen Punkt des QCD Phasendiagramms*. Bachelor-Thesis, Fachbereich Physik. Technische Universität Darmstadt, 2007. (<http://theorie.ikp.physik.tu-darmstadt.de/nhq/downloads/thesis/bachelor.mueller.pdf>).
- [18] J. I. Kapusta, C. Gale. *Finite-Temperature Field Theory. Principles and Applications*. Cambridge University Press, 2009.
- [19] M. Le Bellac. *Thermal Field Theory*. Cambridge University Press, 2000.
- [20] D. Müller. *Der Quarkpropagator in selbstkonsistenter $1/N_c$ Entwicklung im NJL Modell*. Master-Thesis, Fachbereich Physik. Technische Universität Darmstadt, 2009. (<http://theorie.ikp.physik.tu-darmstadt.de/nhq/downloads/thesis/master.mueller.pdf>).
- [21] D. Scheffler. *The PNJL model at imaginary chemical potential*. Master-Thesis, Fachbereich Physik. Technische Universität Darmstadt, 2010. (<http://theorie.ikp.physik.tu-darmstadt.de/nhq/downloads/thesis/master.scheffler.pdf>).
- [22] Y. Sakai, K. Kashiwa, H. Kouno, M. Yahiro. *Polyakov loop extended NJL model with imaginary chemical potential*. Phys. Rev. D77:051901, 2008. [arXiv:0801.0034].
- [23] K. Fukushima. *Chiral effective model with the Polyakov loop*. Phys. Lett. B591:277, 2004. [arXiv:hep-ph/0310121]
- [24] K. Holland, U.-J. Wiese. *The Center symmetry and its spontaneous breakdown at high temperatures*. 2000. [arXiv:hep-ph/0011193].
- [25] S. Roessner, C. Ratti, W. Weise. *Polyakov loop, diquarks and the two-flavour phase diagram*. 2007. [arXiv:hep-ph/0609281].

Danksagung

Zunächst möchte ich mich bei Herrn Prof. Dr. Jochen Wambach bedanken, mir die Möglichkeit gegeben zu haben, in seiner Arbeitsgruppe an diesem interessanten und spannenden Thema zu arbeiten.

Weiterhin möchte ich mich bei Herrn PD Dr. Michael Buballa für die gute Betreuung und freundliche Unterstützung beim Bearbeiten dieser Thesis bedanken. Stets konnte er mir alle meine Fragen beantworten und mit hilfreichen Anregungen weiterhelfen.

Ein weiterer Dank gebührt meinen Zimmerkollegen von Raum 306 im Theorie-Zentrum des Instituts für Kernphysik. Während meiner gesamten Arbeitszeit habe ich eine produktive und angenehme Atmosphäre erleben dürfen.

In besonderem Maße möchte ich mich an dieser Stelle bei meinem Betreuer David Scheffler für die vielen fachlichen und programmiertechnischen Hilfestellungen bedanken.

Zu guter Letzt möchte ich mich herzlich bei meiner Freundin und meiner Familie für die dauerhafte, großartige und liebevolle Unterstützung während meines gesamten Studiums bedanken.