
Der Einfluss verschiedener Ordnungen der Vektorwechselwirkung auf die Schallgeschwindigkeit im NJL-Modell

Bachelorarbeit von Jaspreet Tumber
Tag der Einreichung: 22. Januar 2025

1. Gutachten: Michael Buballa
2. Gutachten: Marco Hofmann
Darmstadt



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Fachbereich Physik
Institut für Kernphysik
AG Buballa

Inhaltsverzeichnis

1	Motivation	4
2	Einführung	6
2.1	Das Standardmodell der Teilchen	6
2.2	Phasendiagramm aus der Quantenchromodynamik	7
2.3	Nambu-Jona-Lasinio Modell	8
2.3.1	Die NJL Lagrangedichte	9
2.3.2	Konstituentenquarks	9
2.3.3	Die Cut-Off Regularisierung	10
3	Das NJL-Modell ohne Vektorwechselwirkung	12
3.1	Grundlagen	12
3.2	Das effektive Potenzial	14
3.3	Die Minimierung des Potenzials	16
3.4	Analytische Berechnungen bei $M = 0$	19
4	Das NJL-Modell mit einer 4-Punkt-Vektorwechselwirkung	23
4.1	Grundlagen	23
4.2	Das effektive Potenzial	26
4.3	Die Minimierung des Potenzials	27
4.4	Analytische Berechnungen für $M = 0$	32
5	Das NJL-Modell mit einer 8-Punkt-Vektorwechselwirkung	37
5.1	Grundlagen	37
5.2	Die Minimierung des Potenzials	39
5.3	Analytische Berechnungen bei $M = 0$	44
6	Das NJL-Modell mit einer 4N-Punkt-Vektorwechselwirkung	47

7	Fazit und Ausblick	52
8	Danksagung/Acknowledgment	54
8.1	Danksagung	54
8.2	Acknowledgment	54
9	Hilfsmittel	58
10	Erklärung zur Abschlussarbeit	59

1 Motivation

Die Quantenchromodynamik (QCD) beschreibt die Theorie der starken Wechselwirkung, insbesondere der Wechselwirkung zwischen Quarks durch Gluonen. Diese Wechselwirkung ist von zentraler Bedeutung in extrem dichter und kompakter Materie, wie sie in Neutronensternen vorkommt.

Zur Beschreibung von solcher Materie wird die Zustandsgleichung der Materie betrachtet. Diese liefert die Energiedichteabhängigkeit des Drucks

$$p = p(\epsilon). \quad (1.1)$$

Eine steife Zustandsgleichung liefert höhere Drücke für gleiche Energiedichten. Dies ermöglicht die Existenz schwerer Neutronensterne, da der Stern somit höheren äußeren Gravitationskräften standhalten kann. Der Neutronenstern ist stabil, wenn der innere Druck im Stern gerade die äußere Gravitationskraft kompensiert. Beispielsweise ist die Zustandsgleichung eines ultra-relativistischen Gases aus Teilchen gegeben durch

$$p(\epsilon) = \frac{1}{3}\epsilon. \quad (1.2)$$

Die Zustandsgleichung mit der höchsten Steifigkeit lautet [1]

$$p(\epsilon) = \epsilon. \quad (1.3)$$

Neben der Stabilität des Sterns lässt sich die Masse-Radius Beziehung durch die Zustandsgleichung festlegen. Dieser Zusammenhang wird durch die Tolman–Oppenheimer–Volkoff (TOV) Gleichung beschrieben [2, 3]. Diese ordnet jeder Zustandsgleichung eine zugehörige Masse-Radius Beziehung zu.

Das Quadrat der Schallgeschwindigkeit ist gegeben durch die partielle Ableitung der Zustandsgleichung $p(\epsilon)$ nach der Energiedichte ϵ

$$c_s^2 = \left. \frac{\partial p(\epsilon)}{\partial \epsilon} \right|_{\frac{s}{n}}. \quad (1.4)$$

Diese Ableitung ist bei konstanter Entropiedichte s über Teilchendichte n zu betrachten. Bei verschwindenden Temperaturen, verschwindet ebenso die Entropiedichte. Im Rahmen dieser Arbeit kann somit das Quadrat der Schallgeschwindigkeit geschrieben werden zu

$$c_s^2 = \left. \frac{\partial p(\epsilon)}{\partial \epsilon} \right|_{T=0}. \quad (1.5)$$

Eine grundlegende Forderung an die Zustandsgleichung für dichte Materie ist die Kausalität, was impliziert, dass die Schallgeschwindigkeit c_s die Lichtgeschwindigkeit $c_0 = 1$, die hier in natürlichen Einheiten angegeben ist, nicht überschreiten darf. Je nachdem, welche weiteren Anforderungen die Theorie erfüllen soll, kann die Schallgeschwindigkeit weiter eingeschränkt werden. Nicht-relativistische Theorien sollten $c_s \ll 1$ liefern, wohingegen ultrarelativistische Theorien $c_s^2 = \frac{1}{3}$ fordern, wie es beispielsweise für Gase aus ultrarelativistischen, masselosen und nicht wechselwirkenden Teilchen der Fall ist. Die Schallgeschwindigkeit wird kleiner als $c_s^2 = \frac{1}{3}$, wenn massebehaftete Teilchen berücksichtigt werden, oder bestimmte, skalare Wechselwirkungen zwischen den Teilchen einbezogen werden. Die QCD fordert, dass sich das Quadrat der Schallgeschwindigkeit bei sehr hohen Dichten von unten dem Grenzwert $c_s^2 = \frac{1}{3}$, welcher bei asymptotisch hohen Dichten erreicht wird, annähert. [4].

In dieser Arbeit wird die Schallgeschwindigkeit in extrem dichter und kompakter Materie im Rahmen des Nambu-Jona-Lasinio (NJL) Modells untersucht. Vor allem wird der Einfluss unterschiedlicher Vektorwechselwirkungsterme auf das Quadrat der Schallgeschwindigkeit analysiert. Dabei wird untersucht, welche Wechselwirkung den QCD Grenzwert von $c_s^2 = \frac{1}{3}$ garantiert und welche Wechselwirkung die Kausalität der Theorie garantiert.

Es werden hier Vektorwechselwirkungen gewählt, da sie nötig sind um Neutronensternmassen zu erreichen, welche zwei mal die Sonnenmasse besitzen. Die Arbeit [5] zeigt, dass die Masse-Radius Beziehung, durch eine hinreichend große Vektorwechselwirkung, Neutronensterne mit Massen bis zu zwei Sonnenmassen beschreibt.

Begonnen wird mit der skalaren Wechselwirkung, welche eine freie Theorie für asymptotisch hohe Dichten reproduziert. Es wird geprüft, ob hierbei die Schallgeschwindigkeit für asymptotisch hohe Dichten tatsächlich den gewünschten Grenzwert von $c_s = \frac{1}{\sqrt{3}}$ erreicht. Im Anschluss erfolgt die Untersuchung von Vektorwechselwirkungstermen verschiedener Ordnungen. Zunächst wird die 4-Punkt-Vektorwechselwirkung betrachtet, gefolgt von der 8-Punkt-Vektorwechselwirkung. Abschließend wird eine allgemeine 4N-Punkt-Vektorwechselwirkung analysiert. Ziel dieser Untersuchung ist es, einen allgemeinen Ausdruck für das asymptotische Verhalten des Quadrats der Schallgeschwindigkeit abzuleiten.

2 Einführung

2.1 Das Standardmodell der Teilchen

Das Standardmodell der Teilchenphysik beschreibt die grundlegenden Bausteine der Materie sowie die Wechselwirkungen, die zwischen ihnen wirken. Eine schematische Übersicht dazu ist in Abbildung 2.1 dargestellt. Das Modell umfasst Fermionen und Bosonen, wobei

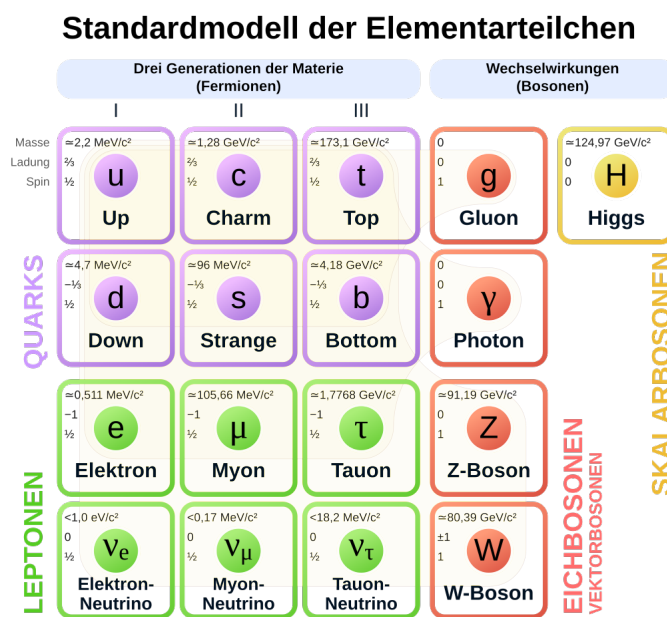


Abbildung 2.1: Dargestellt ist der schematische Aufbau des Standardmodells der Elementarteilchen [6]

Fermionen die Materieteilchen sind und Bosonen die Wechselwirkungsteilchen. Das Modell unterscheidet zwischen zwölf fundamentalen Fermionen, die in drei Generationen unterteilt sind, vier Wechselwirkungsteilchen, sogenannte Eichbosonen, die für die Vermittlung von drei der vier fundamentalen Kräfte verantwortlich sind und das Higgs-Boson, ein skalares Teilchen [7].

Die zwölf Fermionen des Standardmodells lassen sich neben der Unterteilung in Generationen, in sechs Quarks und sechs Leptonen unterteilen. Besonders die Quarks sind von großer Bedeutung für die Charakterisierung von Neutronensternen. Die Fermionen sind durch einen halbzahligen Spin von $\frac{1}{2}$ ausgezeichnet.

Die Quarks werden zusätzlich durch ihre verschiedenen Flavours unterschieden, und zwar in Up, Down, Charm, Strange, Top und Bottom Quarks. Im Rahmen dieser Arbeit werden lediglich die Up- und Downquarks untersucht [7].

Zu den Austauschpartikeln gehört das Photon, welches die elektromagnetische Wechselwirkung vermittelt, die W- und Z Bosonen, welche die schwache Wechselwirkung vermitteln und die Gluonen, welche die starke Wechselwirkung vermitteln. Alle Eichbosonen besitzen einen ganzzahligen Spin von Eins. Insbesondere die Gluonen sind hier von zentraler Bedeutung, da die zu untersuchende Materie, bestehend aus Quarks, durch die starke Wechselwirkung wechselwirkt [7].

Quarks können nie isoliert auftreten und können somit auch nie direkt beobachtet werden. Sie formen immer farblose Hadronen. Das sind Mehrquarkzustände, welche durch die starke Wechselwirkung gebunden sind. Die Farbladung ist eine Teilcheneigenschaft, die den Quarks zugeordnet werden kann. Es gibt drei Arten von Farbladungen, und zwar Rot, Blau und Grün. Die Quarks haben nun die Möglichkeit farblos gebundene Zustände aus einem Quark und einem Antiquark (Mesonen) oder aus drei Quarks (Baryonen) zu formen. Dieses Phänomen nennt man Confinement [7, 8].

2.2 Phasendiagramm aus der Quantenchromodynamik

Bei hohen Dichten und hohen Temperaturen sind Quarks nicht mehr in Hadronen gebunden, dies nennt man Deconfinement. Der Übergang von der hadronischen Phase zum Quark-Gluonen Plasma (QGP) lässt sich anschaulich in einem Phasendiagramm darstellen, gezeigt in Abbildung 2.2. Zu sehen ist, dass für niedrige Temperaturen T und für ein kleines chemisches Potenzial μ die hadronische Phase vorliegt, in der jeweils Quarks

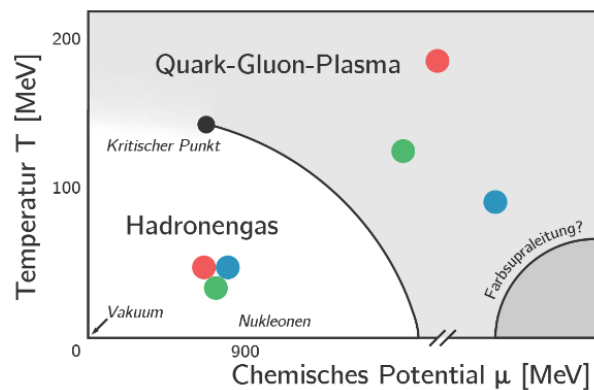


Abbildung 2.2: Schematisches QCD Phasendiagramm mit dem chemischen Potenzial auf der x-Achse und der Temperatur auf der y-Achse [9].

mit unterschiedlicher Farbladung zu einem Hadron gebunden sind. Bei steigenden Temperaturen T und chemischem Potenzial μ wird das QGP erreicht. In dieser Phase wird das Confinement aufgehoben und das QGP liegt vor. Zwischen den Phasen liegt die Phasengrenze, gekennzeichnet durch die schwarze Linie. Der Phasenübergang ist bis zum kritischen Endpunkt erster Ordnung. Im kritischen Endpunkt ist der Phasenübergang zweiter Ordnung. Es ist zu betonen, dass der Phasenübergang erster Ordnung und der kritische Endpunkt lediglich Hypothesen sind und bisher experimentell nicht nachgewiesen werden konnten [8]. Bei kleinerem chemischen Potenzial μ und höheren Temperaturen T liegt ein Crossover vor. Ein Crossover ist ein Phasenübergang ohne scharf definierte Phasengrenze. Die Eigenschaften des Systems ändern sich kontinuierlich mit ansteigender Temperatur. Der Crossover hingegen ist durch Gitterrechnungen gut fundiert. Bei sehr hohem chemischen Potenzial μ und geringen Temperaturen T wechselt die Phase in eine farbsupraleitende Phase [10]. Diese ist im Rahmen dieser Arbeit nicht von Bedeutung und wird aus dem Grund nicht näher besprochen. Weitere Details zur farbsupraleitenden Phase finden sich in [11].

2.3 Nambu-Jona-Lasinio Modell

Das Nambu-Jona-Lasinio Modell (NJL-Modell) wurde 1961 von Nambu und Jona-Lasinio entwickelt [12, 13]. Zu diesem Zeitpunkt war die Existenz von Quarks noch unbekannt, und das Modell diente der Beschreibung der Wechselwirkungen zwischen Nukleonen.

Somit wurde das Confinement und die Farbladung auch nie berücksichtigt. Allerdings betrachtet das Modell wichtige Symmetrien der QCD, wie die chirale Symmetrie. Somit ist es ein gutes Modell zur Beschreibung chiraler Symmetriebrechung [8, 12, 13].

2.3.1 Die NJL Lagrangedichte

Die NJL-Lagrangedichte beschreibt Quarkfelder. In unserem Fall wird ein Quarkfeld mit nur zwei von sechs Flavours und drei Farbladungen betrachtet. Tatsächlich spielen die drei schwersten Flavours bei den hohen Dichten, die im Rahmen dieser Thesis betrachtet werden, keine Rolle. Die dazugehörige Anzahl an Freiheitsgrade lauten: $N_f = 2$ und $N_c = 3$. Es werden Quarks mit zwei unterschiedlichen Flavours, Up und Down, und mit drei unterschiedlichen Farbladungen, Rot, Blau und Grün, betrachtet. Die Lagrangedichte hat die Form:

$$\mathcal{L}_{\text{NJL}} = \bar{\psi}(i\rlap{/}\partial - m)\psi + G [(\bar{\psi}\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma_5\vec{\tau}\psi)^2]. \quad (2.1)$$

Diese Lagrangedichte beschreibt das Quarkfeld ψ mit dessen konjugiertem Feld $\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma_0$. Der erste Summand entspricht der Lagrangedichte der freien Dirac-Gleichung, wobei $m = \text{diag}(m_u, m_d)$ die Massematrix der nackten Quarkmassen für Up- und Down-Quarks ist. Da wir nur zwei Flavour-Freiheitsgrade erlauben, ist m eine 2x2 Matrix. Es wird die Annahme $m = m_u = m_d$ gemacht. $\rlap{/}\partial$ ist der Feynman Slash, der zur Abkürzung folgenden Skalarproduktes dient: $\rlap{/}\partial = \sum_{\mu=0}^3 \gamma^\mu \partial_\mu$. Der zweite Summand stellt den Wechselwirkungsterm dar. Der Ausdruck $G(\bar{\psi}\psi)^2$ beschreibt die skalare Wechselwirkung zwischen den Quarks, während $G(\bar{\psi}i\gamma_5\vec{\tau}\psi)^2$ die pseudoskalare Wechselwirkung der Quarks charakterisiert. Der Vektor $\vec{\tau}$ beinhaltet die Pauli-Matrizen im Isospin-Raum und γ^5 ist definiert durch $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$. G ist die Kopplungskonstante der skalaren Wechselwirkung. Dabei muss G die Dimension MeV^{-2} haben [8, 12, 13].

Das NJL-Modell stellt ein nicht renormierbares Modell dar. Ein renormierbares Modell hingegen ermöglicht die Einführung endlich vieler Parameter, die zur Absorption der Divergenzen im Modell dienen. Im NJL-Modell ist dies jedoch nicht möglich, stattdessen ist die Anwendung von Cut-Off-Regularisierungen erforderlich, um die Divergenzen zu umgehen.

2.3.2 Konstituentenquarks

Die Selbstenergie der Quarks lässt sich durch die Hartee-Näherung berechnen. Die damit verbundene Dyson-Gleichung ist in Abbildung 2.3 zu sehen. Die dicke Linie beschreibt

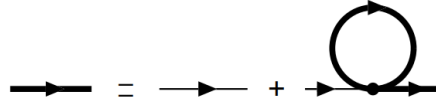


Abbildung 2.3: Die Abbildung zeigt die Dyson-Gleichung für einen Quark-Propagator in der Hartee-Näherung [8].

den vollen Quarkpropagator $S(p)$, die dünne Linie den wechselwirkungsfreien Propagator $S_0(p)$ und der Loopbeitrag Σ beschreibt die Selbstenergie der Quarks. Abbildung 2.3 lässt sich nun schreiben zu

$$S(p) = S_0(p) + S_0(p)\Sigma S(p). \quad (2.2)$$

Die Propagatoren sind gegeben durch

$$S_0(p) = \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2 + i\epsilon} = (\not{p} - m + i\epsilon)^{-1}, \quad (2.3)$$

$$S(p) = \frac{\not{p} - M}{p^2 - M^2 + i\epsilon} = (\not{p} - M + i\epsilon)^{-1}. \quad (2.4)$$

Einsetzen dieser Ausdrücke in Gleichung (2.2) und Umformen ergibt

$$M = m + \Sigma. \quad (2.5)$$

Die Selbstenergie kann nun auch weiter ausgewertet werden. Details zu dieser Auswertung finden sich in [8]. Hier wird lediglich das Resultat angegeben

$$M = m + 8N_f N_c G_i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{M}{p^2 - M^2 + i\epsilon}. \quad (2.6)$$

Diese Gleichung wird als Gap-Gleichung bezeichnet. m ist die nackte Quarkmasse, die durch eine Verschiebung die Konstituentenmasse M ergibt. N_f ist der Flavour-Freiheitsgrad und N_c ist der Farb-Freiheitsgrad [8, 10].

2.3.3 Die Cut-Off Regularisierung

Im Rahmen der Auswertung sind Integrale der Form

$$\int_{\mathbb{R}} d^3 p E_p \quad \text{und} \quad \int_{\mathbb{R}} \frac{d^3 p}{E_p} \quad (2.7)$$

zu lösen, wobei E_p gegeben ist durch die relativistische Energie-Impuls Beziehung in natürlichen Einheiten

$$E_p = \sqrt{p^2 + M^2}. \quad (2.8)$$

Diese Integrale sind unter anderem notwendig zur Berechnung des Potentials oder zum Lösen der Gap-Gleichungen in Gleichung (3.8), (4.14) und (4.15). Im ersten Schritt werden die Integrale in Kugelkoordinaten transformiert. Dabei lassen sich die Winkelintegrationen direkt ausführen und es ergibt sich ein multiplikativer Faktor von 4π . Dies ist möglich, da lediglich homogene Systeme betrachtet werden, die keine Winkelabhängigkeit aufweisen. Die Integrale sind nun in der Form

$$\int_0^\infty dp p^2 E_p \quad \text{und} \quad \int_0^\infty dp \frac{p^2}{E_p}. \quad (2.9)$$

Diese Integrale divergieren bei Ausführung der Integration. Um dies zu vermeiden, wird die 3D-Cut-Off Regularisierung, mit dem Regularisierungsparameter Λ , eingeführt [8]. Der Cut-Off-Parameter wird als obere Grenze der Integrale gewählt. Dadurch ist es möglich explizite Ausdrücke für die Integrale zu berechnen. Die restlichen Integrale divergieren nicht und können mit der oberen Grenze ∞ berechnet werden. Doch durch einen endlichen, aber sehr großen Impuls-Cutoff sind die Berechnungen, für endlichen Temperaturen, numerisch einfacher zu behandeln. Aus dem Grund wird die obere Grenze der restlichen Integrale hoch gewählt, meist zu 10Λ . Für $T = 0$ ist dies nicht nötig.

3 Das NJL-Modell ohne Vektorwechselwirkung

3.1 Grundlagen

Die NJL-Lagrangedichte ist gegeben in Gleichung (2.1). Um die Mean-Field Rechnung durchzuführen, wird das nicht-verschwindende chirale Kondensat σ angenommen

$$\sigma = \langle \bar{\psi}\psi \rangle. \quad (3.1)$$

Nun kann das Kondensat genutzt werden, um den Term $\bar{\psi}\psi$ durch Addition einer Null umzuschreiben

$$\bar{\psi}\psi = \sigma + (\bar{\psi}\psi - \sigma). \quad (3.2)$$

Der Ausdruck $(\bar{\psi}\psi - \sigma)^2$ beschreibt eine kleine Störung und darf vernachlässigt werden. Der zu linearisierende Term $(\bar{\psi}\psi)^2$ lautet somit

$$(\bar{\psi}\psi)^2 \approx 2\sigma\bar{\psi}\psi - \sigma^2. \quad (3.3)$$

Einsetzen dieses Ausdrucks in die Lagrangedichte ergibt die linearisierte Mean-Field-Lagrangedichte

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{MF} + \mu\psi^\dagger\psi &= \bar{\psi}(i\cancel{D} - \underbrace{(m - 2\sigma G_S)}_{=:M})\psi - G_S\sigma^2 + \mu\psi^\dagger\psi \\ &= \bar{\psi}(i\cancel{D} - M)\psi - \frac{(M - m)^2}{4G_S} + \mu\psi^\dagger\psi. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Durch den zusätzlichen Term $\mu\psi^\dagger\psi$ befindet sich das System nun in einem Medium mit chemischem Potenzial μ . Diese Form der Lagrangedichte erlaubt die Definition einer

Konstituentenmasse M , welche folgende Gleichung erfüllt

$$M = m - 2G_S\sigma \Rightarrow \sigma = -\frac{M - m}{2G_S}. \quad (3.5)$$

Diese Gleichung wird als Gap-Gleichung bezeichnet.

Die Lagrangedichte hat nun die Form einer Lagrangedichte aus nicht wechselwirkenden Teilchen, wobei die Wechselwirkung in der Konstituentenmasse M steckt. Zudem gibt es einen additiven Term, der im Potenzial mit negativen Vorzeichen eingeht. Das effektive Potenzial berechnet sich allgemein durch

$$\Omega(T, \mu) = -\frac{T}{V} \log(Z), \quad (3.6)$$

wobei Z die großkanonische Zustandssumme beschreibt. Somit lautet das effektive Potenzial Ω

$$\Omega(T, \mu; M) = \frac{(M - m)^2}{4G_S} + \Omega_M(T, \mu), \quad (3.7)$$

wobei die Funktion Ω_M gegeben ist durch

$$\begin{aligned} \Omega_M(T, \mu) = & -\frac{6}{\pi^2} \int_0^\Lambda dp p^2 E_P \\ & - \frac{6}{\pi^2} \int_0^\infty dp p^2 \left[T \log \left(1 + e^{-\frac{E_P - \mu}{T}} \right) + T \log \left(1 + e^{-\frac{E_P + \mu}{T}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Gleichung (3.7) stimmt bis auf eine Konstante c , welche genutzt wurde um das Minimum des effektiven Potenzials auf Null zu setzen. Die relativistische Masse-Impuls Beziehung ist gegeben durch $E_p = \sqrt{p^2 + M^2}$. Hier wurde bereits der Übergang zu Kugelkoordinaten und die Cut-Off Regularisierung durchgeführt. Die Funktion Ω_M beschreibt das großkanonische Potenzial eines freien Teilchens mit Masse M . Weitere Details zur Herleitung der Funktion Ω_M finden sich in [14].

Im folgenden Schritt wird das Kondensat mit dem effektiven Potenzial verknüpft. Dies ist notwendig, um die thermodynamische Konsistenz sicherzustellen und das großkanonische Potenzial korrekt zu bestimmen. Hierfür wird gefordert, dass das chirale Kondensat σ durch folgende totale Ableitung gegeben ist

$$\sigma = -\frac{d\Omega}{dm}. \quad (3.9)$$

Wird diese totale Ableitung mithilfe der Kettenregel erweitert, ergibt sich

$$\sigma = -\frac{d\Omega}{dm} - \frac{\partial\Omega}{\partial M} \frac{dM}{dm}. \quad (3.10)$$

Damit die beiden Gleichungen konsistent sind, muss $\partial_M \Omega \stackrel{!}{=} 0$ gefodert werden. Explizites berechnen dieser Bedingung liefert

$$\frac{\partial\Omega}{\partial M} = -\frac{6}{\pi^2} \left\{ \int_0^\Lambda dp p^2 \frac{M}{E_p} - \int_0^\infty dp p^2 \frac{M}{E_p} [n_p(T, \mu) + \bar{n}_p(T, \mu)] \right\} + \frac{M - m}{2G_S} \stackrel{!}{=} 0, \quad (3.11)$$

wobei hier die Besetzungszahl der Quarks und Antiquarks eingeführt wird

$$n_p(T, \mu) = \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{T}(E_p - \mu)}} \quad \text{und} \quad \bar{n}_p(T, \mu) = \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{T}(E_p + \mu)}}. \quad (3.12)$$

Der Vergleich von Gleichung (3.5) mit Gleichung (3.11) zeigt, dass die Bedingung $\partial_M \Omega \stackrel{!}{=} 0$ nur dann erfüllt ist, wenn für das Kondensat σ folgender Integralausdruck gilt

$$\sigma = -\frac{6}{\pi^2} \left\{ \int_0^\Lambda dp p^2 \frac{M}{E_p} - \int_0^\infty dp p^2 \frac{M}{E_p} [n_p(T, \mu) + \bar{n}_p(T, \mu)] \right\}. \quad (3.13)$$

Die Lösungen der Gap-Gleichung minimieren das Potenzial und ergeben das großkanonische Potenzial Ω_{Gk} , welches durch Ableitungsrelationen weitere thermodynamische Größen festlegt. Zunächst ist der Druck definiert durch

$$p(T, \mu) = -\Omega_{\text{Gk}}(T, \mu). \quad (3.14)$$

Die Entropiedichte und die Teilchendichte ergeben sich durch folgende Ableitungsrelationen

$$n(T, \mu) = -\left. \frac{\partial\Omega_{\text{Gk}}}{\partial\mu} \right|_T \quad \text{und} \quad s(T, \mu) = -\left. \frac{\partial\Omega_{\text{Gk}}}{\partial T} \right|_\mu. \quad (3.15)$$

Die Energiedichte ergibt sich durch

$$\epsilon(T, \mu) = -p(T, \mu) + Ts(T, \mu) + \mu n(T, \mu). \quad (3.16)$$

3.2 Das effektive Potenzial

Zweck dieses Kapitels ist es das Verhalten und die M- und μ -Abhängigkeit des effektiven Potenzials besser zu verstehen, insbesondere im Bezug auf die chirale Symmetriebrechung.

Es soll anhand des Phasenübergangs gezeigt werden, dass die chirale Symmetrie spontan gebrochen wird.

Der Cut-Off Parameter Λ und die Kopplungskonstante G_S werden im Rahmen der gesamten Thesis wie folgt festgelegt zu: $\Lambda = 587.9 \text{ MeV}$, $G_S = \frac{2.44}{\Lambda^2}$. Die Werte wurden [8] entnommen. Zudem untersucht diese Arbeit das Verhalten von Quarkmaterie bei verschwindenden Temperaturen. Da jedoch $T = 1 \text{ MeV}$ numerisch besser zu behandeln ist als $T = 0 \text{ MeV}$ und die Ergebnisse tatsächlich keine Unterschiede aufweisen, wird $T = 1 \text{ MeV}$ im Rahmen der gesamten Arbeit gewählt.

In Bezug auf die nackte Quarkmasse m werden zwei Szenarien untersucht: Einerseits der Fall einer endlichen nackten Quarkmasse von $m = 5.6 \text{ MeV}$, andererseits der chirale Limes, bei dem die nackte Quarkmasse verschwindet, d.h. $m = 0 \text{ MeV}$. Das effektive Potenzial Ω lässt sich für diese zwei Fälle analysieren. Dazu wird es für verschiedene Werte des chemischen Potentials μ in Abhängigkeit der Konstituentenmasse M dargestellt. Die verschiedenen Werte von μ wurden [15] entnommen.

Abbildung 3.1 zeigt die Resultate. Für den Fall $m = 0 \text{ MeV}$ ist das effektive Potenzial in

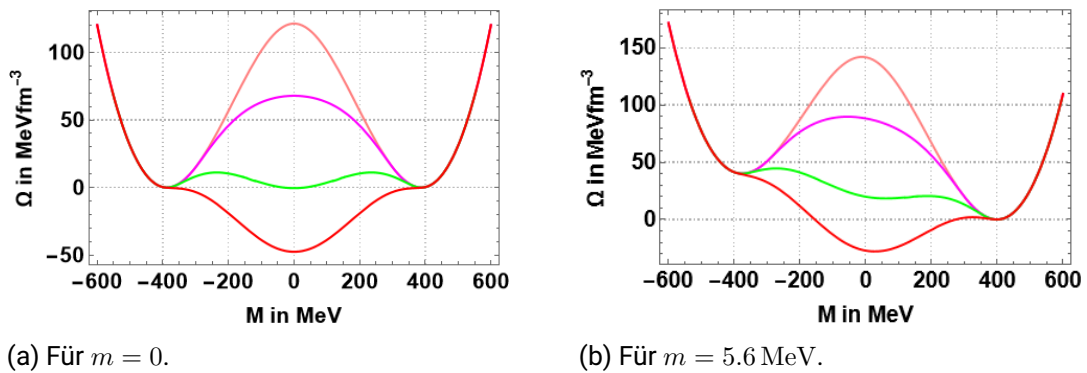


Abbildung 3.1: Effektives Potenzial Ω im chiralen Limes $m = 0$ links und für eine endliche nackte Quarkmasse rechts für $\mu = 0 \text{ MeV}$ in Rosa, $\mu = 300 \text{ MeV}$ in Lila, $\mu_c = 368.6 \text{ MeV}$ in Grün und $\mu = 400 \text{ MeV}$ in Rot.

Abbildung 3.1a zu sehen und für den Fall $m = 5.6 \text{ MeV}$ in Abbildung 3.1b. Aufgrund der Abwesenheit der nackten Quarkmasse m , zeigt das Potenzial aus 3.1a eine Achsensymmetrie bezüglich der $M = 0$ Achse. Des Weiteren ist zu erkennen, dass das Minimum des Potentials bei hohen Werten von μ bei $M = 0$ liegt. Durch Verringerung der μ -Werte, verschiebt sich das Minimum zunächst nicht, bis ein kritischer Wert $\mu_c = 368.6 \text{ MeV}$ erreicht ist. Ab diesem Wert springt das Minimum des Potentials abrupt von $M = 0$ zu $M = 400 \text{ MeV}$. An dieser Stelle befindet sich der Phasenübergang erster Ordnung, der

die chiral gebrochene Phase von der restaurierten Phase trennt. Die chiral gebrochene Phase findet sich für kleine Werte von μ und die restaurierte Phase findet sich bei großen Werten von μ .

Im nächsten Schritt wird eine endliche nackte Quarkmasse von $m = 5.6 \text{ MeV}$ hinzugefügt. Das effektive Potenzial ist in Abbildung 3.1b gezeigt. Zunächst ist zu beobachten, dass das Potenzial keine Achsensymmetrie mehr aufweist. Die nackte Quarkmasse m bricht explizit die Symmetrie des Potenzials. Darüber hinaus ist zu sehen, dass der Phasenübergang erster Ordnung erhalten bleibt.

3.3 Die Minimierung des Potenzials

Ziel dieses Kapitels besteht darin, die Konstituentenmassen M mithilfe der Gap-Gleichung zu bestimmen und darauf aufbauend das großkanonische Potenzial Ω_{GK} zu berechnen. Um aus dem effektiven Potenzial das großkanonische Potenzial zu erhalten, muss das effektive Potenzial minimiert werden. Das effektive Potenzial ist minimiert, wenn die Lösungen der Gap-Gleichung in das effektive Potenzial eingesetzt werden. Existieren mehrere Lösungen der Gap-Gleichungen, dann ist nur die zu betrachten, die den kleinsten Wert für das Potenzial liefert [8].

Die Gap-Gleichung muss für jedes μ separat gelöst werden. Die Lösungen lassen sich in einem $M - \mu$ Diagramm gegeneinander auftragen. Alle Berechnungen in diesem Kapitel werden im chiralen Limes ($m = 0$) durchgeführt. Abbildung 3.2 zeigt, dass es sich hierbei um einen Phasenübergang erster Ordnung handelt, da das Minimum des Potenzials ab einem bestimmten Wert von μ einen diskontinuierlichen Sprung macht. Vor dem Phasenübergang liegt die chiral gebrochene Phase vor. An einem kritischen Wert des chemischen Potenzials μ_c kommt es dann zum Phasenübergang erster Ordnung. Nach dem Phasenübergang liegt die restaurierte Phase vor. Zudem wurde bereits in Abbildung 3.1b festgestellt, dass der Phasenübergang erster Ordnung ist. μ fungiert hierbei als Kontrollparameter des Phasenübergangs, während das Kondensat σ den Ordnungsparameter repräsentiert. Das Kondensat σ ist proportional zu $M - m$ und da die nackte Quarkmasse m zu Null gewählt wurde, ist in den Abbildungen lediglich M der Ordnungsparameter.

Durch Einsetzen der Lösungen der Gap-Gleichung in das effektive Potenzial, kann das großkanonische Potenzial grafisch dargestellt werden. Abbildung 3.3a zeigt das großkanonische Potenzial gegen das chemische Potenzial μ aufgetragen. Der Druck ist gegeben durch $p = -\Omega$ und in Abbildung 3.3b zu sehen.

Sowohl das großkanonische Potenzial als auch der Druck sind stetige Funktionen von

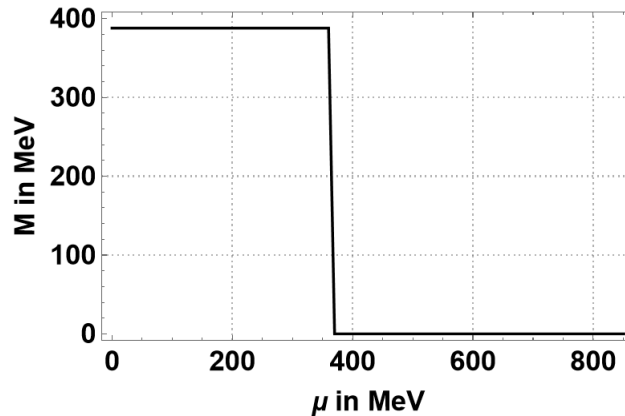


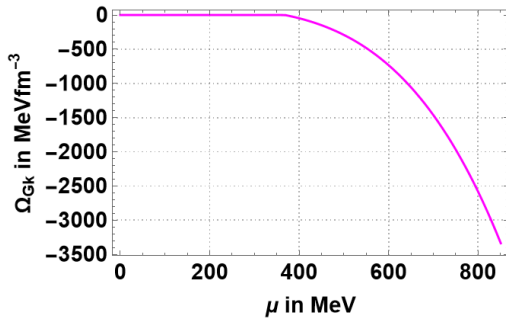
Abbildung 3.2: Dargestellt sind die Lösungen der Gap-Gleichung in einem $M - \mu$ Diagramm.

μ . Beide Funktionen sind bis zum Erreichen des Phasenübergangs Null und fallen bzw. steigen dann.

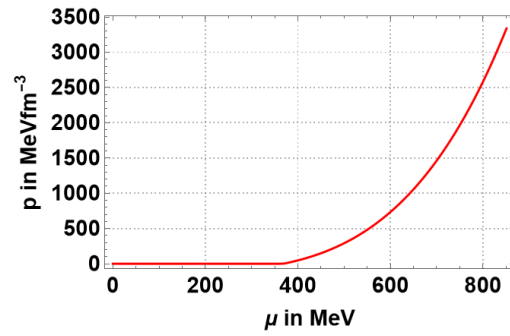
In einem nächsten Schritt lassen sich die Teilchendichte n und die Entropiedichte s durch die Ableitungsrelationen aus Gleichung (3.15) berechnen. Diese lassen sich ebenso gegen das chemische Potenzial μ darstellen, zu sehen in Abbildung 3.4a und 3.4b.

Die Teilchendichte wurde hierbei durch $n_s \approx 0.45 \text{ fm}^{-3}$ normiert, was dem Dreifachen der Kernsättigungsdichte von etwa 0.15 fm^{-3} entspricht. Die Kernsättigungsdichte beschreibt die Dichte von Kernmaterie im Gleichgewichtszustand bei verschwindender Temperatur, wobei unter Kernmaterie stark wechselwirkende Nukleonen verstanden werden [16]. Da in diesem Fall die Quarkdichte betrachtet wird und ein Baryon aus drei Quarks besteht, erfolgt die Normierung durch das Dreifache der Sättigungsdichte, was eine sinnvolle Skalierung der Teilchendichte gewährleistet. Im folgenden wird die Quarkdichte immer durch $\frac{n}{n_s}$ angegeben. Sowohl die Teilchendichte n als auch die Entropiedichte s sind monoton steigende Funktionen von μ und haben beim Phasenübergang einen Sprung von Null auf einen endlichen Wert. An Abbildung 3.4b ist der Einfluss der endlichen Temperatur zu erkennen. Bei einer Temperatur von $T = 0 \text{ MeV}$ wäre die Entropiedichte konstant Null, doch da hier eine endliche, doch sehr kleine Temperatur von $T = 1 \text{ MeV}$ gewählt wurde, hat auch die Entropiedichte s einen kleinen, doch endlichen Wert.

Mithilfe der bisher berechneten thermodynamischen Größen, wird jetzt die Energiedichte ϵ , wie in Gleichung (3.16) beschrieben, berechnet. Im Anschluss wird der Druck p gegen die Energiedichte ϵ in Abbildung 3.5a grafisch dargestellt. Die Schallgeschwindigkeit ist

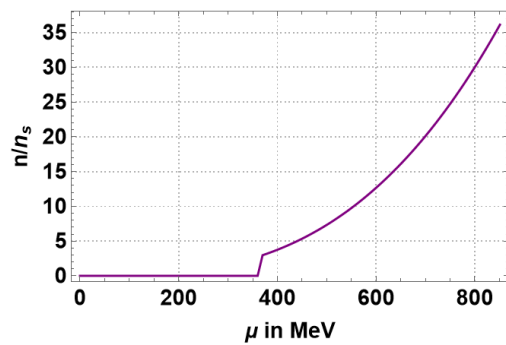


(a) Großkanonisches Potenzial Ω_{Gk} gegen chemisches Potenzial μ .

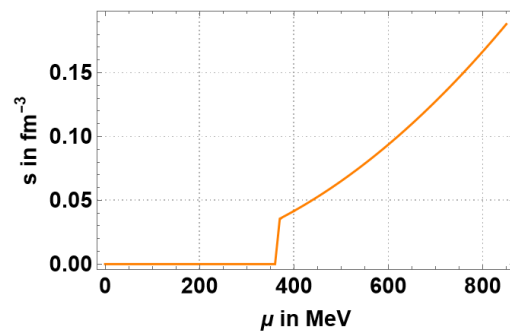


(b) Druck p gegen chemisches Potenzial μ .

Abbildung 3.3: Dargestellt ist das großkanonische Potenzial links und der Druck rechts.



(a) Teilchendichte n gegen chemisches Potenzial μ .



(b) Entropiedichte s gegen chemisches Potenzial μ .

Abbildung 3.4: Dargestellt ist die Teilchendichte n links und die Entropiedichte s rechts.

gegeben durch die partielle Ableitung des Drucks nach der Energiedichte

$$c_s^2 = \left. \frac{\partial p}{\partial \epsilon} \right|_{T=0}. \quad (3.17)$$

Somit ist das die Ableitung der in Abbildung 3.5a gezeigten Kurve. Die Schallgeschwindigkeit ist in Abbildung 3.5b zu sehen. Die Kurve in Abbildung 3.5a ist monoton und linear

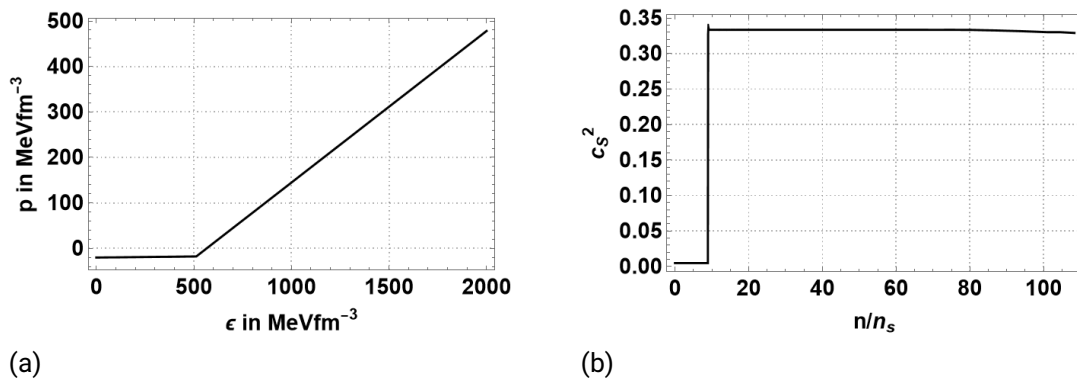


Abbildung 3.5: Dargestellt ist der Druck p gegen die Energiedichte ϵ links und das Quadrat der Schallgeschwindigkeit c_s^2 gegen die Teilchendichte n rechts.

steigend. Aus dem Grund muss die Schallgeschwindigkeit eine Konstante sein, was in Abbildung 3.5b auch bestätigt wird. Der kleine Sprung in Abbildung 3.5b bei ungefähr $\frac{n}{n_s} = 10$ ist von numerischer Natur und hat keine physikalische Bedeutung. Der Wert der Schallgeschwindigkeit sollte oberhalb des kritischen Wertes μ_c bei $\frac{1}{\sqrt{3}}$ liegen. Da das chemische Potenzial hier groß genug ist kann angenommen werden, dass dies zutrifft und somit eine freie Theorie repräsentiert wird.

3.4 Analytische Berechnungen bei $M = 0$

Die im vorherigen Abschnitt erzielten Ergebnisse sollen nun analytisch reproduziert werden. Ziel dieser Analyse ist es, durch den gewonnenen analytischen Ausdruck den exakten asymptotischen Wert der Schallgeschwindigkeit zu ermitteln.

Zur analytischen Berechnung werden die Grenzwerte $T \rightarrow 0$ und $M \rightarrow 0$ betrachtet. Es lässt sich mit Hilfe der Gap-Gleichung für die Konstituentenmasse M zeigen, dass $M \rightarrow 0$

für hohe Werte von μ immer eine sinnvolle Annahme ist. Dazu wird die Gap-Gleichung durch M geteilt und der Grenzwert $\mu \rightarrow \infty$ gebildet. Diese Annahme hat den Vorteil, dass durch das Verschwinden der Konstituentenmasse M die Gap-Gleichung für M wegfällt, was die analytischen Berechnungen stark vereinfacht. Die nackte Quarkmasse m wird ebenfalls zu Null gesetzt. In diesem Grenzwert lautet das großkanonische Potenzial

$$\begin{aligned}\Omega(\mu) &= -\frac{6}{\pi^2} \left\{ \int_0^\Lambda dp p^3 + \int_0^\mu p^2(\mu - p) \right\} \\ &= -\frac{6}{\pi^2} \left\{ \frac{\Lambda^4}{4} + \frac{\mu^4}{12} \right\}.\end{aligned}\quad (3.18)$$

Eine ausführliche Erklärung zur Grenzwertbildung ist in Kapitel 4.4 gegeben. Es ist zu erkennen, dass das großkanonische Potenzial durch den Grenzwert nur noch vom chemischen Potenzial μ abhängt. Dieses lässt sich nun gegen das chemische Potenzial auftragen und mit den numerischen Ergebnissen vergleichen. Der Vergleich findet sich in Abbildung 3.6. Zu sehen ist, dass die analytischen Ergebnisse mit den Numerischen nach

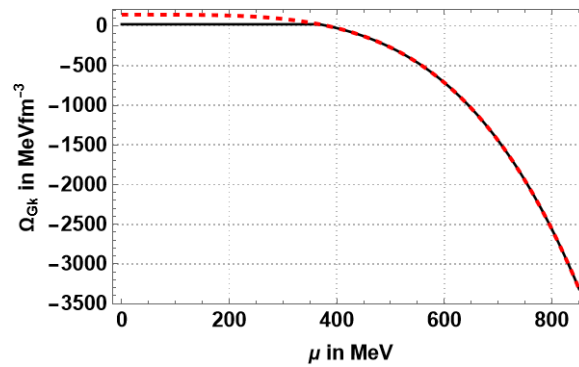


Abbildung 3.6: Großkanonisches Potenzial durch die numerische Berechnung (schwarz) und durch die analytische Berechnung (rot).

dem Phasenübergang übereinstimmen.

Im nächsten Schritt kann das großkanonische Potenzial aus Gleichung (3.18) nach dem chemischen Potenzial μ abgeleitet werden. Über die Relation $n = -\frac{\partial\Omega}{\partial\mu}$ ergibt sich der analytische Ausdruck für die Teilchendichte n

$$n = \frac{2\mu^3}{\pi^2}.\quad (3.19)$$

Der Vergleich der numerischen Teilchendichte mit der analytischen Teilchendichte ist in Abbildung 3.7 zu sehen.

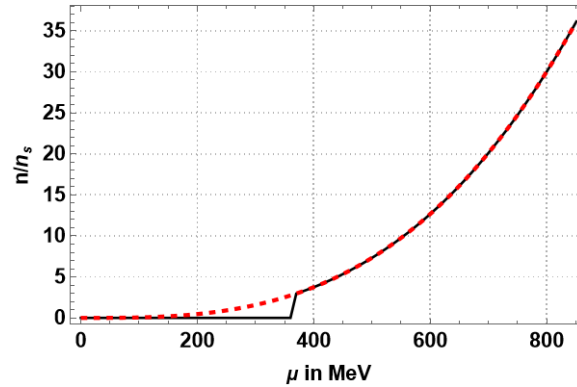


Abbildung 3.7: Numerische Teilchendichte n (schwarz) analytische Teilchendichte n (rot).

Zur analytischen Berechnung der Schallgeschwindigkeit wird folgender Ausdruck genutzt

$$c_s^2 = \frac{\partial p}{\partial \epsilon} = \frac{n}{\mu} \cdot \left(\frac{\partial n}{\partial \mu} \right)^{-1}. \quad (3.20)$$

Um diesen Ausdruck nachzuvollziehen, wird auf [17] verwiesen. Der analytische Ausdruck für n ist bekannt. Durch Einsetzen und Ableiten von n ergibt sich für das Quadrat der Schallgeschwindigkeit

$$c_s^2 = \frac{2\mu^3}{\pi^2 \mu} \left(\frac{6\mu^2}{\pi^2} \right)^{-1} = \frac{1}{3} \quad (3.21)$$

Die Schallgeschwindigkeit erreicht für große Werte des chemischen Potentials μ den Wert $\frac{1}{3}$. Der Vergleich mit den numerischen Ergebnissen in Abbildung 3.8 zeigt, dass diese mit den analytischen Ergebnissen übereinstimmen und somit ebenso gegen $\frac{1}{3}$ gehen.

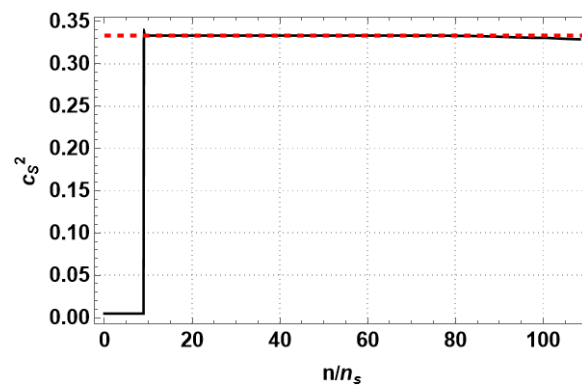


Abbildung 3.8: Quadrat der Schallgeschwindigkeit aus den numerischen Berechnungen (schwarz) und aus der analytischen Berechnung (rot).

4 Das NJL-Modell mit einer 4-Punkt-Vektorwechselwirkung

Die 4-Punkt-Vektorwechselwirkung stellt eine repulsive Kraft dar, wodurch die Quarks bei hohen Dichten eine abstoßende Kraft erfahren. Diese abstoßende Kraft ist insbesondere in extrem dichten Objekten, wie Neutronensternen, von großer Bedeutung. Der durch die Abstoßung der Quarks entstehende innere Druck herrscht bei massereicheren Neutronensternen, mit Massen bis zu zwei Sonnenmassen.

Die Annahme ist, dass die zusätzliche Vektorwechselwirkung durch ihren repulsiven Charakter zu einer höheren Schallgeschwindigkeit führt. Andererseits darf die Schallgeschwindigkeit nicht größer als eins werden, da sonst die Kausalität verletzt werden würde. Ob die Annahme erfüllt wird und ob die Kausalität gewahrt bleibt, wird in diesem Kapitel untersucht.

4.1 Grundlagen

Die NJL Lagrangedichte, mit einem zusätzlichen 4-Punkt-Vektorwechselwirkungsterm lautet

$$\mathcal{L}_{\text{NJL}} = \bar{\psi}(i\cancel{\partial} - \underline{m})\psi + G_S[(\bar{\psi}\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma_5\vec{\tau}\psi)^2] - G_V(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)^2. \quad (4.1)$$

Die ersten zwei Summanden sind bereits aus Abschnitt 2.3.1 bekannt und der dritte Term beschreibt die neue Vektorwechselwirkung mit der entsprechenden Kopplungskonstanten G_V . Der Vektorwechselwirkungsterm wird bei nicht verschwindenden Dichten relevant. Um \mathcal{L}_{NJL} in der Mean-Field-Näherung berechnen zu können, werden zwei nicht verschwindenden Kondensate σ und n angenommen

$$\sigma = \langle \bar{\psi}\psi \rangle, \quad (4.2)$$

$$n = \langle \psi^\dagger\psi \rangle = \langle \bar{\psi}\gamma^0\psi \rangle. \quad (4.3)$$

σ ist bereits bekannt und n ist die Quarkdichte. Zusätzlich sollen die Kondensate $n^i = \langle \bar{\psi}\gamma^i\psi \rangle$ mit $i = 1, 2, 3$ verschwinden, um Rotationssymmetrie zu gewährleisten. Mittels dieser Kondensate sollen die Wechselwirkungsterme aus \mathcal{L}_{NJL} linearisiert werden. Für das chirale Kondensat σ gelten die gleichen Rechenschritte wie im Abschnitt zuvor. Diese werden hier nicht erneut angegeben. Für die Linearisierung wird der Term $\bar{\psi}\gamma^0\psi$ durch Addition einer Null umgeschrieben zu

$$\bar{\psi}\gamma^0\psi = n + (\bar{\psi}\gamma^0\psi - n). \quad (4.4)$$

Die Terme in den Klammern entsprechen auch hier kleinen Störungen. Im nächsten Schritt wird die Gleichung quadriert und der Ausdruck $(\bar{\psi}\gamma^0\psi - n)^2$ vernachlässigt

$$(\bar{\psi}\gamma^0\psi)^2 \approx 2n\bar{\psi}\gamma^0\psi - n^2. \quad (4.5)$$

Die Lagrangedichte in der Mean-Field-Näherung lautet nun

$$\mathcal{L}_{\text{MF}} + \mu\psi^\dagger\psi = \bar{\psi}(i\cancel{\partial} - m)\psi + G_S[2\sigma\bar{\psi}\psi - \sigma^2] - G_V[2n\psi^\dagger\psi - n^2] + \mu\psi^\dagger\psi. \quad (4.6)$$

Der Übergang in ein Medium wurde analog zu Kapitel 3 durchgeführt. Die Terme lassen sich nun so umsortieren, dass sie die Definition einer Konstituentenmasse M und eines renormierten chemischen Potentials $\tilde{\mu}$ erlauben

$$\mathcal{L}_{\text{MF}} + \mu\psi^\dagger\psi = \bar{\psi}(i\cancel{\partial} - \underbrace{(m - 2\sigma G_S)}_{=:M})\psi + \psi^\dagger(\underbrace{-2nG_V + \mu}_{=: \tilde{\mu}})\psi - G_S\sigma^2 + G_V n^2. \quad (4.7)$$

Die Ausdrücke für M und $\tilde{\mu}$ werden nach den Kondensaten aufgelöst

$$M = m - 2G_S\sigma \Rightarrow \sigma = -\frac{M - m}{2G_S}, \quad (4.8)$$

$$\tilde{\mu} = \mu - 2G_V n \Rightarrow n = \frac{\mu - \tilde{\mu}}{2G_V} \quad (4.9)$$

und in die Mean-Field Lagrangedichte eingesetzt

$$\mathcal{L}_{\text{MF}} + \mu\psi^\dagger\psi = \bar{\psi}(i\cancel{\partial} - M)\psi + \tilde{\mu}\psi^\dagger\psi - \frac{(M - m)^2}{4G_S} + \frac{(\mu - \tilde{\mu})^2}{4G_V}. \quad (4.10)$$

Die in den Gleichungen (4.8) und (4.9) dargestellten Ausdrücke für M und $\tilde{\mu}$ werden als Gap-Gleichungen bezeichnet.

Abgesehen von Termen, welche nur einen trivialen Einfluss auf das Potenzial Ω nehmen, gleicht das Problem einem System aus nicht wechselwirkenden Teilchen der Masse M

bei einem chemischen Potenzial $\tilde{\mu}$. Dabei ist anzumerken, dass die Teilchen natürlich wechselwirken. Die Wechselwirkung ist in der Konstituentenmasse M und im renormierten chemischen Potenzial $\tilde{\mu}$ enthalten.

Unter Berücksichtigung von Gleichung (3.6) ergibt sich das Mean-Field effektive Potenzial zu

$$\Omega(T, \mu; M, \tilde{\mu}) = \Omega_M(T, \tilde{\mu}) + \frac{(M - m)^2}{4G_S} - \frac{(\mu - \tilde{\mu})^2}{4G_V}. \quad (4.11)$$

Die Funktion $\Omega_M(T, \tilde{\mu})$ ist durch Gleichung 3.8 durch das Ersetzen von μ durch $\tilde{\mu}$ gegeben. Um die thermodynamische Konsistenz der Theorie zu gewährleisten, müssen die Kondensate mit dem effektiven Potenzial Ω verknüpft werden. Hierfür müssen die Relationen $\sigma = -d_m \Omega$ und $n = -d_\mu \Omega$ erfüllt sein. Die totalen Ableitungen werden mithilfe der Kettenregel weitergeführt

$$\sigma = \frac{d\Omega}{dm} = \sigma + \frac{\partial\Omega}{\partial M} \frac{dM}{dm} + \frac{\partial\Omega}{\partial\tilde{\mu}} \frac{d\tilde{\mu}}{dm} \quad (4.12)$$

$$n = -\frac{d\Omega}{d\mu} = n - \frac{\partial\Omega}{\partial M} \frac{dM}{d\mu} - \frac{\partial\Omega}{\partial\tilde{\mu}} \frac{d\tilde{\mu}}{d\mu}. \quad (4.13)$$

Um diese Gleichungen zu erfüllen, müssen die partiellen Ableitungen $\partial_M \Omega$ und $\partial_{\tilde{\mu}} \Omega$ verschwinden. Wird diese Bedingung explizit nachgerechnet, ergibt sich

$$\frac{\partial\Omega}{\partial M} = -\frac{6}{\pi^2} \left\{ \int_0^\Lambda dp p^2 \frac{M}{E_p} + \int_0^\infty dp p^2 \frac{M}{E_p} \{-n_p(T, \tilde{\mu}) - \bar{n}_p(T, \tilde{\mu})\} \right\} + \frac{M - m}{2G_S} \stackrel{!}{=} 0, \quad (4.14)$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\tilde{\mu}} = -\frac{6}{\pi^2} \int_0^\infty dp p^2 \{n_p(T, \tilde{\mu}) - \bar{n}_p(T, \tilde{\mu})\} + \frac{\mu - \tilde{\mu}}{2G_V} \stackrel{!}{=} 0. \quad (4.15)$$

Hier wurde die Besetzungszahl der Quarks $n_p(T, \tilde{\mu})$ und die Besetzungszahl der Antiquarks $\bar{n}_p(T, \tilde{\mu})$ aus Gleichung (3.12) durch das Ersetzen von μ durch $\tilde{\mu}$ genutzt.

Durch Vergleich der Gleichungen (4.14) und (4.15) mit den Gap-Gleichungen aus (4.8) und (4.9) lässt sich ein expliziter Integralausdruck für die Kondensate ablesen

$$\sigma = -\frac{6}{\pi^2} \left\{ \int_0^\Lambda dp p^2 \frac{M}{E_p} + \int_0^\infty dp p^2 \frac{M}{E_p} \{-n_p(T, \tilde{\mu}) - \bar{n}_p(T, \tilde{\mu})\} \right\}, \quad (4.16)$$

$$n = \frac{6}{\pi^2} \int_0^\infty dp p^2 \{n_p(T, \tilde{\mu}) - \bar{n}_p(T, \tilde{\mu})\}. \quad (4.17)$$

Somit lässt sich festhalten, dass die Gap-Gleichungen (4.8) und (4.9) mit den Bedingungen $\partial_M \Omega = 0$ und $\partial_{\tilde{\mu}} \Omega = 0$ äquivalent sind, wenn σ und n wie in (4.16) und (4.17) definiert

werden.

Durch simultanes Lösen der Gap-Gleichungen nach den Lösungspaaren $(M, \tilde{\mu})$ und Einsetzen dieser in das effektive Potenzial Ω , resultiert das großkanonische Potenzial Ω_{Gk} . Durch dieses lassen sich weitere thermodynamische Größen, wie der Druck aus Gleichung (3.14), die Entropiedichte aus Gleichung (3.15) und die Energiedichte aus Gleichung (3.16) berechnen.

4.2 Das effektive Potenzial

Das effektive Potenzial ist aus Gleichung (4.11) unter Berücksichtigung von Gleichung (3.8) bekannt und wird in Abhängigkeit von M grafisch dargestellt. Die μ -Werte wurden [15] entnommen. Die Kopplungskonstante G_V wurde durch $G_V = G_S$ festgelegt.

$\tilde{\mu}$ ist nun ein unbekannter Parameter, der zunächst durch das Lösen der Gap-Gleichung (4.15) festgelegt werden muss. Hierfür wird die Gap-Gleichung für feste μ und M nach $\tilde{\mu}$ gelöst. Dieser Vorgang wird für verschiedene Werte von M wiederholt, wodurch für jedes M ein entsprechendes $\tilde{\mu}$ ermittelt wird. Diese Lösungen der Gap-Gleichung können anschließend mit den zugehörigen Werten für μ und M in das Potenzial eingesetzt werden. Das Potenzial wird im chiralen Limes betrachtet und ist in Abbildung 4.1 zu sehen. Das

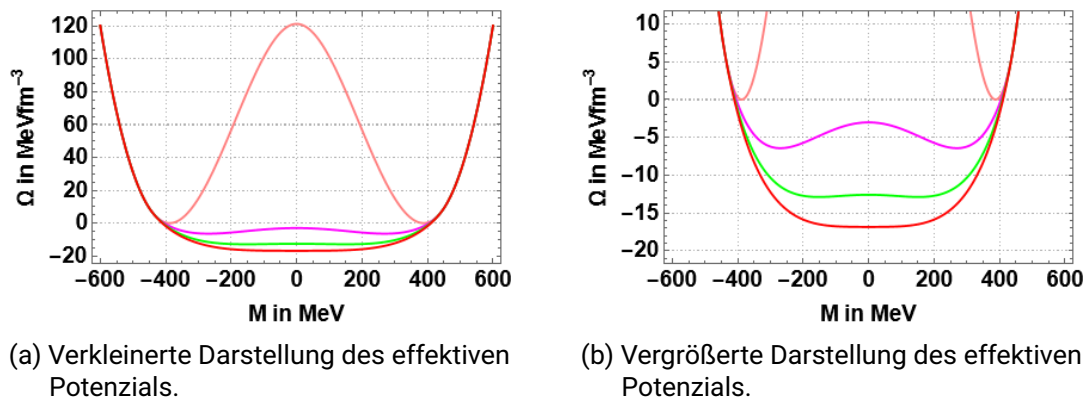


Abbildung 4.1: Effektives Potenzial für $G_V = G_S$ im chiralen Limes $m = 0$. Links ist das Potenzial über das gesamte Intervall dargestellt und rechts ist es vergrößert dargestellt. Die Farben repräsentieren verschiedene chemische Potentiale: Rosa für $\mu = 0$ MeV, Lila für $\mu = 430$ MeV, Grün für $\mu = 440$ MeV und Rot für $\mu = 444.3$ MeV.

Potenzial weist erneut eine Achsensymmetrie um die $M = 0$ Achse auf, was auf den chiralen Limes zurückzuführen ist. Des Weiteren lässt sich ein Phasenübergang zweiter Ordnung beobachten, da das Minimum des Potenzials mit abnehmenden Werten für μ stetig von $M = 0 \text{ MeV}$ zu $M \neq 0$ wandert.

4.3 Die Minimierung des Potenzials

Die Gap-Gleichungen (4.14) und (4.15) bilden ein System aus gekoppelten selbstkonsistenten Gleichungen für $\tilde{\mu}$ und M , die simultan gelöst werden müssen. Gibt es für ein μ mehrere Lösungen, so ist nur die Lösung physikalisch relevant, für die das effektive Potenzial einen geringeren Wert annimmt. Durch Einsetzen der Lösungen der Gap-Gleichungen in das effektive Potenzial (4.11) ergibt sich das großkanonische Potenzial Ω_{Gk} .

Zunächst werden die Lösungen der Gap-Gleichungen gegen μ aufgetragen. Dazu wurden verschiedene Fälle betrachtet und zum einen die Kopplungskonstante G_V und zum anderen der Faktor c variiert. Der Faktor c ist der Vorfaktor des Cut-Offs und wurde in den vorherigen Rechnungen zu zehn gewählt. Die restlichen Parameter sind bereits aus den vorherigen Kapiteln bekannt und werden hier übernommen.

Die Variation des Parameters c wurde durchgeführt und hat ergeben, dass c keinen merklichen Einfluss auf das renormierte chemische Potenzial $\tilde{\mu}$ nimmt. Aus dem Grund wird im Folgenden der hinreichend große Wert $c = 10\Lambda$ genutzt.

Abbildung 4.2 zeigt den Verlauf der Konstituentenmasse M in Abhängigkeit vom chemischen Potenzial μ . In Abbildung 4.2 wird deutlich, dass bei steigenden G_V der Phasen-

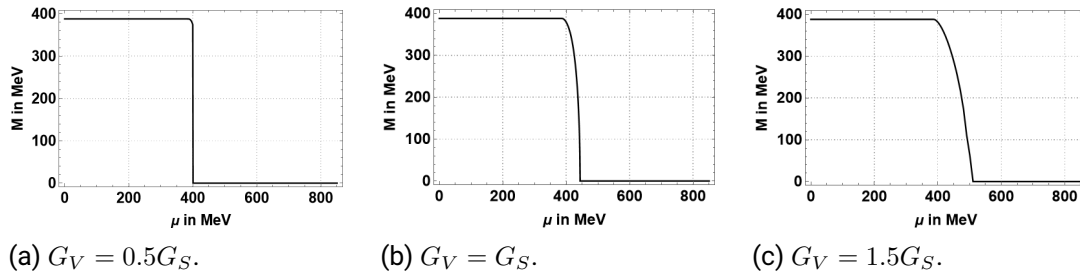


Abbildung 4.2: Konstituentenmasse M gegen chemisches Potenzial μ bei $m = 0$ für verschiedenen Werten der Kopplungskonstante G_V .

übergang kontinuierlicher wird. Für den Fall $G_V = 0.5G_S$, welcher in Abbildung 4.2a

zu sehen ist, lässt sich ein Phasenübergang erster Ordnung von der chiral gebrochenen Phase in die restaurierte Phase vermuten. Dies ist an dem diskontinuierlichen Sprung von der Konstituentenmassen M auf die nackte Quarkmasse m , welche hier zu Null gewählt wurde, festzumachen. Die Phasenübergänge aus Abbildung 4.2b und 4.2c sind zweiter Ordnung, da der Wechsel von der chiralen Phase in die restaurierte Phase kontinuierlich abläuft.

Die Arbeit [18] behandelt ein NJL-Modell mit drei Flavours und kommt zu dem Schluss, dass der Wechsel von einem Phasenübergang erster Ordnung zu einem Phasenübergang zweiter Ordnung ab $\frac{G_V}{G_S} = 0.65$ stattfindet, was mit den vorliegenden Ergebnissen kompatibel ist.

Nun lässt sich die Lösung der Gap-Gleichung für $\tilde{\mu}$ gegen μ auftragen. Die Resultate sind in Abbildung 4.3 zu sehen. Es ist wieder zu erkennen, dass der Übergang bei steigenden

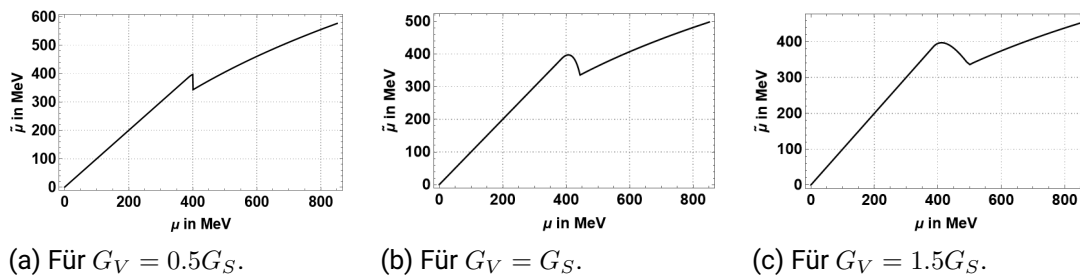


Abbildung 4.3: Renormiertes chemische Potenzial $\tilde{\mu}$ gegen chemisches Potenzial μ bei $m = 0$ und verschiedenen Werten der Kopplungskonstante G_V .

G_V kontinuierlicher verläuft. Abbildung 4.3a zeigt durch den diskontinuierlichen Sprung wieder einen Phasenübergang erster Ordnung, wohingegen Abbildung 4.3b und 4.3c einen Phasenübergang zweiter Ordnung zeigen, zu sehen an dem kontinuierlichen Verlauf. Für alle drei Fälle lässt sich zunächst ein linearer Verlauf zwischen $\tilde{\mu}$ und μ erkennen. Dies bedeutet, dass die Teilchendichte dort Null ist, da $\tilde{\mu} = \mu$ gilt. Wächst μ nun weiter an, bis $\mu > M$ gilt, nimmt die Teilchendichte einen endlichen Wert an. Mit steigendem chemischen Potenzial μ , steigt auch die Teilchendichte n weiter an. Dies führt zu dem kontinuierlichen Abfall des renormierten chemischen Potenzials $\tilde{\mu}$, welcher in Abbildung 4.3b und 4.3c zu sehen ist. Dies lässt sich mit Hilfe der Gleichung (4.9) erklären. Der Phasenübergang zweiter Ordnung findet an der Stelle statt, wo das renormierte chemische Potenzial $\tilde{\mu}$ wieder anfängt zu steigen. Dieser kontinuierliche Abfall in $\tilde{\mu}$ ist für einen Phasenübergang erster Ordnung nicht zu sehen, da dort bis zum Erreichen des Phasenübergangs $\mu < M$

gilt. Somit bleibt die Teilchendichte bis zum Erreichen des Phasenübergangs Null und kann somit nicht zu einer Verringerung von $\tilde{\mu}$ beitragen.

Nun, da die Lösungen der Gap-Gleichungen bekannt sind, kann das großkanonische Potenzial Ω_{Gk} berechnet werden. Dieses ergibt sich durch das Einsetzen der Lösungen der Gap-Gleichungen in das effektive Potenzial. Der Druck ergibt sich durch $p = -\Omega_{\text{Gk}}$ und wird für die verschiedenen Fälle in Abbildung 4.4 dargestellt. Es ist zu erkennen, dass der

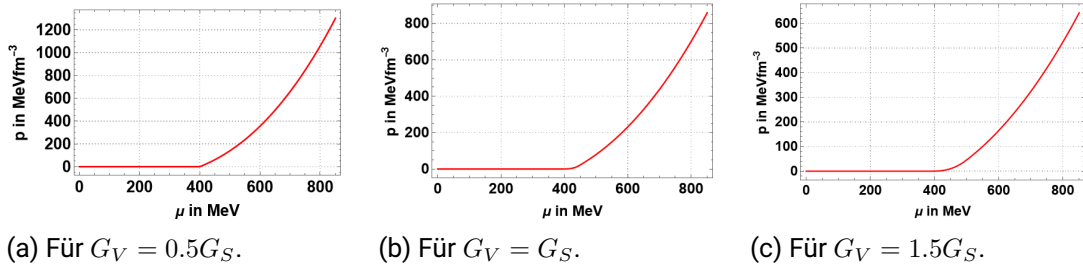


Abbildung 4.4: Druck p gegen chemisches Potenzial μ bei $m = 0$ und verschiedenen Werten der Kopplungskonstante G_V .

Druck, unabhängig von der Wahl der Kopplungskonstante G_V , stetig ist. Trotzdem lässt sich der Einfluss der Kopplungskonstante erkennen, insbesondere beim Phasenübergang. Der Phasenübergang tritt mit wachsenden G_V später ein und der Verlauf der Kurve kurz vor dem Phasenübergang ist mit wachsenden G_V kontinuierlicher.

Im nächsten Schritt wird die Teilchendichte aus Gleichung (4.17) untersucht. Die Teilchendichte n aufgetragen gegen μ ist in Abbildung 4.5 zu sehen. Abbildung 4.5a weist

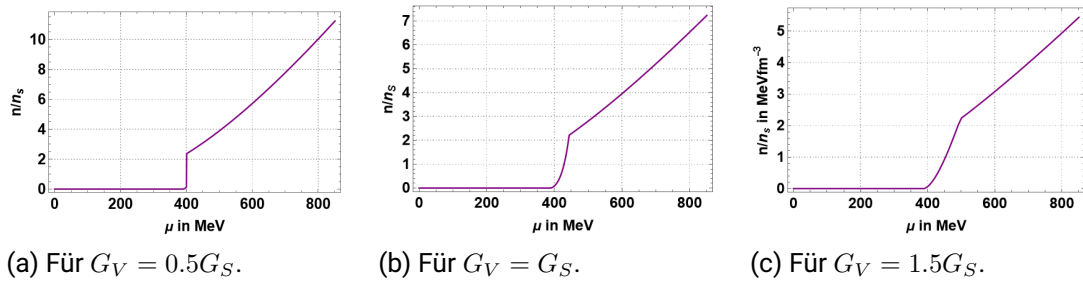


Abbildung 4.5: Teilchendichte n gegen chemisches Potenzial μ bei $m = 0$ und verschiedenen Werten der Kopplungskonstante G_V .

einen diskontinuierlichen Sprung von Null auf einen endlichen Wert beim Phasenübergang

erster Ordnung auf. Nach dem Phasenübergang steigt die Teilchendichte kontinuierlich an. In Abbildung 4.5b und 4.5c ist erneut ein Phasenübergang zweiter Ordnung zu sehen. Die Teilchendichte ist vor dem Phasenübergang wieder Null und wächst nach dem Phasenübergang kontinuierlich mit μ .

Als nächstes wird die Entropiedichte s gegen das chemische Potenzial μ aufgetragen. Die Resultate sind in Abbildung 4.6 zu sehen. Abbildung 4.6a zeigt erneut einen Phasenüber-

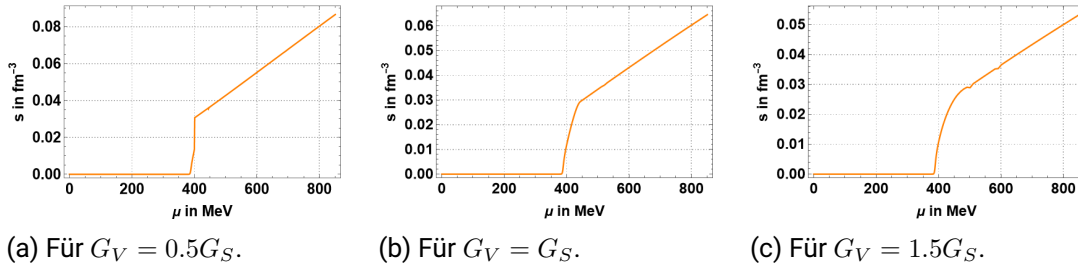


Abbildung 4.6: Entropiedichte s gegen chemisches Potenzial μ bei $m = 0$ und verschiedenen Werten der Kopplungskonstante G_V .

gang erster Ordnung, zu erkennen an dem diskontinuierlichen Sprung beim Phasenübergang. Abbildung 4.6b und 4.6c zeigen einen Phasenübergang zweiter Ordnung. In allen Abbildungen ist die Entropiedichte zunächst Null und wächst beim Phasenübergang sehr schnell an oder springt abrupt auf einen höheren Wert. Dies liegt daran, dass in der restaurierten Phase die Quarks nicht mehr im Kondensat sind und daher mehr Freiheitsgrade haben, was die Entropiedichte schlagartig erhöht. Nach dem Phasenübergang wächst die Entropiedichte kontinuierlich mit dem chemischen Potenzial μ . Abbildung 4.6c zeigt nach dem Phasensprung Unebenheiten in der Kurve. Diese sind jedoch numerischer Natur und haben keine physikalische Bedeutung.

Abbildung 4.7 zeigt den Druck p gegen die Energiedichte. Die Energiedichte wurde bereits in Gleichung (3.16) besprochen. Der Phasenübergang erster Ordnung aus Abbildung 4.7a weist an der Stelle des Phasenübergangs eine Sprungstelle auf, wohingegen der Phasenübergang zweiter Ordnung aus Abbildung 4.7b und 4.7c einen kontinuierlichen Anstieg kurz vor dem Eintreten des Phasenübergangs zeigt. Zudem ist zu beobachten, dass der Druck in Abbildung 4.7a bis zum Erreichen des Phasenübergangs Null ist, wohingegen der Druck aus den Abbildungen 4.7b und 4.7c bereits vor dem Phasenübergang, bei beliebig kleinen Dichten, endliche Werte annimmt.

Im letzten Schritt lässt sich nun das Quadrat der Schallgeschwindigkeit betrachten. Dieses ist gegeben durch die Ableitungsrelation $c_s^2 = \frac{\partial p}{\partial \epsilon}$. Somit ist die Ableitung der Kurve aus

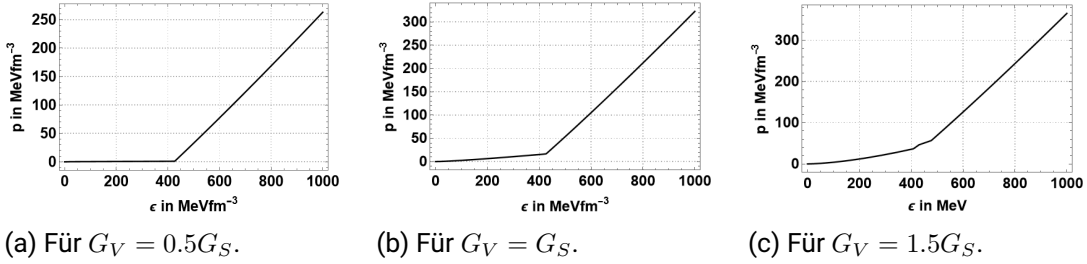


Abbildung 4.7: Druck p gegen Energiedichte ϵ bei $m = 0$ und verschiedenen Werten der Kopplungskonstante G_V .

Abbildung 4.7 gesucht. Zudem wird das Quadrat der Schallgeschwindigkeit gegen $\frac{n}{n_s}$ dargestellt, statt gegen ϵ . Hierfür wurde an den Ergebnisse aus Abbildung 4.7 eine lineare Interpolation durchgeführt. Dies erzeugt eine Funktion $p(\epsilon)$, die durch die gegebenen Datenpunkte verläuft. Durch Ableiten dieser Funktion nach ϵ ergibt sich das Quadrat der Schallgeschwindigkeit. Das Ergebnis ist in Abbildung 4.8 zu sehen. Abbildung 4.8a

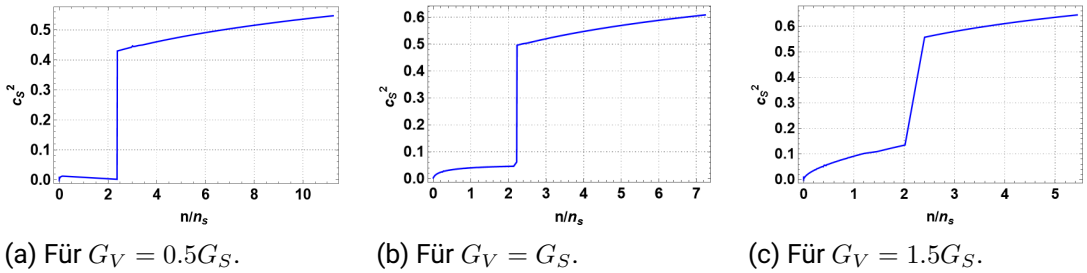


Abbildung 4.8: Quadrat der Schallgeschwindigkeit c_s^2 gegen Teilchendichte $\frac{n}{n_s}$ bei $m = 0$ und verschiedenen Werten der Kopplungskonstante G_V .

zeigt bereits vor dem Phasenübergang endliche Werte für die Schallgeschwindigkeit, obwohl die Zustandsgleichung aus 4.7a vor dem Phasenübergang Null ist. Die endliche Schallgeschwindigkeit ist ein Fragment der endlichen Temperatur $T = 1 \text{ MeV}$. Wie später zu sehen sein wird, strebt das Quadrat der Schallgeschwindigkeit unabhängig von der Kopplungskonstante G_V gegen einen konstanten Wert. Im gezeigten Intervall ist die Theorie noch kausal, da die Schallgeschwindigkeit kleiner als eins ist. Ob sich dies im asymptotischen Verhalten ändert, wird im nächsten Kapitel berechnet.

4.4 Analytische Berechnungen für $M = 0$

Die Ergebnisse des letzten Kapitels basieren auf der numerischen Berechnung der Wertepaare $(M, \tilde{\mu})$. Diese Ergebnisse lassen sich im Grenzwert $T \rightarrow 0$ und $M \rightarrow 0$ auch analytisch reproduzieren. Auch hier ist $M \rightarrow 0$ ein sinnvoller Grenzwert. Eine Übereinstimmung mit den numerischen Resultaten ist jedoch nur für hinreichend große Werte von μ zu erwarten, da der Grenzwert $M \rightarrow 0$ erst nach dem Phasenübergang gültig ist. Für die analytische Berechnung wird zunächst das effektive Potenzial im Grenzfall $T \rightarrow 0$ bestimmt. Der Grenzwert ist nur in der Funktion Ω_M von Bedeutung

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow 0} \Omega_M(T, \mu; M, \tilde{\mu}) &= -\frac{6}{\pi^2} \int_0^\Lambda p^2 E_p dp \\ &\quad - \frac{6}{\pi^2} \int_0^\infty dp p^2 \lim_{T \rightarrow 0} \left[T \log \left(1 + e^{-\frac{E_p - \tilde{\mu}}{T}} \right) + T \log \left(1 + e^{-\frac{E_p + \tilde{\mu}}{T}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Für die folgenden Überlegungen wird das renormierte chemische Potenzial $\tilde{\mu}$ als positiv angenommen. Der Anteilchenbeitrag, welcher den zweiten Summanden im zweiten Integral darstellt, verschwindet im Grenzwert $T \rightarrow 0$.

Der erste Summand im zweiten Integral verschwindet nur für den Fall $E_p > \tilde{\mu}$. Im umgekehrten Fall $E_p < \tilde{\mu}$ strebt die Exponentialfunktion gegen ∞ . Die Eins im Argument des Logarithmus kann im Vergleich zur divergierenden Exponentialfunktion vernachlässigt werden. Zudem wird die nackte Quarkmasse m zu Null gesetzt. Es ergibt sich für das effektive Potenzial

$$\begin{aligned} \Omega(\mu; M, \tilde{\mu}) &= \frac{M^2}{4G_S} - \frac{(\mu - \tilde{\mu})^2}{4G_V} \\ &\quad - \frac{6}{\pi^2} \left\{ \int_0^\Lambda p^2 E_p dp + \int_0^\infty p^2 (\tilde{\mu} - E_p) \Theta(\tilde{\mu} - E_p) dp \right\}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Die Heaviside-Funktion stellt sicher, dass die Bedingung $E_p < \tilde{\mu}$ erfüllt ist, indem sie die obere Integralgrenze auf den Wert von p beschränkt, der diese Bedingung erfüllt. Durch das Einführen des zweiten Grenzwertes $M \rightarrow 0$ und die Überführung der Heaviside-Funktion in die Integralgrenzen resultiert für das effektive Potenzial

$$\Omega(\mu; \tilde{\mu}) = -\frac{(\mu - \tilde{\mu})^2}{4G_V} - \frac{6}{\pi^2} \left\{ \int_0^\Lambda p^3 + \int_0^{\tilde{\mu}} p^2 (\tilde{\mu} - p) \right\}. \quad (4.20)$$

Die Integrale sind nun problemlos analytisch lösbar

$$\Omega(\mu; \tilde{\mu}) = -\frac{(\mu - \tilde{\mu})^2}{4G_V} - \frac{6}{\pi^2} \left(\frac{\Lambda^4}{4} + \frac{\tilde{\mu}^4}{12} \right). \quad (4.21)$$

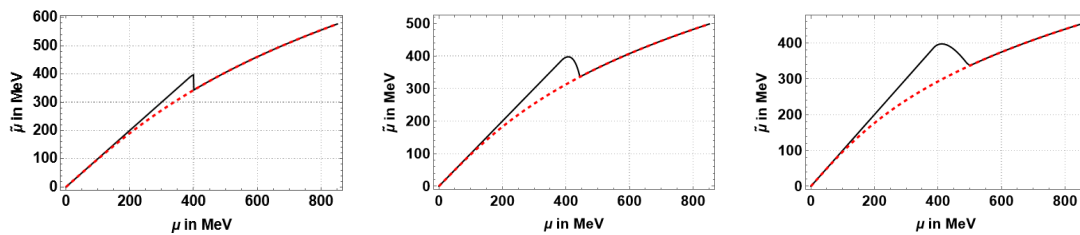
Zur Minimierung des Potentials ist nun lediglich die zweite Gap-Gleichung relevant, da M durch den Grenzwert verschwindet. Die zweite Gap-Gleichung ergibt sich durch die Ableitungsrelation aus (4.17)

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \tilde{\mu}} = -\frac{\mu - \tilde{\mu}}{2G_V} - \frac{2\tilde{\mu}^3}{\pi^2} \stackrel{!}{=} 0. \quad (4.22)$$

Diese Gleichung lässt sich nun nach $\tilde{\mu}$ auflösen und gegen μ auftragen. Der analytische Ausdruck für das renormierte chemische Potenzial $\tilde{\mu}$ lautet

$$\tilde{\mu}(\mu) = \frac{-3^{\frac{2}{3}} G_V \pi^{\frac{4}{3}} + 3^{\frac{1}{3}} \left(9G_V^2 \pi \mu + \sqrt{3} \pi \sqrt{G_V^3 (\pi^2 + 27G_V \mu^2)} \right)^{\frac{2}{3}}}{6G_V \left(9G_V^2 \mu + \sqrt{3} \sqrt{G_V^3 (\pi^2 + 27G_V \mu^2)} \right)^{\frac{1}{3}}}. \quad (4.23)$$

Abbildung 4.9 zeigt den Vergleich der numerischen Ergebnisse mit den analytischen Ergebnissen. Es ist zu erkennen, dass die numerischen Ergebnisse mit den Analytischen



(a) Für $G_V = 0.5G_S$.

(b) Für $G_V = G_S$.

(c) Für $G_V = 1.5G_S$.

Abbildung 4.9: Renormiertes Potenzial $\tilde{\mu}$ gegen chemisches Potenzial μ aus der numerischen Rechnung in schwarz und aus der analytischen Rechnung in rot für verschiedene Werte der Kopplungskonstante G_V .

nach dem Phasensprung übereinstimmen. Dies liegt daran, dass $M = 0$ für den chiralen Limes eine exakte Lösung ist. Vor dem Phasensprung haben die numerischen Ergebnisse größere Werte als die Analytischen. Die analytische Kurve ist für alle Fälle streng monoton steigend.

Im nächsten Schritt lässt sich das gefundene $\tilde{\mu}(\mu)$ in das effektive Potenzial einsetzen, um so das großkanonische Potenzial zu erhalten. Durch die Ableitungsrelation $n = -\frac{\partial\Omega}{\partial\mu}$ ergibt sich die Teilchendichte

$$n(\mu) = -\frac{1}{4G_V} \left(2\mu - \frac{\pi^{2/3} \left(9G_V^2\mu + \sqrt{3}\sqrt{G_V^3(\pi^2 + 27G_V\mu^2)} \right)^{1/3}}{3^{2/3}G_V} + \frac{\pi^{4/3}}{\left(27G_V^2\mu + 3\sqrt{3}\sqrt{G_V^3(\pi^2 + 27G_V\mu^2)} \right)^{1/3}} \right). \quad (4.24)$$

Diese kann nun in Abhängigkeit von μ dargestellt und mit den numerischen Resultaten verglichen werden. Das Ergebnis ist in Abbildung 4.10 zu sehen. Auch hier stimmen die

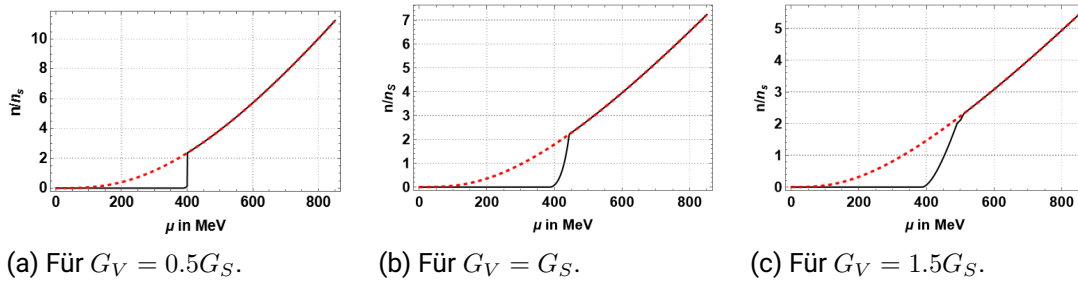


Abbildung 4.10: Teilchendichte n gegen chemisches Potenzial μ für die analytische Rechnung in Rot und für die numerische Rechnung in Schwarz für verschiedene Werte der Kopplungskonstante G_V .

numerischen Resultate nach dem Phasenübergang mit den analytischen Werten überein. Im letzten Schritt wird die Schallgeschwindigkeit untersucht. Dazu wird erneut Gleichung 3.20 verwendet. Da die Teilchendichte n bereits bekannt ist, muss diese hier nur eingesetzt

und nach μ abgeleitet werden. Für das Quadrat der Schallgeschwindigkeit ergibt sich

$$c_s^2(\mu) = \frac{9G_V^3\pi^{2/3}\mu + 3^{1/6}\sqrt{G_V^3(\pi^2 + 27G_V\mu^2)} \left(9G_V^2\mu + \sqrt{3}\sqrt{G_V^3(\pi^2 + 27G_V\mu^2)}\right)^{2/3}}{9G_V^3\pi^{2/3}\mu} - \frac{G_V^2 \left(27G_V^2\mu + 3\sqrt{3}\sqrt{G_V^3(\pi^2 + 27G_V\mu^2)}\right)^{1/3}}{9G_V^3\pi^{2/3}\mu} \cdot \frac{\left(\pi^{4/3} + 3\mu \left(27G_V^2\mu + 3\sqrt{3}\sqrt{G_V^3(\pi^2 + 27G_V\mu^2)}\right)^{1/3}\right)}{9G_V^3\pi^{2/3}\mu} \quad (4.25)$$

Der Vergleich mit den numerischen Resultaten findet sich in Abbildung 4.11. Da nun ein

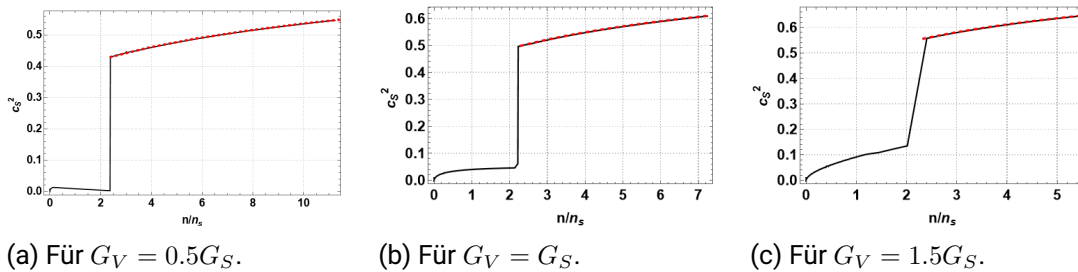
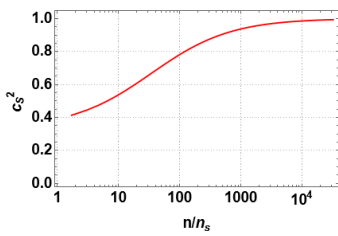
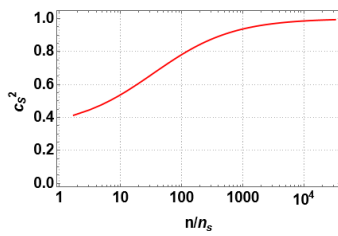


Abbildung 4.11: Quadrat der Schallgeschwindigkeit c_s^2 aus der numerischen Berechnung in Schwarz und aus der analytischen Berechnung in Rot für verschiedene Werte der Kopplungskonstante G_V .

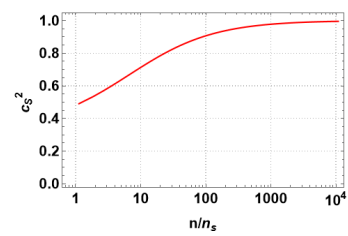
analytischer Ausdruck für das Quadrat der Schallgeschwindigkeit gegeben ist, lässt sich dieses im Grenzwert für große $\frac{n}{n_s}$ untersuchen. Dies ist in Abbildung 4.12 zu sehen. Dabei wurde die Teilchendichte $\frac{n}{n_s}$ über eine logarithmische Skala aufgetragen. Die Schallgeschwindigkeit c_s^2 strebt, unabhängig vom Wert der Kopplungskonstante, asymptotisch gegen eins. Somit ist klar, dass eine zusätzliche 4-Punkt-Vektorwechselwirkung die Kausalität der Theorie nicht verletzt. Jedoch erhöht sie die Schallgeschwindigkeit von $c_s = \frac{1}{\sqrt{3}}$ in der Theorie ohne jegliche Vektorwechselwirkung auf $c_s = 1$. Nun stellt sich die Frage wie eine Vektorwechselwirkung höherer Ordnung die Schallgeschwindigkeit beeinflusst.



(a) Für $G_V = 0.5G_S$.



(b) Für $G_V = G_S$.



(c) Für $G_V = 1.5G_S$.

Abbildung 4.12: Asymptotisches Verhalten des Quadrats der Schallgeschwindigkeit c_s^2 aus der analytischen Berechnung für verschiedenen Werten der Kopplungskonstante G_V .

5 Das NJL-Modell mit einer 8-Punkt-Vektorwechselwirkung

Ähnlich wie die 4-Punkt Vektorwechselwirkung, stellt auch die 8-Punkt Vektorwechselwirkung eine repulsive Kraft dar, die somit von großer Bedeutung bei der Stabilität und der Existenz von Neutronensternen ist. Es stellt sich die Frage, ob die zusätzliche 8-Punkt-Vektorwechselwirkung auch zu einer kausalen Theorie führt.

5.1 Grundlagen

Ein weiterer Vektorwechselwirkungsterm wird der Lagrangedichte hinzugefügt. Die erweiterte Lagrangedichte lautet

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_D + G_S [(\bar{\psi}\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma_5\vec{\tau}\psi)^2] - G_V [(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)^2] - G_{V8} [(\bar{\psi}\gamma_\mu\psi)(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)]^2. \quad (5.1)$$

Der zusätzliche Wechselwirkungsterm stellt eine 8-Punkt-Vektorwechselwirkung dar, mit der zugehörigen Kopplungskonstante G_{V8} . Diese wird insbesondere bei hohen Dichten relevant. Die Mean-Field-Rechnung wird analog zu Kapitel 3 und 4 durchgeführt. Die relevanten Kondensate bleiben unverändert und entsprechen den Definitionen aus den Gleichungen (4.2) und (4.3). Die Mean-Field-Lagrangedichte lautet

$$\mathcal{L}_{\text{MF}} = \mathcal{L}_D + G_S [2\sigma\bar{\psi}\psi - \sigma^2] - G_V [2n\bar{\psi}\gamma_0\psi - n^2] - G_{V8} [4n^3\bar{\psi}\gamma_0\psi - n^4]. \quad (5.2)$$

Diese Lagrangedichte wird nun umgeformt, sodass sie die Definition einer Konstituentenmasse M und eines renormierte chemischen Potenzial $\tilde{\mu}$ erlaubt. Zudem wird der

Übergang in ein Medium mit chemischen Potenzial μ durchgeführt

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{MF}} + \mu\psi^\dagger\psi &= \bar{\psi}(\underbrace{-(m - 2G_S\sigma)}_{=:M} + i\cancel{\partial})\psi + \psi^\dagger(\underbrace{-2G_V n - 4G_{V8}n^3 + \mu}_{=: \tilde{\mu}})\psi \\ &\quad - G_S\sigma^2 + G_V n^2 + 3G_{V8}n^4. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Diese Definition führt zu den Gap-Gleichungen

$$M = m - 2G_S\sigma, \quad (5.4)$$

$$\tilde{\mu} = -2G_V n - 4G_{V8}n^3 + \mu. \quad (5.5)$$

Das effektive Potenzial ergibt sich in Analogie zu Kapitel 3 und 4 zu

$$\Omega(T, \mu; M, \tilde{\mu}) = \frac{(M - m)^2}{4G_S} - G_V n^2 - 3G_{V8}n^4 + \Omega_M, \quad (5.6)$$

wobei Ω_M in Gleichung (3.8) gegeben ist. Diese Definition bleibt unverändert, da die Form der Lagrangedichte erhalten bleibt und sich lediglich die Definition des $\tilde{\mu}$ ändert. Die zweite Gap-Gleichung (5.5) ist nicht mehr explizit nach dem Kondensat n auflösbar, was die Minimierung des Potenzials erschwert. Analog zu Kapitel 4 ist zur Minimierung des Potenzials ein Ausdruck für die Ableitung $\frac{\partial\Omega}{\partial\tilde{\mu}}$ nötig. Diese Ableitung ist kompliziert, da die μ -Abhängigkeit der Teilchendichte n beachtet werden muss. Durch die Kettenregel ergibt sich

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\tilde{\mu}} = \frac{\delta\Omega}{\delta\tilde{\mu}} + \frac{\delta\Omega}{\delta n} \frac{\partial n}{\partial\tilde{\mu}}. \quad (5.7)$$

Im folgenden wird die 4-Punkt-Vektorwechselwirkung durch $G_V = 0$ ausgeschaltet und lediglich der Einfluss der 8-Punkt-Vektorwechselwirkung untersucht. Das effektive Potenzial lautet nun

$$\Omega(T, \mu; M, \tilde{\mu}) = \frac{(M - m)^2}{4G_S} - 3G_{V8}n^4 + \Omega_M. \quad (5.8)$$

Für die Funktion Ω_M gilt weiterhin der Ausdruck aus (3.8). Die Gap-Gleichungen lauten nun

$$M = m - 2G_S\sigma \Rightarrow \sigma = -\frac{M - m}{2G_S}, \quad (5.9)$$

$$\tilde{\mu} = -4G_{V8}n^3 + \mu \Rightarrow n = \left(\frac{\mu - \tilde{\mu}}{4G_{V8}}\right)^{\frac{1}{3}}. \quad (5.10)$$

Durch das Fehlen der 4-Punkt-Wechselwirkung lassen sich nun beide Gap-Gleichungen nach den Kondensaten auflösen. Einsetzen in das effektive Potenzial liefert

$$\Omega(T, \mu; M, \tilde{\mu}) = \frac{(M - m)^2}{4G_S} - 3G_{V8} \left(\frac{\mu - \tilde{\mu}}{4G_{V8}} \right)^{\frac{4}{3}} + \Omega_M. \quad (5.11)$$

Die thermodynamische Konsistenz wird erneut durch die Ableitungen $\sigma = d_m \Omega$ und $n = -d_\mu \Omega$ gewährleistet, welche sich aus Gleichung (4.12) und (4.13) ergeben, wobei erneut die Bedingungen $\partial_M \Omega \stackrel{!}{=} 0$ und $\partial_{\tilde{\mu}} \Omega \stackrel{!}{=} 0$ erfüllt werden müssen. Diese Ableitungen lassen sich nun explizit angeben, wobei die erste Ableitung aus Gleichung (4.14) übernommen werden kann. Für die zweite Ableitung ergibt sich

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \tilde{\mu}} = -\frac{6}{\pi^2} \int_0^\infty dp p^2 \{n_p(T, \tilde{\mu}) - \bar{n}_p(T, \tilde{\mu})\} + \left(\frac{\mu - \tilde{\mu}}{4G_{V8}} \right)^{\frac{1}{3}} \stackrel{!}{=} 0. \quad (5.12)$$

Der Vergleich dieses Ausdrucks mit der Gap-Gleichung aus (5.10) liefert einen Integralausdruck für das Kondensat n

$$n = \frac{6}{\pi^2} \int_0^\infty dp p^2 \{n_p(T, \tilde{\mu}) - \bar{n}_p(T, \tilde{\mu})\}. \quad (5.13)$$

Dieser Ausdruck ist tatsächlich identisch mit dem Ausdruck für n aus Gleichung (4.17). Auch für das Kondensat σ ergibt sich der gleiche Ausdruck, wie in Gleichung (4.16), da sich weder die Gap-Gleichung (5.10), noch die Ableitung $\delta_M \Omega \stackrel{!}{=} 0$ ändert.

Durch das Lösen der Gap-Gleichungen und Einsetzen dieser Lösungen in das effektive Potenzial ergibt sich das großkanonische Potenzial. Aus diesem lassen sich mit Hilfe der Gleichungen (3.14) bis (3.16) der Druck p , die Entropiedichte s und die Energiedichte ϵ berechnen.

5.2 Die Minimierung des Potenzials

Der Einfluss der 8-Punkt-Vektorwechselwirkung soll im chiralen Limes ($m = 0$) genauer untersucht werden.

Die folgenden Ergebnisse wurden für verschiedene Werte der Kopplungskonstante G_{V8} realisiert.

Um zu verstehen in welcher Größenordnung die Kopplungskonstante G_{V8} liegt, wird eine Dimensionanalyse durchgeführt. Das effektive Potenzial hat die Dimension [Energie⁴]

in natürlichen Einheiten und ist proportional zu $G_{V8}(\psi\gamma^{\bar{\mu}}\psi)^4$, wobei jedes Quark die Dimension $[\text{Energie}^{\frac{3}{2}}]$ hat. Insgesamt ergibt das eine Dimension von $[\text{Energie}^{12}]$ für den Ausdruck $(\psi\gamma^{\bar{\mu}}\psi)^4$. Um nun die Dimension des Potentials zu erhalten, muss die Kopplungskonstante eine Dimension von $[\text{Energie}^{-8}]$ haben. Um die Kopplungskonstante G_{V8} wieder in Einheiten der skalaren Kopplungskonstante G_S anzugeben, muss G_{V8} proportional zu G_S^4 sein, da G_S eine Dimension von $[\text{Energie}^{-2}]$ hat. Für die skalare Kopplungskonstante G_S und den Cut-Off Parameter Λ gelten die bekannten Werte.

Abbildung 5.1 zeigt die Konstituentenmasse M gegen das chemische Potenzial μ . Für alle

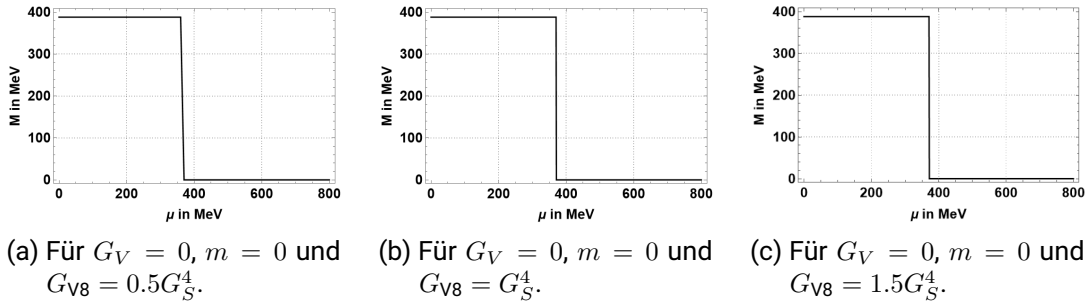
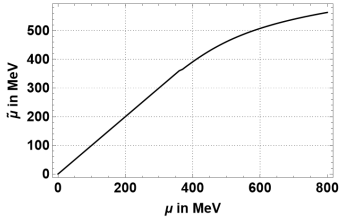


Abbildung 5.1: Konstituentenmasse M gegen chemisches Potenzial μ bei $G_V = 0$ und verschiedenen Werten der Kopplungskonstante G_{V8} .

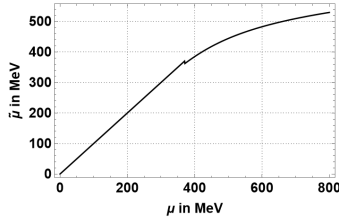
drei Fälle ist ein abrupter Abfall der Konstituentenmasse M zu erkennen. Aufgrund dessen handelt es sich hierbei um einen Phasenübergang erster Ordnung. In allen drei Fällen gibt es einen Phasenübergang von der chirale gebrochene Phase bei kleinen Werten von μ in die restaurierte Phase bei großen Werten von μ .

Nun lässt sich die Lösung der Gap-Gleichung für $\tilde{\mu}$ gegen μ auftragen. Abbildung 5.2 zeigt das renormierte chemische Potenzial $\tilde{\mu}$ gegen das chemische Potenzial μ . Für alle drei Abbildungen ist der zunächst typische lineare Verlauf für kleine Werte von μ zu erkennen. Beim Phasenübergang fällt das renormierte chemische Potenzial abrupt ab und steigt nach dem Phasenübergang stetig an. Wie in Kapitel 4 ist diese Reduktion durch die Teilchendichte n zu erklären. Der Einfluss der Teilchendichte n wird bei wachsendem chemischen Potenzial größer und ist vor dem Phasenübergang Null.

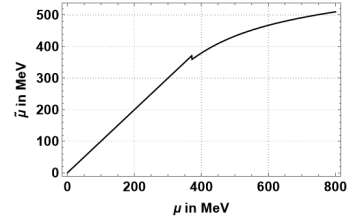
Durch Einsetzen der Lösungen der Gap-Gleichung in das effektive Potenzial ergibt sich das großkanonische Potenzial. Zudem lässt sich aus dem großkanonischen Potenzial durch (3.14) direkt der Druck berechnen. Abbildung 5.3 zeigt das großkanonische Potenzial Ω_{Gk} gegen μ und Abbildung 5.4 zeigt den Druck p gegen μ . Die Abbildungen aus 5.3 weisen für alle drei Fälle einen sehr ähnlichen Verlauf auf. Das großkanonische Potenzial



(a) Für $G_V = 0$, $m = 0$ und $G_{V8} = 0.5G_S^4$.

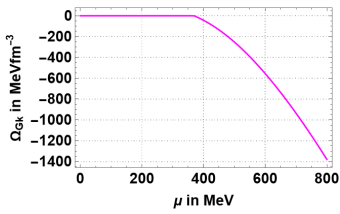


(b) Für $G_V = 0$, $m = 0$ und $G_{V8} = G_S^4$.

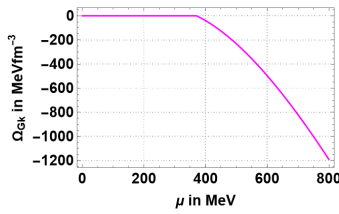


(c) Für $G_V = 0$, $m = 0$ und $G_{V8} = 1.5G_S^4$.

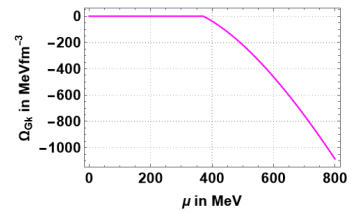
Abbildung 5.2: Renormiertes Potenzial $\tilde{\mu}$ gegen chemisches Potenzial μ bei $G_V = 0$ und verschiedenen Werten der Kopplungskonstante G_{V8} .



(a) Für $G_V = 0$, $m = 0$ und $G_{V8} = 0.5G_S^4$.

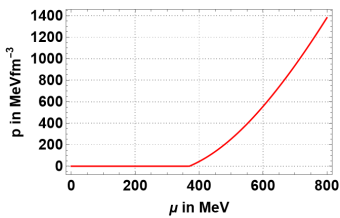


(b) Für $G_V = 0$, $m = 0$ und $G_{V8} = G_S^4$.

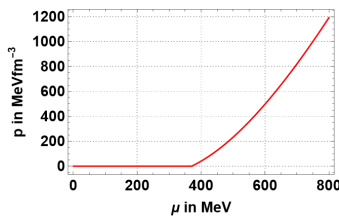


(c) Für $G_V = 0$, $m = 0$ und $G_{V8} = 1.5G_S^4$.

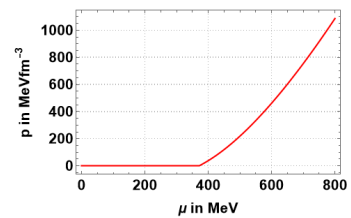
Abbildung 5.3: Großkanonisches Potenzial Ω_{eff} gegen chemisches Potenzial μ bei $G_V = 0$ und verschiedenen Werten der Kopplungskonstante G_{V8} .



(a) Für $G_V = 0$, $m = 0$ und $G_{V8} = 0.5G_S^4$.



(b) Für $G_V = 0$, $m = 0$ und $G_{V8} = G_S^4$.



(c) Für $G_V = 0$, $m = 0$ und $G_{V8} = 1.5G_S^4$.

Abbildung 5.4: Druck p gegen chemisches Potenzial μ bei $G_V = 0$ und verschiedenen Werten der Kopplungskonstante G_{V8} .

ist in der chiral gebrochenen Phase null. Nach dem Phasenübergang fängt es an zu fallen. Abbildung 5.4 zeigt das gleiche Ergebnis, nur dass der Druck nach dem Phasenübergang steigt. Der Unterschied in den drei Fällen liegt jeweils in der Steigung der Kurven. Für den $G_{V8} = 0.5G_S^4$ Fall fällt das Potenzial am schnellsten ab beziehungsweise steigt der Druck am schnellsten an. Mit wachsender Kopplungskonstante G_{V8} steigt somit der Druck immer langsamer an.

In Gleichung (5.13) ist die Teilchendichte n gegeben. Durch Einsetzen der Lösungen der Gap-Gleichung in diese Formel, kann die Teilchendichte grafisch gegen μ aufgetragen werden. Dies ist zu sehen in Abbildung 5.5. Die Teilchendichte n ist vor dem Phasenübergang

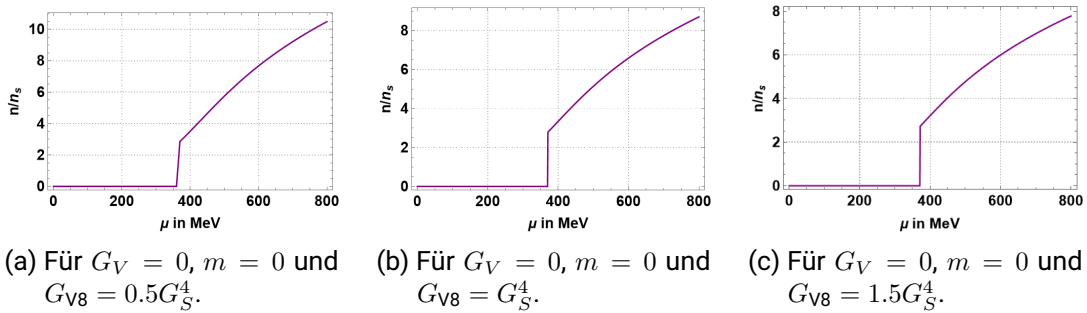


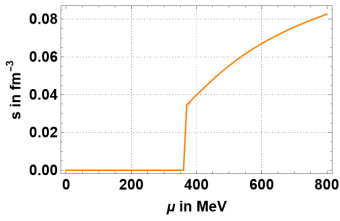
Abbildung 5.5: Teilchendichte $\frac{n}{n_s}$ gegen chemisches Potenzial μ bei $G_V = 0$ und verschiedenen Werten der Kopplungskonstante G_{V8} .

gang null und nimmt beim Phasenübergang einen endlichen Wert an. Mit wachsendem chemischen Potenzial μ steigt auch die Teilchendichte weiter.

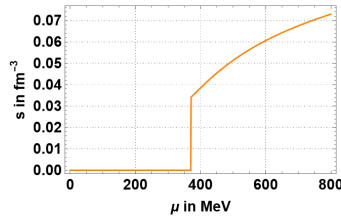
Abbildung 5.6 zeigt die Entropiedichte, welche durch Gleichung (3.15) berechnet wird. Auch die Entropiedichte ist vor dem Phasenübergang null. Beim Phasenübergang nimmt die Entropiedichte durch die endliche Teilchendichte einen endlichen Wert an, welcher bei wachsendem μ anwächst.

Die Zustandsgleichung $p(\epsilon)$ ergibt sich durch die Berechnung der Energiedichte ϵ aus(3.16). Der Druck wird in Abbildung 5.7 gegen die Energiedichte dargestellt. Der Druck weist einen sehr ähnlichen Verlauf zu Abbildung 5.4 auf. Die Kurven wurden auch hier durch Interpolation erstellt.

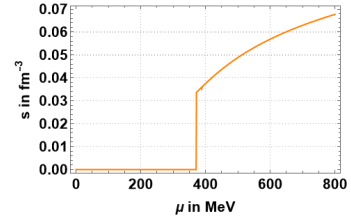
Im letzten Schritt lässt sich das Quadrat der Schallgeschwindigkeit berechnen. Dieses ist gegeben durch die Ableitung des Drucks p nach der Energiedichte ϵ . Durch die Interpolation lässt sich die interpolierte $p(\epsilon)$ Funktion nach ϵ ableiten. Die Ergebnisse sind in Abbildung 5.8 zu sehen. Das Quadrat der Schallgeschwindigkeit ist vor dem Phasenübergang null und



(a) Für $G_V = 0$, $m = 0$ und $G_{V8} = 0.5G_S^4$.

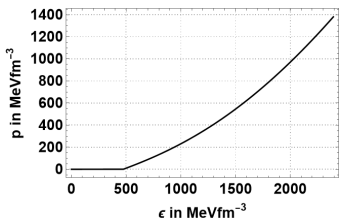


(b) Für $G_V = 0$, $m = 0$ und $G_{V8} = G_S^4$.

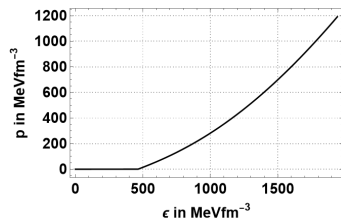


(c) Für $G_V = 0$, $m = 0$ und $G_{V8} = 1.5G_S^4$.

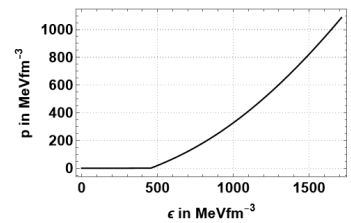
Abbildung 5.6: Entropiedichte s gegen chemisches Potenzial μ bei $G_V = 0$ und verschiedenen Werten der Kopplungskonstante G_{V8} .



(a) Für $G_V = 0$, $m = 0$ und $G_{V8} = 0.5G_S^4$.

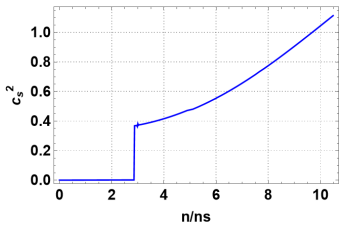


(b) Für $G_V = 0$, $m = 0$ und $G_{V8} = G_S^4$.

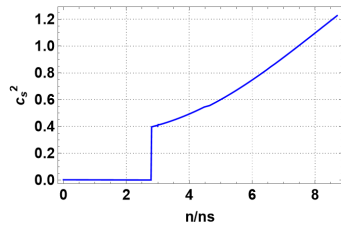


(c) Für $G_V = 0$, $m = 0$ und $G_{V8} = 1.5G_S^4$.

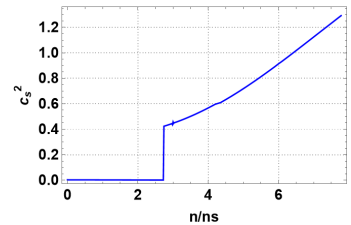
Abbildung 5.7: Druck p gegen Energiedichte ϵ bei $G_V = 0$ und verschiedenen Werten der Kopplungskonstante G_{V8} .



(a) Für $G_V = 0$, $m = 0$ und $G_{V8} = 0.5G_S^4$.



(b) Für $G_V = 0$, $m = 0$ und $G_{V8} = G_S^4$.



(c) Für $G_V = 0$, $m = 0$ und $G_{V8} = 1.5G_S^4$.

Abbildung 5.8: Quadrat der Schallgeschwindigkeit gegen Teilchendichte $\frac{n}{n_s}$ bei $G_V = 0$ und verschiedenen Werten der Kopplungskonstante G_{V8} .

nimmt bei einem diskontinuierlichen Sprung am Phasenübergang einen endlichen Wert an. Von dort an steigt das Quadrat der Schallgeschwindigkeit kontinuierlich an. In den Abbildungen nimmt die Schallgeschwindigkeit für jeden Wert der Kopplungskonstante G_{V8} bereits einen Wert höher Eins an. Somit kann festgehalten werden, dass die 8-Punkt Vektorwechselwirkung die Kausalität verletzt.

5.3 Analytische Berechnungen bei $M = 0$

Der Grenzwert $T \rightarrow 0$ und $M \rightarrow 0$ mit $m = 0$ wird betrachtet. An Gleichung (5.6) ist zu erkennen, dass lediglich die Funktion Ω_M von der Temperatur T abhängt. Die Wahl $G_V = 0$ wird hier beibehalten, wodurch der zweite Summand verschwindet. Zudem ist das Kondensat n unabhängig von M und m . Somit bleibt der dritte Summand unverändert. Der erste Summand verschwindet aufgrund der verschwindenden Massen. Da sich die Funktion Ω_M aus Kapitel 4 lediglich in der Definition von dem $\tilde{\mu}$ unterscheidet, lassen sich die Ergebnisse aus Kapitel 4 hier übernehmen. Das effektive Potenzial lautet somit im Grenzwert

$$\Omega(\mu; \tilde{\mu}) = -3G_{V8}n^4 - \frac{6}{\pi^2} \left(\frac{\Lambda^4}{4} + \frac{\tilde{\mu}^4}{12} \right), \quad (5.14)$$

wobei die Teilchendichte n durch Gleichung (5.10) gegeben ist.

Zur Minimierung des Potenzials wird die Bedingung $\delta_{\tilde{\mu}}\Omega \stackrel{!}{=} 0$ berechnet

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \tilde{\mu}} = \left(\frac{\mu - \tilde{\mu}}{4G_{V8}} \right)^{\frac{1}{3}} - \frac{2\tilde{\mu}^3}{\pi^2} \stackrel{!}{=} 0. \quad (5.15)$$

Hierbei wurde bereits der explizite Ausdruck für die Teilchendichte n aus (5.10) eingesetzt. Diese Gleichung lässt sich nun nach μ auflösen und ergibt somit einen analytischen Ausdruck für $\mu(\tilde{\mu})$

$$\mu = \frac{32G_{V8}}{\pi^6} \tilde{\mu}^9 + \tilde{\mu}. \quad (5.16)$$

Um diese Gleichung nun nach dem gesuchten renormierten Potenzial $\tilde{\mu}$ aufzulösen, werden die Lambertschen W-Funktionen $W(x)$ gebraucht. Dadurch lässt sich ein analytischer Ausdruck für $\tilde{\mu}$ aufschreiben, dieser wird hier jedoch nicht angegeben.

Nun ist es möglich das $\tilde{\mu}$ grafisch gegen μ darzustellen. Die Ergebnisse sind in Abbildung 5.9 zu sehen. Nach dem Phasenübergang stimmen die numerischen Ergebnisse mit den analytischen Ergebnissen überein. Die analytische Kurve ist streng monoton steigend.

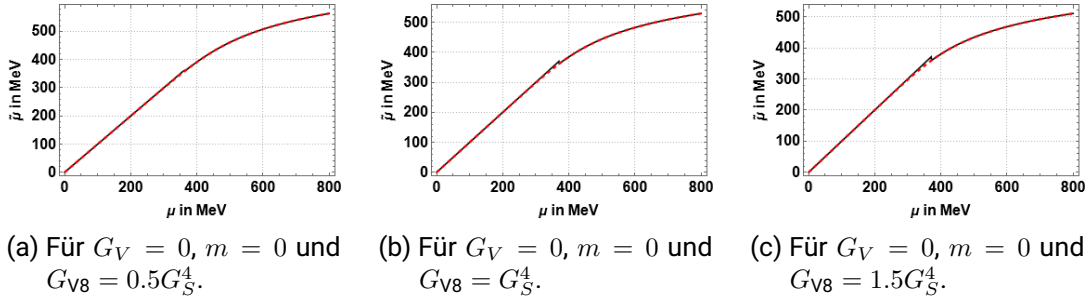


Abbildung 5.9: Renormiertes Potenzial $\tilde{\mu}$ gegen chemisches Potenzial μ aus der numerischen Berechnung in Schwarz und aus der analytischen Berechnung in Rot bei $G_V = 0, m = 0$ und verschiedenen Werten der Kopplungskonstante G_{V8} .

Da nun der analytische Ausdruck für das großkanonische Potenzial bekannt ist, lässt sich durch die Ableitung (4.13) die Teilchendichte berechnen. Abbildung 5.10 zeigt den Vergleich der numerischen Ergebnisse mit den analytischen Ergebnissen. Der Vergleich

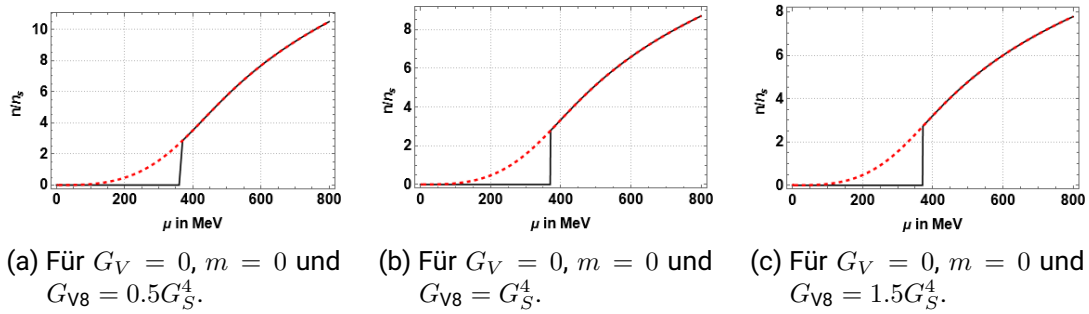
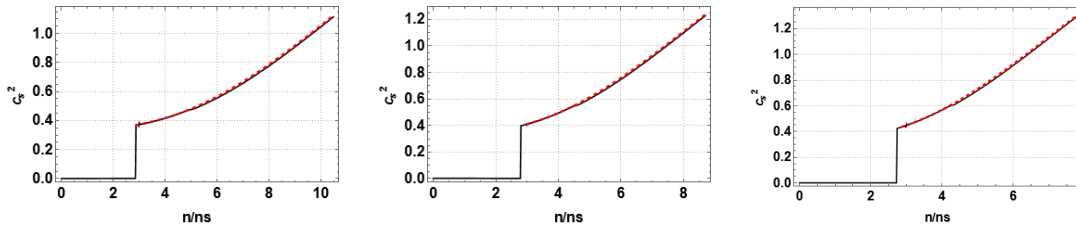


Abbildung 5.10: Teilchendichte $\frac{n}{n_s}$ gegen chemisches Potenzial μ aus der numerischen Berechnung in Schwarz und aus der analytischen Berechnung in Rot bei $G_V = 0, m = 0$ und verschiedenen Werten der Kopplungskonstante G_{V8} .

zeigt, dass die numerischen Ergebnisse mit den Analytischen nach dem Phasenübergang übereinstimmen.

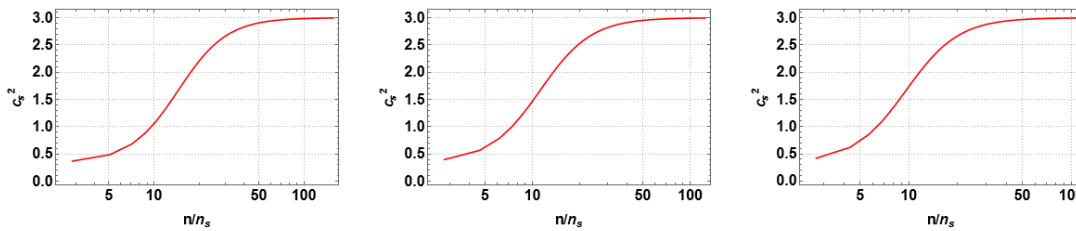
Zuletzt wird mit Hilfe der Formel (3.20) das Quadrat der Schallgeschwindigkeit c_s^2 analytisch aus der Teilchendichte n berechnet. Die Ergebnisse werden mit den numerischen Ergebnissen verglichen und sind in Abbildung 5.11 zu sehen. Der analytische Ausdruck wird im folgenden für sehr große Werte des chemischen Potenzials μ und somit sehr



(a) Für $G_V = 0, m = 0$ und $G_{V8} = 0.5G_S^4$. (b) Für $G_V = 0, m = 0$ und $G_{V8} = G_S^4$. (c) Für $G_V = 0, m = 0$ und $G_{V8} = 1.5G_S^4$.

Abbildung 5.11: Quadrat der Schallgeschwindigkeit c_s^2 gegen Energiedichte ϵ aus der numerischen Berechnung in Schwarz und aus der analytischen Berechnung in Rot bei $G_V = 0, m = 0$ und verschiedenen Werten der Kopplungskonstante G_{V8} .

große Teilchendichten $\frac{n}{n_s}$ betrachtet, um so das asymptotische Verhalten des Quadrates der Schallgeschwindigkeit zu betrachten. Aus dem Grund wird die x-Achse logarithmisch skaliert. Die Resultate sind in Abbildung 5.12 zu sehen. Es wird deutlich, dass die Schallge-



(a) Für $G_V = 0, m = 0$ und $G_{V8} = 0.5G_S^4$. (b) Für $G_V = 0, m = 0$ und $G_{V8} = G_S^4$. (c) Für $G_V = 0, m = 0$ und $G_{V8} = 1.5G_S^4$.

Abbildung 5.12: Quadrat der Schallgeschwindigkeit c_s^2 gegen die Teilchendichte $\frac{n}{n_s}$ aus der analytischen Berechnung für sehr hohe Werte des chemischen Potenzial μ bei $G_V = 0, m = 0$ und verschiedenen Werten der Kopplungskonstante G_{V8} .

schwindigkeit unabhängig vom Wert der Kopplungskonstante gegen eine feste Konstante strebt. Für die 8-Punkt-Vektorwechselwirkung ist diese Konstante drei. Somit ist klar, dass eine repulsive 8-Punkt Vektorwechselwirkung die Kausalität der Theorie verletzt.

6 Das NJL-Modell mit einer 4N-Punkt-Vektorwechselwirkung

Es wurde nachgewiesen, dass eine 4-Punkt Vektorwechselwirkung die Kausalität der Theorie bewahrt, wohingegen dies bei der 8-Punkt Vektorwechselwirkung nicht mehr zutrifft. Nun stellt sich die Frage, ob durch die Erhöhung der Ordnung der Vektorwechselwirkung die Kausalität wieder gewährleistet werden kann. Um dies zu beantworten, wird eine allgemeine $4N$ -Punkt-Vektorwechselwirkung betrachtet, die zusätzlich zur skalaren und pseudoskalaren Wechselwirkung in die Lagrangedichte eingeführt wird. Die allgemeine Lagrangedichte hat die folgende Form

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_D + G_S [(\bar{\psi}\psi)^2 + (\bar{\psi}i\gamma^5\bar{\tau}\psi)^2] - G_{V4N} [(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)^{\frac{4N}{2}}], \quad n \in \mathbb{N}. \quad (6.1)$$

Da eine skalare- und eine Vektorwechselwirkung betrachtet wird, sind die bekannten Kondensate aus den Gleichungen (4.3) und (4.2) ausreichend. Die Rechenschritte für die skalare und pseudoskalare Wechselwirkung sind identisch zu Kapitel 4 und werden hier nicht wiederholt.

Die Lagrangedichte lautet somit

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i\cancel{D} - m) \psi + G_S [2\sigma\bar{\psi}\psi - \sigma^2] - G_{V4N} [n + (\bar{\psi}\gamma^0\psi - n)]^{2N}. \quad (6.2)$$

Dabei ist die Lagrangedichte für das Kondensat σ bereits in der Mean-Field Näherung angegeben. Zur genaueren Berechnung der allgemeinen $4N$ -Punkt Vektorwechselwirkung wird der Term $[n + (\bar{\psi}\gamma^0\psi - n)]^{2N}$ mit Hilfe der Binomialformel berechnet, sodass der Ausdruck $\bar{\psi}\gamma^0\psi$ lediglich in linearer Form auftritt. Die Anwendung der Binomialformel

auf diesen Ausdruck führt zu

$$\begin{aligned}
[n + (\bar{\psi}\gamma^0\psi - n)]^{2N} &= \sum_{k=0}^{2N} \binom{2N}{k} n^{2N-k} (\bar{\psi}\gamma^0\psi - n)^k \\
&= \sum_{k=0}^{2N} \frac{(2N)!}{k!(2N-k)!} n^{2N-k} (\bar{\psi}\gamma^0\psi - n)^k \\
&= n^{2N} + \frac{(2N)!}{(2N-1)!} n^{2N-1} (\bar{\psi}\gamma^0\psi - n) \\
&\quad + \sum_{k=2}^{2N} \frac{(2N)!}{k!(2N-k)!} n^{2N-k} (\bar{\psi}\gamma^0\psi - n)^k. \tag{6.3}
\end{aligned}$$

Es werden lediglich die ersten zwei Summanden der Summe betrachtet, während alle höheren Ordnungen vernachlässigt werden. Zudem wird die Fakultät $(2N)!$ umgeschrieben zu $2N(2N-1)!$

$$\begin{aligned}
[n + (\bar{\psi}\gamma^0\psi - n)]^{2N} &\approx n^{2N} + \frac{(2N)!}{(2N-1)!} n^{2N-1} (\bar{\psi}\gamma^0\psi - n) \\
&= n^{2N} + 2Nn^{2N-1} (\bar{\psi}\gamma^0\psi - n) \\
&= 2Nn^{2N-1}\bar{\psi}\gamma^0\psi - (2N-1)n^{2N} \tag{6.4}
\end{aligned}$$

In diesem Ausdruck tritt $\bar{\psi}\gamma^0\psi$ lediglich in linearer Form auf. Aus der 4-Punkt- und 8-Punkt-Vektorwechselwirkung sind folgende Ausdrücke bekannt

$$[n + (\bar{\psi}\gamma^0\psi - n)]^2 = 2n\bar{\psi}\gamma^0\psi - n^2, \tag{6.5}$$

$$[n + (\bar{\psi}\gamma^0\psi - n)]^4 = 4n^3\bar{\psi}\gamma^0\psi - 3n^4. \tag{6.6}$$

Diese werden durch die allgemeine Formel aus Gleichung (6.4) reproduziert, indem für die 4-Punkt Wechselwirkung $N = 1$ und für die 8-Punkt Wechselwirkung $N = 2$ gesetzt wird.

Dieser allgemeine Ausdruck lässt sich nun in die Lagrangedichte einsetzen und wieder so umformen, dass die Definition einer Konstituentenmasse M und eines renormierten

chemischen Potentials $\tilde{\mu}$ möglich ist. Das ergibt die Mean-Field Lagrangedichte

$$\mathcal{L}_{\text{MF}} = \bar{\psi}(i\cancel{D} - \underbrace{(m - 2G_S\sigma)}_{=:M})\psi + \psi^\dagger \underbrace{(\mu - 2G_{V4N}Nn^{2N-1})}_{=: \tilde{\mu}}\psi - G_S\sigma^2 + (2N-1)G_{V4N}n^{2N}. \quad (6.7)$$

Die verallgemeinerten Gap-Gleichungen lauten

$$M = m - 2G_S\sigma \Rightarrow \sigma = -\frac{M - m}{2G_S}, \quad (6.8)$$

$$\tilde{\mu} = \mu - 2NG_{V4N}n^{2N-1} \Rightarrow n = \left(\frac{1}{2N} \frac{\mu - \tilde{\mu}}{G_{V4N}} \right)^{\frac{1}{2N-1}}. \quad (6.9)$$

Beide Gap-Gleichungen lassen sich explizit nach den Kondensaten auflösen. Das effektive Potenzial kann somit wie folgt aufgeschrieben werden

$$\Omega(T, \mu; M, \tilde{\mu}) = \frac{(M - m)^2}{4G_S} - G_{V4N}(2N-1) \left(\frac{1}{2N} \frac{\mu - \tilde{\mu}}{G_{V4N}} \right)^{\frac{2N}{2N-1}} + \Omega_M(T, \mu), \quad (6.10)$$

wobei Ω_M aus Gleichung 3.8 und das renormierten chemischen Potenzial $\tilde{\mu}$ aus Gleichung (6.9) bekannt sind.

Ziel dieser Untersuchung ist es, das asymptotische Verhalten der Schallgeschwindigkeit zu analysieren. Dazu wird das Potenzial in dem bereits bekannten Grenzwert $T \rightarrow 0$ und $M \rightarrow 0$ betrachtet. Des weiteren wird die nackte Quarkmasse m ebenso zu Null gewählt.

$$\Omega(\mu; \tilde{\mu}) = -G_{V4N}(2N-1) \left(\frac{1}{2N} \frac{\mu - \tilde{\mu}}{G_{V4N}} \right)^{\frac{2N}{2N-1}} - \frac{6}{\pi^2} \left(\frac{\Lambda^4}{4} + \frac{\tilde{\mu}^4}{12} \right) \quad (6.11)$$

Für die Minimierung des Potentials ist erneut lediglich die Bedingung $\frac{\partial \Omega}{\partial \tilde{\mu}} \stackrel{!}{=} 0$ erforderlich, da die erste Gap-Gleichung durch das Verschwinden der Konstituentenmasse M trivialerweise erfüllt ist. Die partielle Ableitung des Potentials nach $\tilde{\mu}$ ergibt

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \tilde{\mu}} = \left(\frac{1}{2N} \frac{\mu - \tilde{\mu}}{G_{V4N}} \right)^{\frac{1}{2N-1}} - \frac{2\tilde{\mu}^3}{\pi^2}. \quad (6.12)$$

Diese Gleichung soll nun Null werden

$$(2NG_{V4N})^{2N-1}(\mu - \tilde{\mu})^{\frac{1}{2N-1}} = \frac{2\tilde{\mu}^3}{\pi^2}. \quad (6.13)$$

Um weitere analytische Berechnungen durchführen zu können, wird die Annahme von asymptotisch hohen $\tilde{\mu}$ und μ ausgenutzt. Für solch hohe chemische und renormierte Potentiale ist lediglich die höchste Potenz von $\tilde{\mu}$ beziehungsweise μ interessant. Auf der rechten Seite der Gleichung ist die höchste Potenz von $\tilde{\mu}$ drei. Auf der linken Seite ist die höchste Potenz $\frac{1}{2N-1}$, was für einen beliebigen Wert von $N \in \mathbb{N}$ kleiner als drei ist. Somit ist die höchste Potenz von $\tilde{\mu}$ in der gesamten Gleichung drei. Für sehr hohe Werte von $\tilde{\mu}$ können alle kleineren Potenzen von $\tilde{\mu}$ vernachlässigt werden. Dadurch ergibt sich der Ausdruck

$$(2NG_{V4N})^{2N-1} \mu^{\frac{1}{2N-1}} = \frac{2\tilde{\mu}^3}{\pi^2}. \quad (6.14)$$

Dieser Ausdruck lässt sich problemlos nach $\tilde{\mu}$ auflösen

$$\tilde{\mu} = A\mu^{\frac{1}{3} \frac{1}{2N-1}}, \quad (6.15)$$

wobei die Vorfaktoren in der Konstante A zusammengefasst wurden. Das somit gefundene $\tilde{\mu}(\mu)$ kann in das effektive Potenzial eingesetzt werden, was das großkanonische Potenzial ergibt

$$\Omega_{\text{Gk}} = -G_{V4N}(2N-1) \left(\frac{1}{2N} \frac{\mu - A\mu^{\frac{1}{3} \frac{1}{2N-1}}}{G_{V4N}} \right)^{\frac{2N}{2N-1}} - \frac{6}{\pi^2} \left(\frac{\Lambda^4}{4} + \frac{A^4 \mu^{\frac{4}{3} \frac{1}{2N-1}}}{12} \right). \quad (6.16)$$

Hier ergeben sich nun unterschiedliche Potenzen des chemischen Potentials μ . Durch Finden der größten Potenz können alle kleineren Potenzen für den Grenzfall großer μ vernachlässigt werden. In der höchsten Potenz geht μ mit dem Exponenten $\chi = \frac{2N}{2N-1}$. Somit ergibt sich für das großkanonische Potenzial

$$\Omega_{\text{Gk}} = -B\mu^{\frac{2N}{2N-1}} = -B\mu^\chi, \quad (6.17)$$

wobei durch B erneut die Vorfaktoren zusammengefasst werden. Zur Berechnung der Schallgeschwindigkeit wird Gleichung (3.20) genutzt. Dazu muss die Teilchendichte n berechnet werden

$$n = -\frac{\partial \Omega_{\text{Gk}}}{\partial \mu} = B\chi\mu^{\chi-1}. \quad (6.18)$$

Nun kann die partielle Ableitung der Teilchendichte n nach dem chemischen Potenzial μ berechnet werden

$$\frac{\partial n}{\partial \mu} = B\chi(\chi-1)\mu^{\chi-2}. \quad (6.19)$$

Einsetzen der Teilchendichte und der Ableitung in (3.20) ergibt

$$c_s^2 = \frac{B\chi\mu^{\chi-1}}{\mu} \cdot \frac{1}{B\chi(\chi-1)\mu^{\chi-2}} = \frac{1}{\chi-1} = \frac{1}{\frac{2N}{2N-1} - 1} = 2N - 1. \quad (6.20)$$

Dieses Ergebnis für das Quadrat der Schallgeschwindigkeit reproduziert die zuvor berechneten Ergebnisse. Für eine 4-Punkt-Vektorwechselwirkung strebt die Schallgeschwindigkeit für große Werte für μ gegen 1, zu sehen in Abbildung 4.12. Für eine 8-Punkt-Vektorwechselwirkung strebt die Schallgeschwindigkeit gegen 3, zu sehen in Abbildung 5.12. Des Weiteren lassen sich durch diese allgemeine Formel Vorhersagen zu weiteren Vektorwechselwirkungen machen. Die Schallgeschwindigkeit wächst linear mit der Ordnung der Vektorwechselwirkung an. Somit ist für höhere Ordnungen der Vektorwechselwirkung keine kausale Theorie zu erwarten. Lediglich die 4-Punkt Vektorwechselwirkung kann die Kausalität gewährleisten. Dies ist das zentrale Ergebnis dieser Arbeit.

7 Fazit und Ausblick

Zum Abschluss werden die zentralen Ergebnisse dieser Arbeit zusammengefasst. Das Ziel dieser Arbeit bestand darin, den Einfluss unterschiedlicher Vektorwechselwirkungen auf die Schallgeschwindigkeit zu untersuchen und einen allgemeinen Ausdruck des Quadrates der Schallgeschwindigkeit herzuleiten.

Zu Beginn wurde die NJL-Lagrangedichte mit einem skalaren und einem pseudoskalaren Wechselwirkungsterm betrachtet. Durch die Mean-Field Rechnung konnte die Lagrangedichte linearisiert werden, was zu der Gap-Gleichung 3.5 führte. Die Mean-Field Lagrangedichte erlaubte die Formulierung des effektiven Potenzials. Die Untersuchung dieses Potenzials ergab einen Phasenübergang erster Ordnung von der chiralen gebrochenen Phase in die restaurierte Phase. Zudem konnte gezeigt werden, dass eine nackte Quarkmasse von $m = 5.6 \text{ MeV}$ keinen Einfluss auf die Ordnung des Phasenübergangs, sondern lediglich auf die Symmetrie des effektiven Potenzials, nimmt. Insbesondere wurde in dem Kapitel gezeigt, dass die Schallgeschwindigkeit den erwarteten Wert $c_s = \frac{1}{\sqrt{3}}$, welcher von der QCD gefordert wird, erreicht. Dies ist zu sehen in Abbildung 3.8.

Im nächsten Abschnitt wurde der Lagrangedichte eine zusätzliche 4-Punkt Vektorwechselwirkung hinzugefügt. Nach Durchführung der Mean-Field Rechnung ergab sich auch hier das effektive Potenzial. Es wurde gezeigt, dass die Ordnung des Phasenübergangs vom Wert der Kopplungskonstante G_V abhängt. Durch steigende Werte von G_V wurde aus dem Phasenübergang erster Ordnung ein Phasenübergang zweiter Ordnung. Die numerischen Ergebnisse konnten im Abschnitt 4.4 mit den analytischen Ergebnissen verglichen werden. Von besonderer Bedeutung ist der analytische Ausdruck für das Quadrat der Schallgeschwindigkeit aus 4.25. Für sehr hohe Werte des chemischen Potenzials strebt dieser Ausdruck gegen eins, gezeigt in Abbildung 4.12. Somit gewährleistet die 4-Punkt Vektorwechselwirkung die Kausalität der Theorie.

Als eine weitere Vektorwechselwirkung wurde die 8-Punkt Vektorwechselwirkung gewählt und der Lagrangedichte hinzugefügt. Die Mean-Field Rechnung lieferte erneut das effektive Potenzial. Durch eine Dimensionsanalyse konnten passende Werte der Kopplungskonstante

G_{V8} gewählt werden. Es wurden wichtige thermodynamische Größen untersucht, bis hin zur Schallgeschwindigkeit c_s^2 . Der genaue asymptotische Wert der Schallgeschwindigkeit erschloss sich erst durch die analytischen Berechnungen im Grenzwert $T \rightarrow 0$ und $M \rightarrow 0$. Abbildung 5.12 zeigt, dass das Quadrat der Schallgeschwindigkeit gegen drei strebt, und somit die Kausalität der Theorie verletzt.

Im letzten Abschnitt wird eine allgemeine 4N-Punkt Vektorwechselwirkung betrachtet. Die Form der Lagrangedichte ist in Gleichung 6.1 zu sehen. Durch die Binomialformel ließ sich ein allgemeiner Ausdruck für die 4N-Punkt Vektorwechselwirkung in der Mean-Field Rechnung formulieren. Die Mean-Field Lagrangedichte ist in Gleichung 6.2 gegeben. Durch diese ergibt sich das effektive Potenzial analog zu Kapitel 4. Da lediglich das asymptotische Verhalten der Schallgeschwindigkeit untersucht werden soll, werden nur die höchsten Potenzen von μ und $\tilde{\mu}$ betrachtet. Der finale Ausdruck für das Quadrat der Schallgeschwindigkeit ist in Gleichung 6.20 zu sehen. Die Schallgeschwindigkeit steigt mit wachsender Ordnung der Vektorwechselwirkung linear an. Somit ist nur durch eine 4-Punkt Vektorwechselwirkung eine kausale Theorie zu erwarten.

In dieser Arbeit wurde der Einfluss verschiedener Vektorwechselwirkungen auf ein System im chiralen Limes ($m = 0$) untersucht. Zukünftige Arbeiten könnten sich mit einer endlichen nackten Quarkmasse m beschäftigen und den Einfluss dieser auf das System prüfen. Zudem wurden in den Abschnitten 3.4, 4.4 und 5.3 eine explizite analytische Untersuchung durchgeführt, wohingegen in der analytischen Berechnung aus Kapitel 6 lediglich die höchsten Potenzen miteinbezogen wurden. Somit sollten die analytischen Ausdrücke aus den zwei Methoden für asymptotisch hohe Dichten identisch sein. In künftigen Untersuchungen lassen sich die beiden analytischen Ausdrücke miteinander vergleichen.

Ein interessanter Ansatz für zukünftige Forschungen wäre die Betrachtung verschiedener Vektorwechselwirkungen in Kombination. Insbesondere stellt sich die Frage, inwiefern die Kombination unterschiedlicher Vektorwechselwirkungen das Quadrat der Schallgeschwindigkeit beeinflusst und ob dies möglicherweise zu einer kausalen Theorie führen könnte.

8 Danksagung/Acknowledgment

8.1 Danksagung

An erster Stelle möchte ich mich bei all denjenigen Bedanken, die mich beim Erstellen dieser Arbeit unterstützt haben.

Ich möchte mich herzlich bei meinem Betreuer, Priv.-Doz. Dr Michael Buballa, bedanken, für die Möglichkeit, meine Thesis unter seiner Anleitung zu schreiben. Zudem schätze ich es sehr, dass er mich so herzlich in die Gruppe aufgenommen hat und mir viel Vertrauen entgegengebracht hat.

Außerdem möchte ich mich bei Marco Hofmann bedanken für seine Geduld und die investierte Zeit. Ich schätze es sehr, dass er stets bereit war, mir alles zu erklären und ausführlich zu besprechen. Vor allem bin ich sehr dankbar für die Zeit, die er sich genommen hat, um mir wertvolles Feedback zu meiner Thesis zu geben.

Ganz besonders möchte ich Hosein Gholami danken. Seine wichtigen Ideen und Ergebnisse für die analytischen Berechnungen bei $M = 0$, welche in den Abschnitten 3.4, 4.4 und 5.3 besprochen wurde, waren entscheidend und führten letztendlich zur verallgemeinerten Formel für das Quadrat der Schallgeschwindigkeit bei einer beliebigen $4N$ -Punkt-Vektorwechselwirkung. Ich bin ihm sehr dankbar, dass er seine Erkenntnisse mit mir geteilt hat, wodurch diese Thesis erst ermöglicht wurde.

8.2 Acknowledgment

First and foremost, I would like to thank all those who have supported me in creating this work.

I would like to thank my supervisor, Priv.-Doz. Dr Michael Buballa, for the opportunity to write my thesis under his guidance. I also greatly appreciate how warmly he welcomed me into the group and the trust he placed in me.

I would also like to thank Marco Hofmann for his patience and the time he invested. I really appreciate the fact that he was always willing to explain everything to me and and discuss everything in detail. I am particularly grateful for the time he dedicated to giving me valuable feedback on my thesis.

I would especially like to thank Hosein Gholami. His important ideas and results for the analytical calculations at $M = 0$, which were discussed in sections 3.4, 4.4 and 5.3, were decisive and ultimately led to the generalized formula for the square of the speed of sound for any 4N point-vector interaction. I am very grateful to him for sharing his findings with me, which made this thesis possible.

Literatur

- ¹J. Schaffner-Bielich, *Compact Star Physics* (Cambridge University Press, 9781316848357, 2020).
- ²R. C. Tolman, „Static solutions of Einstein’s field equations for spheres of fluid“, *Phys. Rev.* **55**, 364–373 (1939).
- ³J. R. Oppenheimer und G. M. Volkoff, „On massive neutron cores“, *Phys. Rev.* **55**, 374–381 (1939).
- ⁴A. W. S. Paulo Bedaque, „Sound Velocity Bound and Neutron Star“, [10.1103/PhysRevLett.114.031103](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.114.031103) (2015).
- ⁵T. Klähn, D. Blaschke, F. Sandin, C. Fuchs, A. Faessler, H. Grigorian, G. Röpke und J. Trümper, „Modern compact star observations and the quark matter equation of state“, **654**, <https://doi.org/10.1016/j.physletb.2007.08.048> (2007).
- ⁶*Wikipedia*, Zugriff am: 4. Oktober 2024, https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/1/1c/Standard_Model_of_Elementary_Particles-de.svg.
- ⁷O. Philipsen, *Quantenfeldtheorie und das Standardmodell der Teilchenphysik, Eine Einführung*, 1. Aufl. (Springer-Verlag, 2018).
- ⁸M. Buballa, „NJL-model analysis of dense quark matter“, *Phys. Rept.* **407**, [10.1016/j.physrep.2004.11.004](https://doi.org/10.1016/j.physrep.2004.11.004) (2005).
- ⁹Zugriff am: 4. Oktober 2024, <http://quant.uni-graz.at/forschungsprojekte%7D>.
- ¹⁰P. F. Falk, „Regulatorabhängigkeit des Phasenübergangs im NJL-Modell in 3+1 Dimensionen“, Zugriff am 03. Oktober 2024, Bachelorarbeit (Technische Universität Darmstadt, 2021).
- ¹¹M. G. Alford, A. Schmitt, K. Rajagopal und T. Schäfer, „Color superconductivity in dense quark matter“, *Rev. Mod. Phys.* **80**, 1455–1515 (2008).

-
-
- ¹²Y. Nambu und G. Jona-Lasinio, „Dynamical Model of Elementary Particles Based on an Analogy with Superconductivity. I“, Phys. Rev. **122**, 345–358 (1961).
- ¹³Y. Nambu und G. Jona-Lasinio, „Dynamical Model of Elementary Particles Based on an Analogy with Superconductivity. II“, Phys. Rev. **124**, 246–254 (1961).
- ¹⁴J. I. Kapusta und C. Gale, *Finite-temperature field theory: Principles and applications*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics (Cambridge University Press, 2011).
- ¹⁵S. Frieß, „Taylor coefficients of the thermodynamic potential to sixth order in the vector interaction extended NJL model“, Zugriff am 02. Oktober 2024, Bachelorarbeit (Technische Universität Darmstadt, 2013).
- ¹⁶*KAPITEL II Struktur von Kernen. Kernmodelle*, Kernphysik, Universität Bielefeld (2021).
- ¹⁷B. Carroll, „On the Use of Jacobians in Thermodynamics“, Journal of Chemical Education **42** (1965).
- ¹⁸M. Hanauske, L. M. Satarov, I. N. Mishustin, H. Stöcker und W. Greiner, „Strange quark stars within the Nambu–Jona-Lasinio model“, 1 (2001).



9 Hilfsmittel

- Overleaf (TeX Live 2024)
- Wolfram Mathematica 13.2.1

10 Erklärung zur Abschlussarbeit

Hiermit erkläre ich, Jaspreet Tumber, dass ich die vorliegende Arbeit gemäß § 22 Abs. 7 APB TU Darmstadt selbstständig, ohne Hilfe Dritter und nur mit den angegebenen Quellen und Hilfsmitteln angefertigt habe. Ich habe mit Ausnahme der zitierten Literatur und anderer in der Arbeit genannter Quellen keine fremden Hilfsmittel benutzt. Die von mir bei der Anfertigung dieser wissenschaftlichen Arbeit wörtlich oder inhaltlich benutzte Literatur und alle anderen Quellen habe ich im Text deutlich gekennzeichnet und gesondert aufgeführt. Dies gilt auch für Quellen oder Hilfsmittel aus dem Internet.

Diese Arbeit hat in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner Prüfungsbehörde vorgelegen.

Mir ist bekannt, dass im Falle eines Plagiats (§38 Abs.2 APB) ein Täuschungsversuch vorliegt, der dazu führt, dass die Arbeit mit 5,0 bewertet und damit ein Prüfungsversuch verbraucht wird. Abschlussarbeiten dürfen nur einmal wiederholt werden.

Darmstadt, den 13. Oktober 2024

Jaspreet Tumber