
TOV-Gleichung und Neutronensterne

Oliver Bünting
Betreuer: Dr. Kai Hebeler
23.06.2016



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	2
2	Eigenschaften von Neutronensternen	3
3	Vorhersagung und Entdeckung	4
4	Theoretische Beschreibung und Modelle	5
4.1	Equation of State (EOS)	6
4.2	Tolman-Oppenheimer-Volkoff Gleichung (TOV-Gleichung)	7
4.3	Forschung	8
5	Quellenverzeichnis	9

1 Einleitung

Alle Sterne unseres Universums unterliegen einer gewissen Evolution. Im Laufe mehrere Millionen Jahre entstehen, brennen und kollabieren sie.

Damit ein Stern entsteht, wird zunächst eine Molekülwolke im Weltall benötigt. Diese ist eine Anhäufung von kühler Materie auf einem, für das Universum dichten Gebiet. Molekülwolken der Milchstraße haben eine mittlere Dichte von ungefähr $100H_2 \frac{\text{Moleküle}}{\text{cm}^3}$. Sie können einen Durchmesser von bis zu 150 Lichtjahren und Massen von 10^6 Sonnenmassen erreichen.

Dies ist erstaunlich, da der Hauptbestandteil dieser Wolken aus normalem Wasserstoff [1] und anderen leichten Elementen besteht. Die Eigenschaft der hohen Dichten führte schließlich auch zur Entdeckung der Molekülwolken.

Wird ein Sternbild mit optischen Instrumenten untersucht, können wie in Abbildung 1 gezeigt, dunkle Gebiete beobachtet werden, welche sich als lichtundurchlässige Molekülwolken herausstellen.

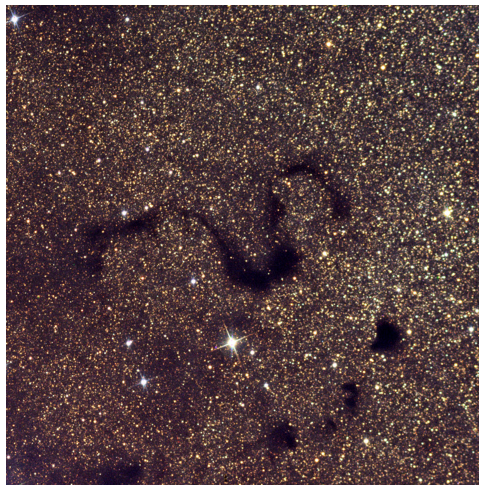


Abbildung 1: Aufnahme des Snake Nebulars, Quelle: upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/4/4b/Snake-Nebula.jpg - Stand 13.05.2016

Ein neuer Stern entsteht nun durch den Kollaps eines Molekülwolkenkerns. Hierbei wird durch eine Kraft der besonders dichte Kern der Molekülwolke immer weiter komprimiert. Hierbei gibt es verschiedene Kräfte, welche ausschlaggebend für diese Komprimierung sein können. Die offensichtlichste ist die Gravitation, doch auch Magnetfelder oder spezielle Turbulenzen können die Moleküle entgegen ihrer thermischen Bewegung zusammendrücken.

Anschließend findet ein zweiter Kollaps statt, bei dem die Wasserstoffmoleküle (H_2) sich in ihre Einzelatome spalten. Dies und die anschließenden Prozesse zur finalen Sternbildung sollen an dieser Stelle allerdings nicht näher erläutert werden. Weitergehende Informationen darüber können in Frühphasen der Sternentstehung [2] gefunden werden.

Der weitere evolutionäre Verlauf eines Sterns hängt stark von seiner Masse ab. Insbesondere das Endstadium, welches sich wie in Tabelle 1 gezeigt, in drei unterschiedliche Endzustände aufteilt, ist von diesem Effekt dominiert.

Hierbei wird das Endstadium des weißen Zwergs bei relativ geringe Sonnenmassen erreicht. Eine theoretisch bestimmbare Massengrenze zwischen den Stadien des weißen Zwergs und Neutronensternen liegt bei $1,44$ Sonnenmassen (M_{\odot}). Da weiße Zwerge in der modellaren Umschreibung als ideales entartetes Elektronengas betrachtet werden, basiert die theoretische Herleitung der sogenannten Chandrasekhar-Grenze auf der statistischen Quantenmechanik und der Fermi-Dirac-Statistik.

Liegt die Masse des Sternendstadiums über $\approx 2,5M_{\odot}$ entsteht ein schwarzes Loch. Der dominierende

Masse des Sterns in M_{\odot}	Endstadium	Masse des Endstadiums in M_{\odot}
1-8	weißer Zwerg	$\leq 1,4$
8-30	Neutronenstern	(1,4 – 2,5)
30+	schwarzes Loch	$\geq 2,5$

Tabelle 1: Unterschiedliche Endstadien eines Sterns

Effekt hierbei ist der Gravitationskollaps. Unter normalen Umständen gibt es der Gravitationskraft entgegenwirkende Kräfte, die den Gravitationskollaps verhindern. Steigt die Gravitationskraft jedoch schneller an als der Fermi-Druck und die Abstoßung zwischen Atomen und Nukleonen entsteht ein schwarzes Loch.

Liegt die Masse des ursprünglichen Sternes zwischen 8 und 30 M_{\odot} entsteht ein Neutronenstern mit einer Masse im Bereich von 1,4 bis 2,5 M_{\odot} .

Welche Eigenschaften hat nun ein solcher Neutronenstern?

2 Eigenschaften von Neutronensternen

Ein großer Teil der Eigenschaften eines Neutronensternes hängt von der Equation of State (EoS) ab. Diese wird in der Sektion Theoretische Beschreibung und Modelle genauer erläutert. Sie beschreibt prinzipiell einen Zusammenhang zwischen Druck und Energiedichte. Mithilfe der EoS lässt sich eine Lösung für die Tolman Oppenheimer Volkoff Gleichung finden. Ihre Lösung beschreibt alle möglichen Kombinationen bei gegebenem Druck in einem Masse-Radius Diagramm.

Abbildung 2 zeigt beispielhaft einen schematischen Aufbau eines Neutronensterns. Hierbei fällt auf, dass die Dichte des Sterns nach außen hin stark abfällt. Die Einheit $\rho_0 = 2,8 \cdot 10^{14} \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ wird als 'normal nuclear density' bezeichnet. Sie beschreibt die Massendichte von Nukleonen in Atomkernen hoher Massenzahlen.

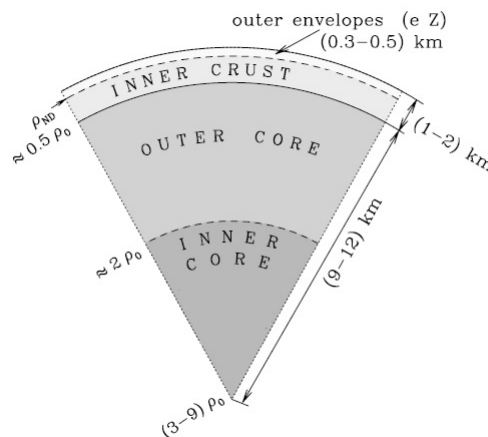


Abbildung 2: Modellarische Darstellung der Dichteverteilung innerhalb eines Neutronensterns

Um die Dimensionen zu verstehen, soll ein Vergleich zu den Eigenschaften unserer Sonne hinzugezogen werden. Eine typische Masse eines Neutronensterns beträgt wie Tabelle 1 zeigt ungefähr 1,4 M_{\odot} bei einem Radius von 10 km. Der Radius unserer Sonne beträgt jedoch $R_{\odot} = 6,69 \cdot 10^5 \text{ km}$. Die Sonne ist also um einige Größenordnungen größer als ein Neutronenstern.

Ebenfalls in Abbildung 2 ersichtlich, lässt sich ein Neutronenstern in 4 Gebiete unterteilen, die unterschiedliche Eigenschaften haben.

Die äußere Kruste hat eine Dicke von einigen hundert Metern und setzt sich hauptsächlich aus Elektronen und Ionen zusammen. Steigt der Druck auf die Materie (in Richtung des Stern Inneren) steigt auch die Fermi-Energie an. Dies führt zu Elektroneneinfangprozesse in den Ionen, weshalb die Gesamtanzahl an Neutronen zunimmt.

Am Übergang zwischen der äußeren und der inneren Kruste beginnen die Neutronen aus den Kernen zu entkommen und ein freies Neutronengas zu bilden.

Die innere Kruste kann dabei eine Größe von einem Kilometer überschreiten, wobei die Dichte bis zu $0,5\rho_{\odot}$ ansteigt. Die Materie in der inneren Kruste setzt sich hauptsächlich aus Elektronen, freien Neutronen und neutronreichen Kernen zusammen. Wobei wie bereits erwähnt bei steigender Dichte die Anzahl an (freien) Neutronen ansteigt.

Der äußere Kern dehnt sich über einige Kilometer aus und hat eine Dichte von ungefähr $2\rho_{\odot}$.

Die Zusammensetzung besteht nun nur noch aus Elementarteilchen, hauptsächlich Neutronen, jedoch auch ein geringer Prozentsatz von Protonen, Elektronen und eventuell auch Myonen sind vorhanden.

Der größte und dichteste Teil eines Neutronensterns ist der Innere Kern, wobei dieser nur bei masse-reichen Neutronensternen vorhanden ist. Bei leichteren Neutronensternen existieren keine Dichten über $2\rho_{\odot}$, da der Gravitationsdruck nicht ausreichend hoch ist.

Der innere Kern erreicht Dichten von bis zu $10\text{-}15\rho_{\odot}$ und einen Radius von mehreren Kilometern. [2]

(Man beachte, dass die Angaben im Text und auf Abbildung 2 nicht vollständig übereinstimmen, da die Grafik auf Basis einer älteren Datenlage beruht)

Grafik 2 zeigt also auf, dass die theoretische Beschreibung und Modellierung von Neutronensternen sehr umfangreich und komplex werden kann. Die unterschiedlichen Zusammensetzungen und Dichten macht es notwendig, für jedes dieser Gebiete andere mathematische Beschreibungen verwendet werden.

Beispielsweise ist eine ultrarelativistische Rechnung ab einer Dichte von $\rho \gg 10^6 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ [3] notwendig, da die kinetischen Energien der freien Teilchen (Elektronen) entsprechend hoch sind.

Bei extrem hohen Drücken, wie im inneren Kern ist es sogar modellabhängig, welche Teilchen existieren und welche Effekte dort vorherrschen.

3 Vorhersagung und Entdeckung

Die bisherigen Informationen über Neutronensterne und ihre Verhaltensweisen stammen nahezu komplett aus experimentellen Befunden und Messungen.

Trotzdem wurde die Existenz von Neutronensternen zunächst in den 1930er Jahren theoretisch vorge-sagt. Es ist allerdings nicht möglich, einen eindeutigen Entdecker der Neutronensterne zu bestimmen, da sowohl Landau als auch Baade & Zwicky auf Sterne, welche schwerer als weiße Zerge sind, eingingen. Aufgrund der unstrukturierten und teilweise von falschen Annahmen ausgehenden Arbeiten von Landau wird Baade & Zwicky jedoch die theoretische Entdeckung zugeschrieben [3].

Die Betrachtungen von Baade & Zwicky galten Supernovaexplosionen und der weiteren Entwicklung des Sterns. In ihrer Veröffentlichung von 1934 erklärten sie explizit, dass ein Stern durch die Supernova zu einem aus extrem dicht gepackten Neutronenstern kollabiert.

In ihrer zweiten Publikation wurden sogar einige Eigenschaften der Neutronensterne relativ präzise vorhergesagt. Ihr Verständnis von Neutronensternen war allerdings noch nicht so ausgereift wie die gegenwärtige Forschung heute, denn die Paper beinhalten auch einige Ungenauigkeiten in den Beschreibungen.

Historisch wurde das Konstrukt des Neutronensterns zunächst jedoch als theoretisches Artefakt und uninteressant abgetan. Die theoretische Forschung sowie das allgemeine Interesse war gering und entwickelte sich nur sehr langsam.

Erst mit der praktischen Verwendung von Röntgenastronomie zu Beginn der 1960er Jahre stieg das Interesse an Neutronensternen an. Denn nun gab es eine Möglichkeit die Existenz nachzuweisen, denn ein Neutronenstern mit einer Oberflächentemperatur von 10^6K emittiert durch einen Abkühlungsprozess weiche Röntgenstrahlung. Diese kann jedoch nicht von Einrichtungen auf der Erde detektiert werden, weshalb die ersten Röntgendetektoren mithilfe von Ballons und Raketen ins All transportiert werden

mussten.

Die Methoden mit denen ein Neutronenstern bzw. ein Pulsar gemessen wird variieren, jedoch decken sich die Detektierungsmethoden dahingehend, dass sie sich die Rotationseigenschaften zunutze machen. Entweder wird versucht direkt die entlang einer Achse emittierte Strahlung zu messen, oder alternativ wird versucht Strahlung zu detektieren, die durch das Feld des als Dipol wirkenden rotierenden Sterns einen zusätzlichen Energieschub bekommt.

1962 wurde die erste nicht von einer Sonne stammende kosmische Röntgenstrahlungsquelle detektiert, was das allgemeine Interesse an Neutronensternen stark anhub. Obwohl es zunächst nicht möglich war einen Zusammenhang zwischen diesen Quellen und Neutronensternen herzustellen.

Der erste eindeutig identifizierte Neutronenstern war der Pulsar im Krebsnebel.

Pulsare sind Neutronensterne, die mit einer hohen Geschwindigkeit rotieren und in zwei entgegengesetzte Richtungen Strahlung emittieren. Abbildung 3 i einen solchen exemplarisch.

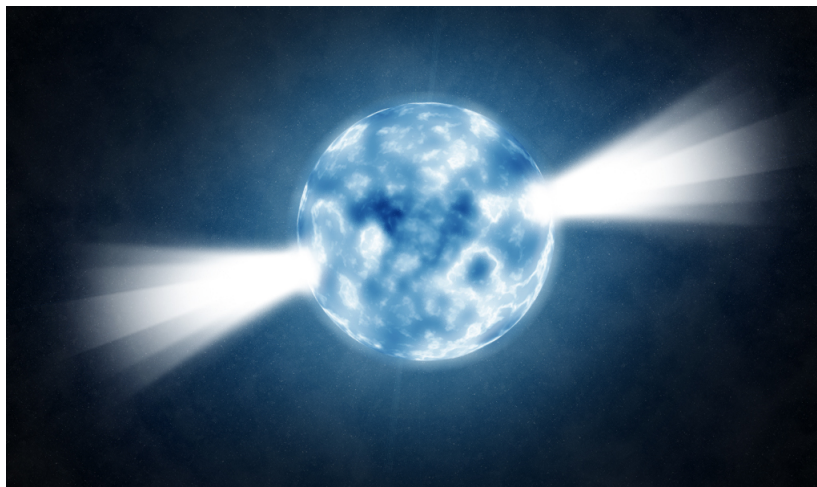


Abbildung 3: Modellarische Darstellung der Dichteverteilung innerhalb eines Neutronensterns

Bis einschließlich 1968 konnten ungefähr zwanzig räumlich kompakte Röntgenstrahlungsquellen entdeckt werden. Jedoch konnte nicht bewiesen werden, dass diese zu Neutronensternen gehören. An dieser Stelle half der Zufall, denn 1967 entdeckte ein Student des Cavendish Laboratory in Cambridge ein Radiosignal, das er nicht erklären konnte. Er verwendete ein von der Universität selbst gebautes Radioteleskop bei einer Wellenlänge von 3,7 Metern. Dieses Teleskop zeichnete sich durch seine extrem gute zeitliche Auflösung aus und so gelang es, ein Signal mit nahezu perfekter Stabilität bei 1,3373012s zu identifizieren. Zunächst konnte dieses Signal von niemandem gedeutet werden und die Spekulationen über die mögliche Herkunft reichten hin bis zu extraterrestrischen Zivilisationen. Die Veröffentlichung der Messergebnisse wurde deshalb aufgeschoben, bis eine mögliche Erklärung präsentiert werden konnte. Die Hypothese von Gold (1968), dass Pulsare rotierende magnetisierte Neutronensterne sind, setzte sich letztendlich durch und verhalf den Messergebnissen zur Publikation. Hätte ein weißer Zwerg nämlich eine solch geringe Periode, würde er durch die Zentrifugalkräfte zerstört werden.

4 Theoretische Beschreibung und Modelle

Um die Modellierung eines Neutronensterns anzugehen, müssen zunächst die vorherrschenden Prozesse verstanden werden.

Allgemein domieren in einen Neutronenstern zwei entgegenwirkende Kräfte. Zum einen die Gravitationskraft, die die bereits sehr dichte Materie weiter zusammendrückt. Dem entgegen wirkt die abstoßende starke Kernkraft und der Entartungsdruck der Fermionen. Bei Pulsaren, also rotierenden Neutronensternen, wirkt zusätzlich noch die Zentrifugalkraft abstoßend. Für die modellarische Beschreibung müssen

also alle diese Kräfte in Beziehung zueinander gesetzt werden. Aufgrund des in Abbildung 2 gezeigten Dichtegradienten verändert sich aber das Verhalten sowie die existierenden Teilchen von Teilgebiet zu Teilgebiet. Folglich ist die Beschreibung eines ganzen Neutronensterns in einem einzigen mathematischen Modell nahezu unmöglich.

4.1 Equation of State (EOS)

Der gewählte Ansatz und wohl kritischste Parameter zur Beschreibung eines Neutronensternes ist die Equation of State (EoS). Allgemein soll sie das Verhalten von (dichter) Materie in einem Stern beschreiben.

Es gibt allerdings unterschiedliche Definitionen von EoS, wobei meist das Verhältniss, von Druck P über Massendichte ρ und Temperatur T gemeint ist. Neutronensterne sind jedoch größtenteils aus entarteten Fermionen (Neutronen, Elektronen und Protonen) zusammengesetzt, wodurch es möglich ist, die Temperatur zu vernachlässigen und von $T=0$ auszugehen.

Die EoS für die Kruste eines Neutronensterns kann mit einer hinreichenden Genauigkeit berechnet werden, um ein Neutronensternmodell zu konstruieren, obwohl auch in diesem Fall noch einige theoretische Probleme ungelöst sind.

Die gegenwärtige Forschung versucht, die EoS für Dichten von $\rho \geq \rho_0$ zu bestimmen. Dies ist jedoch äußerst kompliziert, da eine solche Dichte nicht im Labor reproduziert werden kann und es an einer genau genugen theoretischen Beschreibung von relativistischen, stark wechselwirkenden Mehrkörper Problemen mangelt.

Gegenwärtig existieren eine Vielzahl unterschiedliche Modelle, die jedoch nicht eindeutig auf Richtigkeit und Genauigkeit überprüft werden können und deren Verlässlichkeit mit steigendem ρ abnimmt.

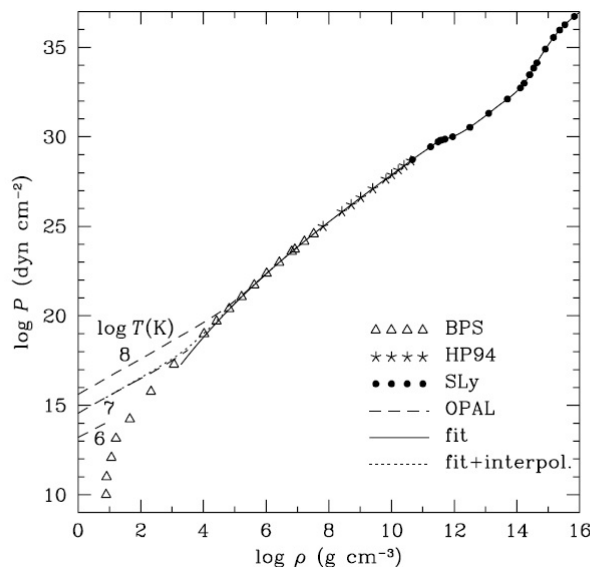


Abbildung 4: Verlauf unterschiedlicher EOS's um einen Neutronenstern zu beschreiben

Abbildung 4 zeigt unterschiedliche EoS, die zur Beschreibung eines Neutronensterns verwendet werden. Hierbei ist die durchgezogene Linie die resultierende EoS für den Neutronenstern. Diese setzt sich aus vier, von unterschiedlichen Wissenschaftlern aus experimentellen Daten kalkulierten EoSs zusammen. Der Bereich sehr hoher Dichte $\rho \geq 5 \cdot 10^{10} \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ wurde von Douchin und Haensel 2001 (SLy) basierend auf einer Skyrme artigen Energie-Dichte Verteilung bestimmt. Für geringere Dichte in der Kruste von $10^8 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \geq \rho \leq 5 \cdot 10^{10} \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ wurde die EOS von Haensel und Pichon 1994 (HP94) ausgerechnet. Bei noch

geringeren Dichten wird die EOS von Baym 1971 (BPS), welche den Grundzustand der Materie bei einer Temperatur von Null beschreibt, verwendet.

Fällt die Dichte nun unter $10^5 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ wird die EOS, wie in Grafik 4 mit gestrichelten Linien angedeutet, temperaturabhängig. Die Lösung zu diesem Problem lieferte 1996 die Opacity Library (OPAL), die die EOS für Eisen der Temperaturen $T = 10^6, 10^7, 10^8$ analytisch bestimmten.

4.2 Tolman-Oppenheimer-Volkoff Gleichung (TOV-Gleichung)

Ist eine EOS bestimmt, ist es möglich ein stellares Modell zu entwickeln. Für nicht rotierende Sterne und im Rahmen der allgemeinen Relativitätstheorie bestimmt die Lösung der Tolman Oppenheimer Volkoff (TOV) Gleichung des hydrostatischen Gleichgewichts die Berechnung.

An dieser Stelle soll der klassische Grenzfall motiviert werden.

Zunächst muss ein Stern im Gleichgewicht vorliegen. Diese Stabilitätsbedingung äußert sich darin, dass der vom Material ausgehende Druck den Gravitationsdruck ausgleicht ($P = P_{\text{grav}} = P_{\text{mat}}$). Das Problem weist eine radiale Symmetrie auf, sowie eine Stabilität über größere Zeiträume. Der Druck hängt somit nur noch vom Radius ab.

Weiter wird die Materie, die hauptsächlich aus Fermionen besteht als ideales Gas, beziehungsweise als ideale Flüssigkeit angenommen, die bekanntermaßen durch Druck, Dichte und Geschwindigkeit vollständig charakterisiert sind. Ausgehend von der Newton'schen Bewegungsgleichung

$$\Delta \vec{F}_N = \Delta m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (1)$$

Führt man zusätzlich eine Massendichte $\rho = \frac{\Delta m}{\Delta V}$ und eine Newton'sche Kraftdichte

$$f_N = \frac{\Delta \vec{F}_N}{\Delta V} = \rho \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (2)$$

ein. Anschließend wird die Kraftdichte in zwei Anteile aufgespalten $f_N = -\nabla P + f_0$ wobei $-\nabla P$ den Druckgradienten und f_0 sonstige äußere Kräfte, bsp. die Schwerkraft ($f_0 = \rho \cdot g$), beschreibt.

Nach dem Bilden des totalen Differentials der Geschwindigkeit

$$d\vec{v} = dt \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + dx \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + dy \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + dz \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} = \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} \right) dt \quad (3)$$

werden Gleichungen 2 und 3 ineinander eingesetzt und es ergibt sich die Eulergleichung:

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right) = -\nabla P + f_0 \quad (4)$$

Aufgrund des statischen Falles ist die Geschwindigkeit Null und die Eulergleichung vereinfacht sich zu $\nabla P = f_0$.

Als externe Kraft wird nun die Gravitationskraft betrachtet, diese ergibt sich (aufgrund der Konsativität) für ein Massenelement zu ($dF = -\Delta \Phi \cdot dm$). Eingesetzt in die Eulergleichung resultiert dies zu

$$\frac{dP}{dr} = -\rho \frac{d\Phi}{dr} \quad (5)$$

Für die Bestimmung von $\frac{d\Phi}{dr}$ wird die Newtonsche Feldgleichung

$$\Delta \Phi = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \frac{d\Phi}{dr} = 4\pi G \rho \quad (6)$$

einmal integriert und es ergibt sich

$$\frac{d\Phi}{dr} = 4\pi \frac{G}{r^2} \int_0^r dr' r'^2 \rho(r') := \frac{G\mathcal{M}(r)}{r^2} \quad (7)$$

Setzt man dies in Gleichung 5 ein, erhält man die TOV-Gleichung für den klassischen Grenzfall

$$\frac{dP}{dr} = \rho(r) \cdot \frac{G\mathcal{M}(r)}{r^2} \quad (8)$$

Wird die TOV Gleichung relativistisch hergeleitet ergeben sich einige weitere Terme, die dafür sorgen, dass der Druckabfall in radialer Richtung stärker ansteigt. Die tatsächlichen Sterne sind also kleiner als klassisch vermutet werden würde.

Die exakte TOV Gleichung lautet:

$$\frac{dP}{dr} = \rho(r) \cdot \frac{G\mathcal{M}(r)}{r^2} \left[1 + \frac{P}{\rho c^2} \right] \left[1 + \frac{4\pi r^3 P}{\mathcal{M} c^2} \right] \left[1 - \frac{2G\mathcal{M}}{rc^2} \right]^{-1} \quad (9)$$

4.3 Forschung

In der gegenwärtigen Forschung wird mithilfe von experimentellen Messdaten der Versuch unternommen, Rückschlüsse auf die Qualität der EOS zu erhalten, um so durch das Ausschlussverfahren, eine oder ein paar wenige EoS zu finden, die die Neutronensterne hinreichend beschreibt.

Zunächst wird eine oder eine Menge von EOS genommen und diese mithilfe der TOV Gleichung in den M-R Raum transformiert.

Hierbei wird eine zentrale Dichte festgehalten und von ihr bis zum Radius integriert um einen Ausdruck für die Masse zu erhalten. Dies wird in die TOV Gleichung eingesetzt und erneut über den Radius integriert. Der resultierende Ausdruck kann nach dem Radius aufgelöst werden und liefert einen Wert für diesen. Wird dies in die Formel für die Masse eingesetzt, führt es zu einem Punkt im M-R Raum.

In Abbildung 5 ist exemplarisch gezeigt, wie eine Menge von EOS zu einem Bereich im M-R Diagramm

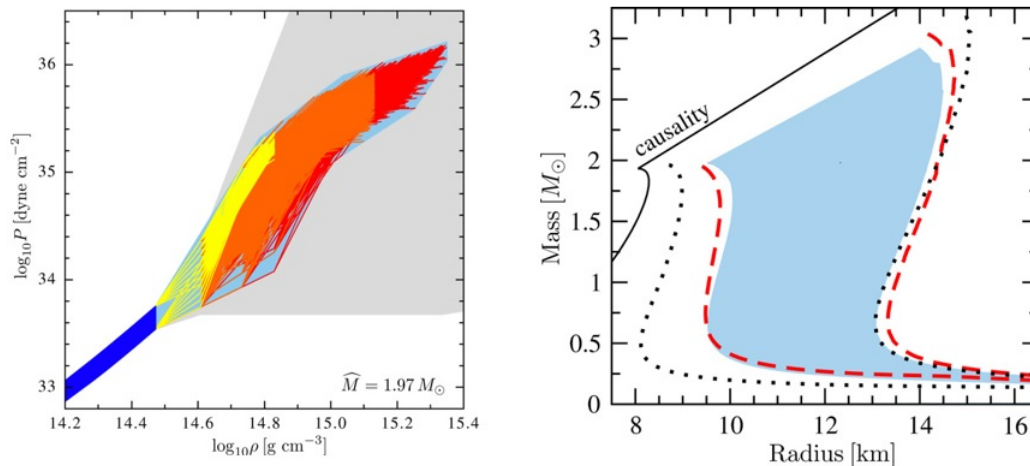


Abbildung 5: Lösungen der TOV-Gleichung ausgehend von einer Menge unterschiedlicher EOS

führt. [4]

Durch das Untersuchen der Masse und des Radius existierender Neutronensterne ist es möglich, Punkte oder Linien im M-R Diagramm festzustellen, die durch die EOS abgedeckt sein müssen. Ist dies nicht der Fall, kann die EOS ausgeschlossen werden.

Exemplarisch dafür ist beispielsweise die Entdeckung eines Neutronensterns mit einer Masse von $2M_{\odot}$. Diese führte zum Ausschluss vieler, zu der damaligen Zeit noch als gut erachteten, EOS.

5 Quellenverzeichnis

- Wikimedia <https://de.wikipedia.org/wiki/Sternentstehung> Stand: 13.05.2016
- TSCHARUNTER, WERNER M. *Frühphasen der Sternentstehung* Mitteilungen der Astronomischen Gesellschaft Hamburg, 1981
- "Neutron Stars 1" *Haensel, P., Potekhin, A.Y., Yakovlev, D.G.* Stand - Springer-Verlag 2007
- "EQUATION OF STATE AND NEUTRON STAR PROPERTIES CONSTRAINED BY NUCLEAR PHYSICS AND OBSERVATION" *Hebeler et al* - 2013