

Universalität in der Kernphysik



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Zusammenfassung des Seminarvortrags von Thilo Egenolf
Theorieseminar: Kernstruktur und Nukleare Astrophysik
09. Juni 2016

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
Allgemeines Beispiel für Universalität	1
Universalität in der Kernphysik	2
Theoretische Beschreibung des Efimov-Effekts	3
Hypersphärisches Modell	3
Effektive Feldtheorie	6
Experimentelle Beispiele	9
Ultrakalte Atome und Feshbach-Resonanz	9
Halo-Kerne	11
Literaturverzeichnis	13

Einleitung

Betrachtet man Streuprozesse von Teilchen mit kurzreichweitiger Wechselwirkung und einer Streulänge, die groß ist im Verhältnis zur Reichweite der Wechselwirkungen, dann weisen diese im Grenzfall niedriger Energien Eigenschaften auf, die unabhängig von der Reichweite und den Eigenschaften der kurzreichweitigen Wechselwirkung sind. Dieses Verhalten, dass Eigenschaften von Systemen nicht von allen Systemdetails abhängen, wird als Universalität bezeichnet und auf den folgenden Seiten näher erläutert. Dazu wird zuerst auf ein allgemeines Beispiel in der Physik zurückgegriffen, um den Begriff einzuführen. Anschließend werden die Annahmen erläutert, die nötig sind, um den Begriff der Universalität auch auf die Kernphysik anwenden zu können, und das Deuteron als klassisches Beispiel eines Zweikörpersystems mit universellen Eigenschaften angeführt. Danach folgt die Erweiterung auf Dreikörpersysteme mit der Einführung des Efimov-Effekts und dessen theoretischer Beschreibung im Falle dreier identischer Bosonen. Abgeschlossen wird die Zusammenfassung mit einem Überblick über experimentelle Ergebnisse an ultrakalten Gasen und der Beschreibung von Halo-Kernen, beides Systeme, in denen Efimov-Zustände bzw. universelles Verhalten beobachtet werden können.

Allgemeines Beispiel für Universalität

Bereits ein Blick in die Onlineenzyklopädie Wikipedia liefert eine brauchbare Definition der Universalität: „Universalität bezeichnet [...] die Tatsache, dass gewisse Eigenschaften gewisser Klassen von Systemen nicht von allen Systemdetails abhängen: Vertreter einer Universalitätsklasse zeigen qualitativ dasselbe Verhalten [...], obwohl sie im Detail einen unterschiedlichen Aufbau oder eine unterschiedliche Dynamik aufweisen.“[1]

Solche Universalitätsklassen lassen sich in vielen Bereichen der Physik beobachten, unter anderem auch in der statistischen Mechanik. Dort hat zum Beispiel eine Observable A nahe eines Phasenübergangs, also eines kritischen Wertes β_c des Systemparameters, ein universelles Verhalten, das sich in ganz unterschiedlichen Systemen wiederfindet. Denn mit Hilfe des kritischen Exponenten α lässt sich die Observable allgemein beschreiben als

$$A = A_0 \cdot \|\beta - \beta_c\|^\alpha. \quad (1)$$

Betrachtet man zum Beispiel den Phasenübergang eines Stoffes von flüssig zu gasförmig (s. Abb. 1(a)), so kann die Dichte der beiden Phasen als physikalische Observable der Form

$$\rho_{\text{liq}}(T) - \rho_c \rightarrow +A(T_c - T)^\alpha \quad (2)$$

$$\rho_{\text{gas}}(T) - \rho_c \rightarrow -A(T_c - T)^\alpha \quad (3)$$

beschrieben werden. Ein in den Details gänzlich anderes System ist ein ferromagnetisches Material und dessen Phasenübergang der Magnetisierung in Abhängigkeit von der Temperatur (s. Abb. 1(b)). Aber auch die Magnetisierung kann durch

$$M_0(T) \rightarrow A'(T_c - T)^\alpha \quad (4)$$

beschrieben werden. Und für beide Systeme hat der kritische Exponent mit $\alpha = 0,325$ sogar den gleichen universellen Wert.

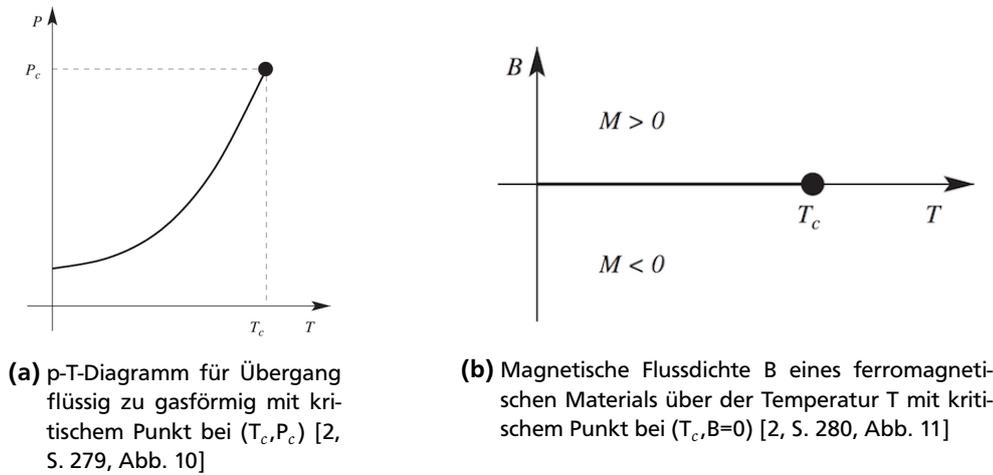


Abbildung 1: Phasendiagramme

Universalität in der Kernphysik

Um in der Kernphysik universelle Eigenschaften beobachten zu können, wird im Folgenden die Streuung von zwei oder drei Teilchen im Grenzfall niedriger Energien, also Energien in der Nähe der Dissoziationsgrenze des Streupotentials betrachtet. Dies ist äquivalent zu der Annahme, dass die De-Broglie-Wellenlänge der streuenden Teilchen $\lambda = 2\pi\hbar/p$ groß ist gegenüber allen anderen relevanten Längenskalen, also auch gegenüber der Reichweite der Wechselwirkung des Streuprozesses.

Die Streuung zweier Teilchen ist in diesem Fall bestimmt durch die S-Wellen-Anteile der Streuung, die in erster Ordnung nur durch die Streulänge a beschrieben werden. Parameter der höheren Ordnungen folgen aus der Effective-Range-Entwicklung. In erster Ordnung sind die Eigenschaften der Streuung also nur noch von einem universellen Parameter –der Streulänge –abhängig, aber unabhängig von der Reichweite r_0 und anderen Details der kurzreichweitigen Wechselwirkung und somit universell. Ein Beispiel für eine solche universelle Eigenschaft ist die Existenz eines Bindungszustandes zweier Teilchen gleicher Masse mit der Bindungsenergie $E_D = \hbar^2/ma^2$ mit Korrekturen der Ordnung r_0/a .

Das wahrscheinlich bekannteste Beispiel für ein solches Zweikörpersystem ist das Deuteron, das aus einem Neutron und einem Proton besteht. Es handelt sich dabei also um eine Nukleon-Nukleon-Streuung, die generell in zwei Kanälen beschrieben werden kann, entweder als Isospin-Triplet und folglich Spin-Singlet mit der Streulänge $a_s = -23,76$ fm und der effektiven Reichweite $r_s = 2,75$ fm oder als Isospin-Singlet und folglich Spin-Triplet mit der Streulänge $a_t = 5,42$ fm und der effektiven Reichweite $r_t = 1,76$ fm. Dies ist auch der fürs Deuteron relevante Streukanal, denn der Bindungszustand des Deuteron ist ein Isospin-Singlet-Zustand mit einer Bindungsenergie von $E_D = 2,225$ MeV, also in der gleichen Größenordnung wie die universelle Vorgabe von $\hbar^2/ma_t^2 = 1,4$ MeV. Für diese universellen Betrachtungen wird allerdings nur der S-Wellen-Anteil des Bindungszustandes betrachtet. Daher muss an dieser Stelle angemerkt werden, dass der Deuteron-Bindungszustand auch D-Wellen-Anteile besitzt und somit nicht alle Eigenschaften des Deuterons universell sind.

Was passiert aber nun, wenn die Streulänge eines Systems divergiert? Bei Zweikörpersystemen bleibt auch in diesem Grenzfall der eine universelle Bindungszustand bei $E = 0$ theoretisch vorhanden.

Dreikörpersysteme besitzen dagegen in diesem Grenzfall unendlich viele gebundene Zustände mit einem Häufungspunkt

bei $E = 0$. Dieses Verhalten wurde zuerst 1970 von Vitaly Efimov für drei identische Bosonen theoretisch abgeleitet und daher als Efimov-Effekt bezeichnet. Das Verhältnis der Bindungsenergien zweier aufeinanderfolgender sogenannter Efimov-Zustände ist dabei konstant, d.h. die Bindungsenergien der Efimov-Zustände weisen eine diskrete Skalensymmetrie auf, sodass die Beschreibung des Spektrums einen weiteren universellen Dreikörper-Parameter zusätzlich zur Zweikörper-Streulänge erfordert. Der Universalitäts-Begriff, wie er zu Beginn dieses Abschnitts eingeführt wurde, muss nun also zur Beschreibung der Dreikörpersysteme auf zwei universelle Parameter erweitert werden.

Theoretische Beschreibung des Efimov-Effekts

Hypersphärisches Modell

Eine theoretische Herleitung des Efimov-Spektrums dreier identischer Bosonen für den Grenzfall divergierender Streulängen ist durch Lösung der Schrödinger-Gleichung formuliert in hypersphärischen Koordinaten möglich. Die Wahl der hypersphärischen Koordinaten ist dabei nicht obligatorisch, aber effizient, da in diesen Koordinaten eine Entwicklung der Wellenfunktion möglich ist, die direkt zu dem für das Efimov-Spektrum interessanten Energieeigenwert führt.

Um die Position der drei Teilchen zueinander in hypersphärischen Koordinaten beschreiben zu können, werden zuerst die sogenannten Jacobi-Koordinaten eingeführt. Dazu betrachtet man zwei der drei Teilchen. Der relative Abstand der beiden Teilchen $\vec{r}_{ij} = \vec{r}_i - \vec{r}_j$ entspricht der ersten Jacobi-Koordinate. Dann ersetzt man die beiden Teilchen durch ein virtuelles Teilchen im Schwerpunkt mit der Gesamtmasse der beiden Teilchen und die zweite Jacobi-Koordinate entspricht nun dem relativen Abstand zwischen diesem virtuellen Teilchen und dem dritten Teilchen, bei drei Teilchen gleicher Masse also $\vec{r}_{k,ij} = \vec{r}_k - \frac{1}{2}(\vec{r}_i + \vec{r}_j)$. Das Tripel (ijk) ist dabei eine zyklische Permutation der Teilchenindizes. Bei ungleicher Masse ist dieser Relativvektor durch die Verschiebung des Schwerpunktes zusätzlich von den Massen der Teilchen abhängig. In Abbildung 2 ist eine der drei Möglichkeiten zur Wahl der Jacobi-Koordinaten dargestellt. Setzt man diesen Algorithmus

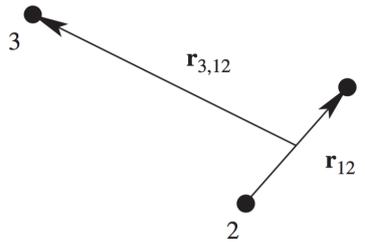


Abbildung 2: Jacobi-Koordinaten: eine der drei möglichen Permutationen [2, S. 292, Abb. 18]

beliebig fort, lassen sich auch N-Teilchensysteme mit Hilfe der Jacobi-Koordinaten beschreiben.

Im zweiten Schritt erfolgt nun die Einführung der hypersphärischen Koordinaten. Dabei ist die erste relevante Größe das quadratische Mittel der relativen Abstände der drei Teilchen, der sogenannte Hyperradius

$$R = \sqrt{\frac{1}{3} (r_{12}^2 + r_{23}^2 + r_{31}^2)} = \sqrt{\frac{1}{2} r_{ij}^2 + \frac{2}{3} r_{k,ij}^2}. \quad (5)$$

Der Hyperradius nimmt einen großen Wert an, wenn mindestens eines der drei Teilchen weit von den anderen beiden entfernt ist, und wird entsprechend klein, wenn sich alle drei Teilchen nahe beieinander befinden. Die zweite relevante Größe ist der Hyperwinkel

$$\alpha_k = \arctan \left(\frac{\sqrt{3} r_{ij}}{2 r_{k,ij}} \right), \quad (6)$$

der Werte zwischen 0 und $\pi/2$ annehmen kann. Der Hyperwinkel nimmt einen kleinen Wert an, wenn $r_{k,ij}$ groß gegenüber r_{ij} ist, und einen Wert nahe $\pi/2$ in der umgekehrten Situation. In Abbildung 3 sind beispielhaft drei Anordnungen mit identischem Hyperradius dargestellt. Alle drei weisen aber unterschiedliche Hyperwinkel auf. Da diese aber auch nur abhängig von den Beträgen der Relativvektoren sind, bleiben die Hyperwinkel gleich, wenn die Position der Teilchen 2 und 3 entlang der gestrichelten Kreise verdreht wird. Eine vollständige Beschreibung der Position der drei Teilchen benötigt also noch weitere unabhängige Koordinaten.

Insgesamt sind sechs unabhängige Koordinaten notwendig. Dies sind im Folgenden der Hyperradius R , ein Hyperwinkel

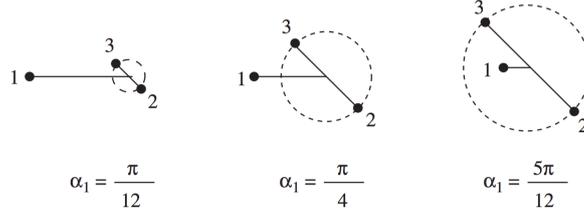


Abbildung 3: Anordnungen mit gleichem Hyperradius R aber unterschiedlichem Hyperwinkel α_1 [2, S. 292, Abb. 19]

α_k und jeweils zwei Winkel, die die Richtung der Einheitsvektoren \hat{r}_{ij} und $\hat{r}_{k,ij}$ beschreiben. Formuliert in Abhängigkeit von diesen sechs Koordinaten hat die Schrödinger-Gleichung die Form

$$\left(T_R + T_{\alpha_k} + \frac{\Lambda_{k,ij}^2}{2mR^2} + V(R, \Omega) \right) \Psi = E\Psi \quad (7)$$

mit dem Operator der hyperradialen kinetischen Energie

$$T_R = -\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{5}{R} \frac{\partial}{\partial R} \right], \quad (8)$$

dem Operator der kinetischen Energie abhängig vom Hyperwinkel

$$T_{\alpha_k} = -\frac{\hbar^2}{2mR^2} \left[\frac{\partial^2}{\partial \alpha_k^2} + 4 \cot(2\alpha_k) \frac{\partial}{\partial \alpha_k} \right] \quad (9)$$

und dem verallgemeinerten Drehimpulsoperator

$$\Lambda_{k,ij}^2 = \frac{L_{ij}^2}{\sin^2 \alpha_k} + \frac{L_{k,ij}^2}{\cos^2 \alpha_k}. \quad (10)$$

Die Winkelabhängigkeiten im Potential wurden dabei in Ω zusammengefasst. Das Potential kann nun als Summe von drei Zweiteilchen-Potentialen beschrieben werden. Denn eventuelle Dreiteilchen-Potentiale können im betrachteten Grenzfall niedriger Energie ebenfalls als Summe von Zweiteilchen-Potentialen aufgefasst werden.

$$V(R, \Omega) = V(r_{12}) + V(r_{23}) + V(r_{31}) \quad (11)$$

Außerdem können die Subsystem-Drehimpulse vernachlässigt werden, da diese ebenfalls bedingt durch den Grenzfall niedriger Energien und somit auch niedriger Impulse mit höheren Potenzen des Impulses unterdrückt werden. Daher kann die Wellenfunktion in der sogenannte Fadeev-Zerlegung dargestellt werden:

$$\Psi(R, \alpha, \Omega) = \Psi(R, \alpha_1) + \Psi(R, \alpha_2) + \Psi(R, \alpha_3) \quad (12)$$

Eingesetzt in die Schrödinger-Gleichung folgt daraus die Niederenergie-Fadeev-Gleichung

$$(T_R + T_\alpha - E) \Psi(R, \alpha) = -V(\sqrt{2}R \sin \alpha) \left[\Psi(R, \alpha) + \frac{4}{\sqrt{3}} \int_{|\frac{\pi}{3}-\alpha|}^{\frac{\pi}{2}-|\frac{\pi}{6}-\alpha|} \frac{\sin(2\alpha')}{\sin(2\alpha)} \Psi(R, \alpha') d\alpha' \right]. \quad (13)$$

Da es sich um drei identische Teilchen handelt, wird auf die Indizierung des Hyperwinkels verzichtet. Die anderen beiden Hyperwinkel gehen dabei im Integralausdruck mit ein, die Integrationsgrenzen ergeben sich aus der Formulierung von zwei Hyperwinkeln durch den dritten. Des weiteren gilt für die Abhängigkeit des Potentials $r_{ij} = \sqrt{2}R \sin \alpha_k$. Die Wellenfunktion $\Psi(R, \alpha)$ kann nun analog zur Vorgehensweise beim Lösen der Schrödinger-Gleichung des Wasserstoffatoms in Hyperradial- und Hyperwinkelfunktionen entwickelt werden:

$$\Psi(R, \alpha) = \frac{1}{R^{\frac{5}{2}} \sin(2\alpha)} \sum_n f_n(R) \Phi_n(R, \alpha) \quad (14)$$

Einsetzen dieser Entwicklung in die Niederenergie-Fadeev-Gleichung zerlegt das Problem in zwei getrennte Gleichungen für Hyperwinkel und Hyperradius. Die zu lösende Gleichung für die Hyperwinkelfunktionen ergibt sich durch Projektion auf eine Komponente der Entwicklung und lautet

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - \lambda_n(R) \right] \Phi_n(R, \alpha) = -\frac{2mR^2}{\hbar^2} V(\sqrt{2}R \sin \alpha) \left[\Phi_n(R, \alpha) + \frac{4}{\sqrt{3}} \int_{\frac{\pi}{3}-\alpha}^{\frac{\pi}{2}-|\frac{\pi}{6}-\alpha|} \Phi_n(R, \alpha') d\alpha' \right]. \quad (15)$$

Diese Gleichung ist in zwei Grenzfällen analytisch lösbar. Wenn $R \sin \alpha$ groß gegenüber der Potentialreichweite ist, kann der Potentialterm auf der rechten Seite der Gleichung vernachlässigt werden. In diesem Fall lautet die Gleichung

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - \lambda_n(R) \right] \Phi_n^{(\text{hi})}(R, \alpha) \approx 0 \quad (16)$$

mit der Lösung

$$\Phi_n^{(\text{hi})}(R, \alpha) \approx \sin \left[\lambda_n^{\frac{1}{2}}(R) \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \right]. \quad (17)$$

Im zweiten Grenzfall wird $\alpha \ll 1$ angenommen. $R \sin \alpha$ ist dadurch so klein, dass der Eigenwert $\lambda_n(R)$ gegenüber dem Potential $V(\sqrt{2}R \sin \alpha)$ vernachlässigt werden kann. Außerdem kann die Hyperwinkelfunktion innerhalb des Integrals als konstant – beschrieben durch die Lösung des ersten Grenzfalles – angenommen werden. Die Gleichung lautet in diesem Fall

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{2mR^2}{\hbar^2} V(\sqrt{2}R \alpha) \right] \Phi_n^{(\text{lo})}(R, \alpha) \approx -\frac{2mR^2}{\hbar^2} V(\sqrt{2}R \alpha) \frac{8\alpha}{\sqrt{3}} \Phi_n^{(\text{hi})} \left(R, \frac{\pi}{3} \right) \quad (18)$$

und als Lösung ergibt sich

$$\Phi_n^{(\text{lo})}(R, \alpha) \approx A(R) \Psi_0(\sqrt{2}R \sin \alpha) - \frac{8\alpha}{\sqrt{3}} \Phi_n^{(\text{hi})} \left(R, \frac{\pi}{3} \right) \quad (19)$$

mit der Lösung der Zweikörper-Schrödinger-Gleichung

$$\Psi_0(\sqrt{2}R \sin \alpha) \xrightarrow[k \rightarrow 0]{} \sqrt{2}R \sin \alpha - a \quad (20)$$

als Lösung der homogenen Gleichung mit der Streulänge a . Betrachtet man nun den Fall eines verschwindenden Hyperwinkels bei gleichzeitig großem Hyperradius, so tritt der zuerst betrachtete Grenzfall ein, solange $\alpha > 0$ gilt, für $\alpha = 0$ tritt aber der zweite Grenzfall ein. Um für diesen Fall eine konsistente Lösung zu erhalten, können die beiden Lösungen für $\alpha \rightarrow 0$ aneinander angepasst werden. Der Vergleich der Funktionswerte ergibt dabei den Wert der Konstanten

$$A(R) = -\sin \left[\lambda_n^{\frac{1}{2}}(R) \frac{\pi}{2} \right] \frac{1}{\alpha} \quad (21)$$

und der Vergleich der ersten Ableitung nach α eine Gleichung zur numerischen Bestimmung der Eigenwerte

$$\cos \left(\lambda_n^{\frac{1}{2}}(R) \frac{\pi}{2} \right) - \frac{8}{\sqrt{3}} \lambda_n^{-\frac{1}{2}}(R) \sin \left(\lambda_n^{\frac{1}{2}}(R) \frac{\pi}{6} \right) \xrightarrow[a \rightarrow \pm\infty]{} 0. \quad (22)$$

Diese Gleichung hat eine einzige negative numerische Lösung $\lambda_0(R) \xrightarrow[a \rightarrow \pm\infty]{} -s_0^2$ mit $s_0 = 1,00624\dots$, für die das Potential in der hyperradialen Gleichung attraktiv ist, die also für Bindungszustände relevant ist. Das Potential lautet dann

$$V_0(R) = (\lambda_0(R) - 4) \frac{\hbar^2}{2mR^2} \rightarrow -(s_0^2 + 4) \frac{\hbar^2}{2mR^2}. \quad (23)$$

Durch dieses Potential lässt sich nun auch die hyperradiale Gleichung formulieren und lösen. Sie lautet

$$\frac{\hbar^2}{2m} \left(-\frac{\partial^2}{\partial R^2} - \frac{s_0^2 + \frac{1}{4}}{R^2} \right) f_0(R) = E f_0(R). \quad (24)$$

Differentialgleichungen dieser Form können mit Hilfe von modifizierten Besselfunktionen mit komplexem Argument gelöst werden. Die Lösung der Hyperradialfunktion lautet daher mit $\kappa = \sqrt{\frac{|E|m}{\hbar^2}}$

$$f_0(R) = R^{\frac{1}{2}} K_{is_0}(\sqrt{2}\kappa R). \quad (25)$$

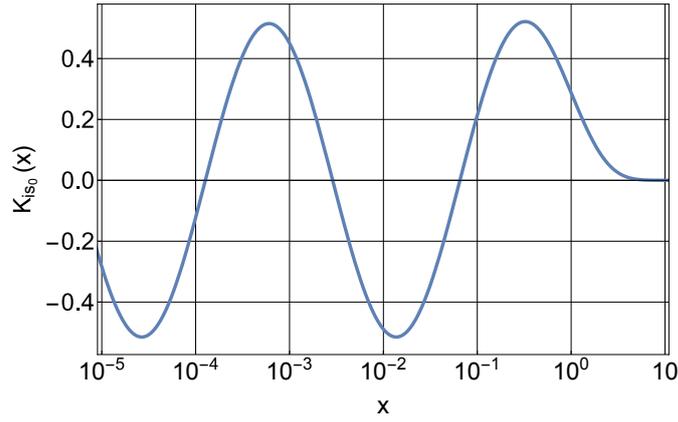


Abbildung 4: Modifizierte Besselfunktion $K_{is_0}(x)$ mit komplexem Argument

Zur Verdeutlichung ist in Abbildung 4 eine solche modifizierte Besselfunktion mit dem komplexen Argument is_0 über einer logarithmischen Skala dargestellt. Dabei ist das asymptotische Verhalten der Funktion erkennbar. Bei kleinen x gleicht die Funktion einer Sinusfunktion vom Logarithmus von x , bei großen x fällt sie dagegen exponentiell ab.

Das Potential in Gleichung (23), das zur Formulierung der hyperradialen Gleichung herangezogen wurde, ist allerdings für $R \rightarrow 0$ nicht begrenzt. Somit sind für die vollständige physikalische Lösung des Problems noch zusätzliche Informationen über das kurzreichweitige Verhalten notwendig. Diese werden durch Festlegung der logarithmischen Ableitung der Hyperradialfunktion $\frac{R_0 f_0'(R_0)}{f_0(R_0)}$ für einen Hyperradius R_0 , der klein, aber verschieden von null ist, hinzugefügt. Diese Festlegung lässt sich auch als den Einfluss einer Dreiteilchenkraft interpretieren, da alle drei Teilchen für einen ebensolchen kleinen Hyperradius sehr nahe beieinander sind.

Aus dieser Festlegung folgt nun die Existenz der Efimov-Bindungszustände mit der Bindungsenergie

$$E_T^{(n)} = \left(e^{-\frac{2\pi}{s_0}} \right)^{n-n_*} \frac{\hbar^2 \kappa_*^2}{m}. \quad (26)$$

Dabei ist κ_* der bereits in der Einleitung erwähnte notwendige zusätzliche Dreiteilchenparameter, um den der Universalitätsbegriff erweitert werden muss, damit das Efimov-Spektrum beschrieben werden kann. Durch diesen Parameter ist die Bindungsenergie des Zustandes n_* willkürlich festgelegt. Die Efimov-Zustände dreier identischer Bosonen weisen also eine diskrete Skalensymmetrie mit der Skalenkonstanten $\lambda = e^{\frac{\pi}{s_0}} \approx 22,7$ auf, denn es gilt $E_T^{(n)} = \lambda^{-2} E_T^{(n-1)}$ für $a \rightarrow \pm\infty$. Dies entspricht im dargestellten Spektrum (s. Abb. 5) der Verteilung der Schnittpunkte der beispielhaft dargestellten Bindungszustände mit der vertikalen Achse. Dabei ist allerdings zu beachten, dass hier die Wellenzahl statt der Bindungsenergie über der inversen Streulänge aufgetragen ist. Aus der Abbildung wird auch deutlich, dass die Skalensymmetrie der Bindungsenergie auch für große endliche Streulängen bis auf Korrekturen der Ordnung $(r_0/a)^2$ gilt. Auch die Streulänge skaliert entsprechend der Skalensymmetrie ebenfalls mit der Skalenkonstanten λ . Dies ist in der Abbildung durch die Schnittpunkte der Bindungszustände mit der horizontalen Achse wiedergegeben. Auch andere Observablen zeigen diese diskrete Skalensymmetrie und somit universelle Eigenschaften, unter anderem der Atom-Dimer-Wirkungsquerschnitt, für den $\sigma_{AD}(\lambda^{2m} E, \lambda^m a, \kappa_*) = \lambda^{2m} \sigma_{AD}(E, a, \kappa_*)$ gilt.

Andere auftretende Korrelationen lassen sich anhand dieser Herangehensweise allerdings nicht erklären. Ein Beispiel eines solchen universellen Zusammenhangs ist die Korrelation zwischen der Bindungsenergie des Tritons und der Spin-Doublet Neutron-Deuteron-Streulänge, die Phillips-Linie genannt wird. Die Ableitung dieser Korrelationen ist durch die Formulierung des Efimov-Effekts in der effektiven Feldtheorie möglich.

Effektive Feldtheorie

Zur kurzen Einführung in die effektive Feldtheorie wird mit der Beschreibung des Zweikörper-Problems begonnen. Dabei wird nicht wie in der vorigen Ableitung der Hamilton-Operator in der Schrödinger-Gleichung, sondern die Lagrange-Dichte betrachtet, die sich durch die Legendre-Transformation aus der Hamilton-Dichte ergibt. Dazu werden die Feldoperatoren ψ und ψ^\dagger genutzt. Der Operator ψ vernichtet ein Teilchen am Ort \vec{r} , der adjungierte Operator ψ^\dagger erzeugt ein Teilchen am Ort \vec{r} . Mit der Notation $\hbar = 1$ und $m = 1$ lautet die Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L} = \psi^\dagger \left(i \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla^2 \right) \psi - \frac{g_2}{4} (\psi^\dagger \psi)^2. \quad (27)$$

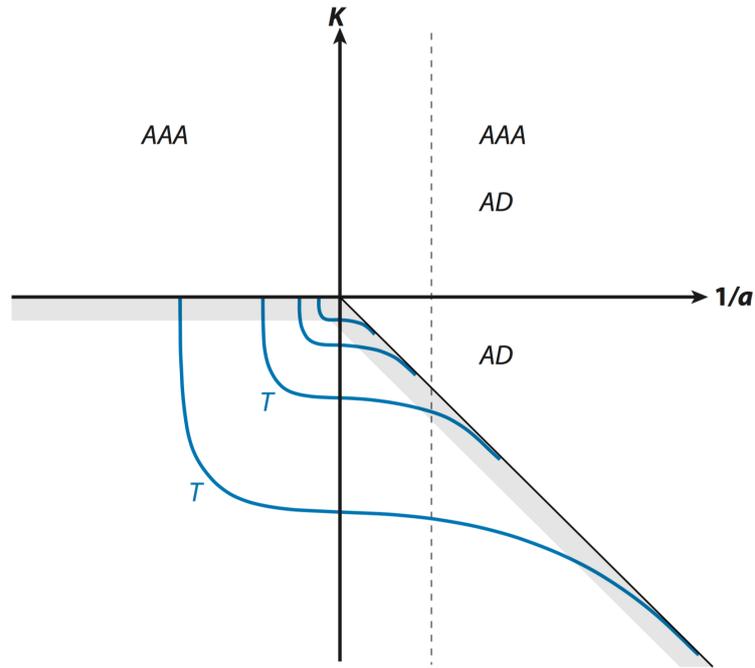


Abbildung 5: Efimov-Spektrum dreier identischer Bosonen. Aufgetragen ist $K = \text{sgn}(E)(m|E|)^{1/2}/\hbar$ über der inversen Streulänge. Die blauen Linien stellen vier beispielhafte Efimov-Zustände dar. [3, S. 213, Abb. 1]

Das Wechselwirkungspotential ist dabei eine Zweiteilchen-Kontaktwechselwirkung mit der Kopplungskonstanten g_2 . Die benötigten physikalischen Informationen der Streuung sind im Ortsraum im Ausdruck $\langle 0|T(\psi\psi\psi^\dagger\psi^\dagger)|0\rangle$ enthalten. Dabei beschreibt $|0\rangle$ den Vakuum-Zustand, aus dem die Streuzustände erzeugt werden, und T ist der Zeitordnungsoperator. Im Impulsraum enthält die Feynman-Amplitude $i\mathcal{A}$ die gesuchten Informationen, die zur T-Matrix führen. Die Amplitude kann bildlich als Summe zusammenhängender Feynman-Diagramme dargestellt werden. Das einfachste Feynman-Diagramm ist ein Propagator, also eine einfache horizontale Linie als Darstellung der Zeitentwicklung eines Teilchens mit dem Impuls k und der Energie k_0 . Mathematisch entspricht dies dem Ausdruck

$$\frac{i}{k_0 - k^2/2 + i\epsilon}. \quad (28)$$

In Abbildung 6(a) sind die ersten drei Terme der Feynman-Amplitude in Störungsrechnung dargestellt. Die erste Ord-

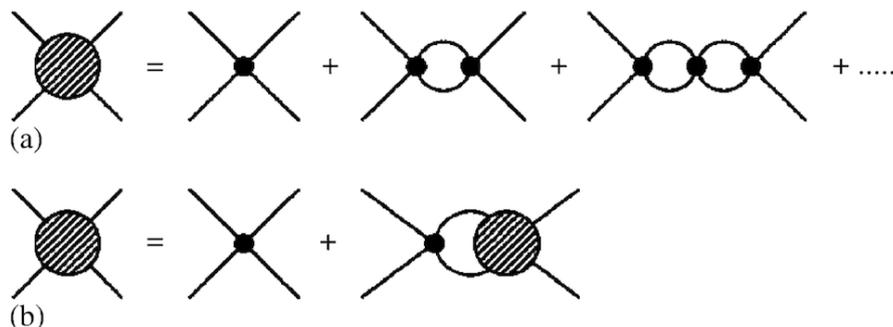


Abbildung 6: Diagrammatische Gleichungen für die Feynman-Amplitude: (a) Störungsrechnung und (b) Lippmann-Schwinger-Gleichung [2, S. 345, Abb. 40]

nung wird durch einen Vertex mit der Kopplungskonstanten beschrieben und entspricht damit $-ig_2$. In jeder weiteren nächsthöheren Ordnung kommt ein Loop hinzu, das heißt, es wird ein virtuelles Teilchen erzeugt, dessen Energie und

Impuls nicht festgelegt ist, solange Energie- und Impulserhaltung in jedem Vertex erfüllt sind. Daher muss über alle möglichen Impulse und Energien integriert werden. Mit Hilfe des Ausdrucks für den Propagator ergibt sich damit für den zweiten Term

$$\frac{g_2^2}{2} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \int \frac{dq_0}{2\pi} \frac{1}{q_0 - q^2/2 + i\epsilon} \frac{1}{E - q_0 - q^2/2 + i\epsilon}. \quad (29)$$

Der obere Propagator des Loops hat also den Impuls \mathbf{p} und die Energie p_0 und der untere Propagator entsprechend den Impuls $-\mathbf{p}$ und die Energie $E - q_0$. Die Summe über alle möglichen Terme entspricht einer geometrischen Reihe, deren Ergebnis in Abbildung 6(b) dargestellt ist. Die gesuchte Amplitude \mathcal{A} steht nun also auf beiden Seiten der analytisch lösbaren Integralgleichung, die Lippmann-Schwinger-Gleichung genannt wird:

$$\mathcal{A}(E) = -g_2 + \frac{i}{2} g_2 \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \int \frac{dq_0}{2\pi} \frac{1}{q_0 - q^2/2 + i\epsilon} \frac{1}{E - q_0 - q^2/2 + i\epsilon} \mathcal{A}(E). \quad (30)$$

Zur Beschreibung des Dreikörper-Problems wird nun noch eine Dreiteilchen-Wechselwirkung mit der Kopplungskonstanten g_3 zur Lagrange-Dichte hinzugefügt. Dieser Wechselwirkungsterm entspricht in der Beschreibung im hypersphärischen Modell der Festlegung der logarithmischen Ableitung für einen kleinen Hyperradius $R_0 > 0$. Die Lagrange-Dichte lautet damit

$$\mathcal{L} = \psi^\dagger \left(i \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla^2 \right) \psi - \frac{g_2}{4} (\psi^\dagger \psi)^2 - \frac{g_3}{36} (\psi^\dagger \psi)^3. \quad (31)$$

Auch dies lässt sich in Störungsrechnung oder in Form einer Integralgleichung lösen, die in Abbildung 7 diagrammatisch dargestellt ist. Dabei entspricht der erste Summand einer zweifachen Zweiteilchen-Wechselwirkung, der zweite Summand

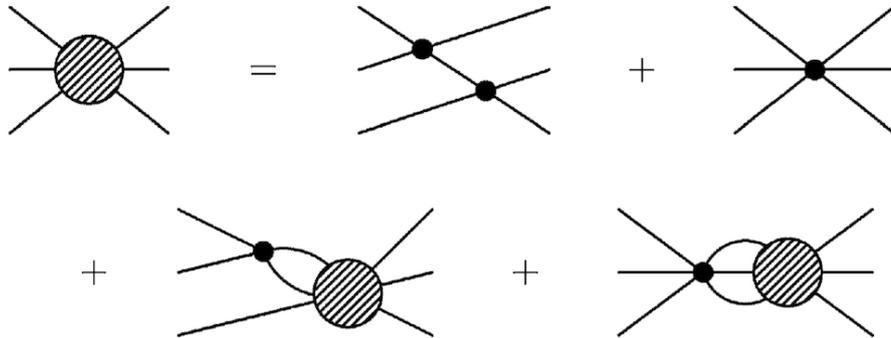


Abbildung 7: Diagrammatische Darstellung der Lippmann-Schwinger-Gleichung der Dreiteilchen-Amplitude [2, S. 350, Abb. 44]

einer Dreiteilchen-Wechselwirkung und in den anderen beiden Summanden findest sich die gesuchte Amplitude als Vertex wieder. Durch die hohe Anzahl an Variablen ist die Lösung der Integralgleichung in dieser Form aber nicht sehr effizient. Eine effizientere Methode stellt die Betrachtung der Lagrange-Dichte formuliert mit dem Diatom-Operator $d^{(\dagger)}$ dar, der gleichzeitig zwei Teilchen an einem Ort erzeugt bzw. vernichtet:

$$\mathcal{L} = \psi^\dagger \left(i \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla^2 \right) \psi + \frac{g_2}{4} d^\dagger d - \frac{g_2}{4} (d^\dagger \psi^2 + \psi^{\dagger 2} d) - \frac{g_3}{36} d^\dagger d \psi^\dagger \psi \quad (32)$$

In Abbildung 8 ist die aus dieser Lagrange-Dichte folgende Integralgleichung für die Dreiteilchen-Amplitude dargestellt. Die Doppellinien stellen dabei den Diatom-Propagator dar, der sich aus der Nutzung des Diatom-Operators ergibt. Durch diesen Trick können nun die Ergebnisse des analytisch lösbaren Zweikörper-Problems zur Lösung dieser Gleichung wiederverwendet werden. Dadurch ist eine effizientere Lösung des Dreikörper-Problems als ohne Diatom-Operator und eine Reproduktion aller bereits genannten universellen Dreikörper-Eigenschaften mit Hilfe der effektiven Feldtheorie möglich. Außerdem sind weitere universelle Korrelationen wie die bereits genannte Phillips-Linie mit Hilfe dieser Theorie erklärbar.

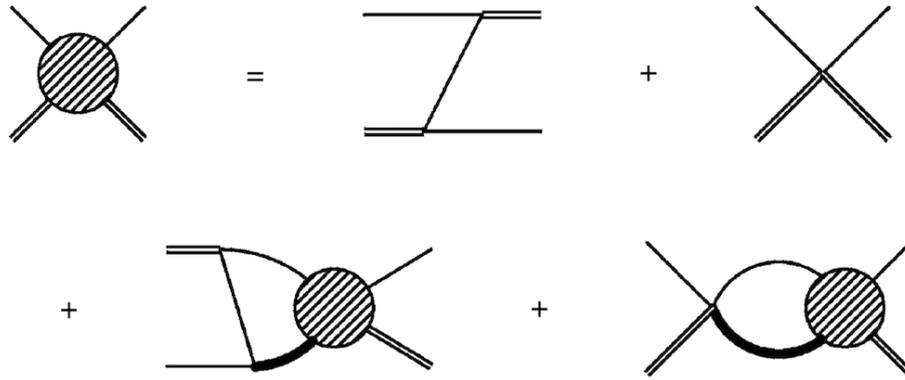


Abbildung 8: Diagrammatische Darstellung der Lippmann-Schwinger-Gleichung der Dreiteilchen-Amplitude mit Diatom-Propagatoren [2, S. 355, Abb. 48]

Experimentelle Beispiele

Ultrakalte Atome und Feshbach-Resonanz

Nach der theoretischen Vorhersage von Efimov 1970 erfolgte der erste experimentelle Nachweis eines Efimov-Zustandes 2006 durch Kraemer et al. bei der Untersuchung von ultrakalten ^{133}Cs -Atomen. Durch die Weiterentwicklung der verwendeten optischen Dipolfallen folgten weitere Nachweise von Efimov-Zuständen auch in anderen ultrakalten Gasen. Optische Dipolfallen beruhen dabei auf der Dipol-Kraft, die durch die elektromagnetischen Felder von eingestrahlenen Laserstrahlen auf die Atome wirkt und diese in Richtung der Intensitätsmaxima der Strahlprofile beschleunigt. Die Untersuchung der Efimov-Zustände macht es notwendig, die Streulänge als Parameter der Universalitätsklasse zu variieren. Dies ist durch die Nutzung einer Feshbach-Resonanz möglich.

Betrachtet wird dabei die Streuung zweier Teilchen, die in unterschiedlichen Spinkonfigurationen zu unterschiedlichen Gesamtspins koppeln können und dadurch zwei unterschiedliche Streukanäle mit den zugehörigen Wechselwirkungspotentialen besitzen. Diese beiden Potentiale sind in Abbildung 9 dargestellt. Das untere Potential ist dabei das untersuchte,

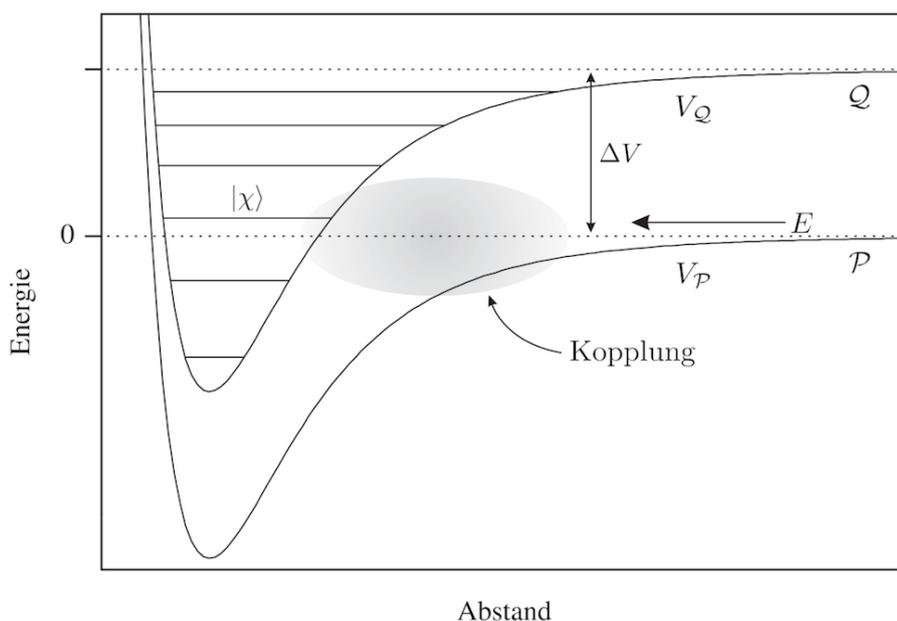


Abbildung 9: Darstellung des Mechanismus einer Feshbach-Resonanz durch resonante Kopplung eines Streukanals P mit einem gebundenen Zustand eines zweiten Kanals Q mit den zugehörigen Molekülpotentialen [4, S. 17, Abb. 3.1]

asymptotisch besetzte, ungebundene Streupotential. Das obere besitzt dagegen Bindungszustände, kann asymptotisch für Energien nahe der Dissoziationsgrenze des unteren Potentials aber nicht besetzt werden. Nahe der effektiven Reichweite der überlagernden Potentiale können nun aber Kopplungszustände entstehen, deren Mischung von der Differenz der Dissoziationsenergie der beiden Potentiale abhängt. Durch die unterschiedlichen Spinkonfigurationen besitzen die beiden Kanäle aber auch unterschiedliche magnetische Momente. Daher kann die Differenz der Dissoziationsenergien aufgrund des Zeeman-Effektes durch ein externes Magnetfeld beeinflusst werden. Dadurch verändert sich die Mischung der Zustände und somit auch die Streulänge, wie in Abbildung 10 dargestellt. Denn wenn die Dissoziationsenergie des Streupotentials mit der Energie eines Bindungszustandes des unbesetzten Potentials übereinstimmt, entsteht eine Resonanz und die Streulänge divergiert.

Diesen Mechanismus nutzten nun auch zwei Arbeitsgruppen um Tung in Chicago und Ulmanis in Heidelberg, um erstmals

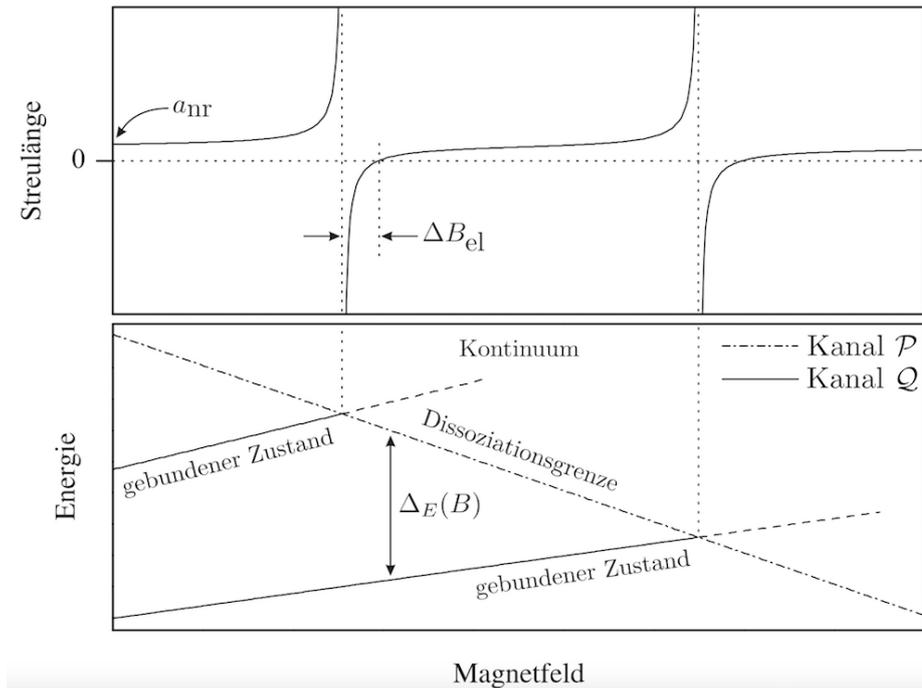


Abbildung 10: Verlauf der Streulänge (oben) und der Dissoziationsgrenze des Streukanals und der Energie gebundener Zustände des zweiten Kanals (unten) in Abhängigkeit des äußeren Magnetfeldes [4, S. 18, Abb. 3.2]

drei aufeinanderfolgende Efimov-Zustände in einem ultrakalten Gas nachzuweisen. Sie untersuchten dazu die zeitliche Änderung der Anzahl der Atome in einer optischen Dipolfalle in Abhängigkeit von einem externen Magnetfeld und somit bedingt durch den Feshbach-Mechanismus in Abhängigkeit von der Zweiteilchen-Streulänge. Das untersuchte Gas war ein ${}^6\text{Li}\text{-}^{133}\text{Cs}$ -Gemisch, das nach der theoretischen Vorhersage Efimov-Zustände aus einem Lithium-Atom und zwei Caesium-Atomen mit einer Skalenkonstante von $\lambda \approx 4,8$ besitzt. Die Existenz von Efimov-Zuständen und die Skalenkonstante sind dabei abhängig von den Massenverhältnissen und der Größe der Zweiteilchen-Streulängen der drei betrachteten Teilchen. Im Folgenden werden nun der Aufbau und die Ergebnisse der Heidelberger Publikation von 2016 [5] zusammengefasst.

In Abbildung 11 sind die verwendeten optischen Fallen schematisch dargestellt. Es handelt sich um zwei getrennte Potentiale für die beiden Atomsorten. Die Atome wurden nebeneinander durch jeweils zwei gekreuzte Laserstrahlen eingefangen, die Caesium-Atome in der Reservoir-Falle und die Lithium-Atome in der Dimple-Falle, und die beiden Atomwolken wurden dann überlagert. Aufgrund des großen Massenunterschiedes war bei der Überlagerung ein weiterer Laser notwendig, um den Einfluss der Gravitation auf die Caesium-Atome auszugleichen. Die Messungen erfolgten bei Temperaturen von 450 nK und 120 nK. Denn umso niedriger die Temperatur ist, umso stärker ist der Grenzfall niedriger Energien erfüllt und umso näher kommt man somit der theoretischen Vorhersagen, doch umso schwieriger sind natürlich auch die experimentellen Begebenheiten. Zur Variation der Streulänge wurde wie bereits beschrieben ein externes Magnetfeld eingesetzt. Die genutzte Feshbach-Resonanz von Lithium-Caesium-Streuung lag dabei bei $(842,829 \pm 0,023)$ G. In Abbildung 12 sind die Ergebnisse in Form der Dreikörper-Rekombinationsrate dargestellt. Die Position der Feshbach-Resonanz ist dabei als vertikale gepunktete schwarze Linie dargestellt. Die graue Schraffierung entspricht der Unsicherheit der Position.

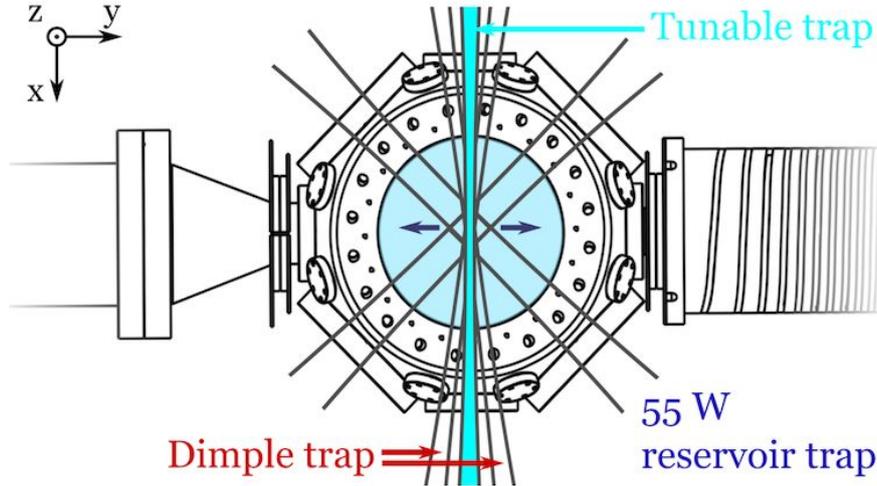


Abbildung 11: Anordnung der optischen Dipol-Fallen: Reservoir-Falle für Caesium-Atome, Dimple-Falle für Lithium-Atome und ein durchstimmbarer Laser zum Ausgleich des Gravitationseinflusses [6, S. 62, Abb. 3.6]

Gemessen wurde, wie bereits genannt, die zeitabhängige Anzahl der Atome in der Falle pro untersuchter magnetischer Feldstärke des externen magnetischen Feldes. Mit Hilfe der Ratengleichungen

$$\dot{N}_{\text{Li}} = -\mathcal{L}_1^{\text{Li}} N_{\text{Li}} - \mathcal{L}_3 N_{\text{Li}} N_{\text{Cs}}^2 \quad (33)$$

$$\dot{N}_{\text{Cs}} = -\mathcal{L}_1^{\text{Cs}} N_{\text{Cs}} - \mathcal{L}_3 N_{\text{Li}} N_{\text{Cs}}^2 - \mathcal{L}_3^{\text{Cs}} N_{\text{Cs}}^3 \quad (34)$$

wurde die Dreikörper-Rekombinationsrate ermittelt. Die restlichen Rekombinationsraten wurden dabei durch zusätzliche Experimente bestimmt. Dies sind einerseits die Ein-Atom-Verluste in der Falle und andererseits die Kombination von drei Caesium-Atomen zu einem Molekül. Die vertikalen Fehlerbalken der in der Abbildung eingezeichneten Messpunkte stammen aus den Fehlern dieser Fits an die gemessenen Atomanzahlen. Die horizontalen Fehlerbalken geben dagegen die Unsicherheiten bei der Bestimmung des externen magnetischen Feldes wieder. Bei den Messungen bei 120 nK und hohen magnetischen Feldstärken bilden die Datenpunkte nur noch eine Obergrenze, da dabei andere Rekombinationsvorgänge überwiegen und die Fitprozedur nicht mehr ausreichend ist. Als Vergleichswert dient die durch die zero-range-Theorie vorhergesagte Dreikörper-Rekombinationsrate, die mit zwei Fitparametern an die skalierten Datenpunkte angepasst wurde. Diese ist abhängig von der Efimov-Skalenkonstanten, aber auch von der Temperatur und der Position der Feshbach-Resonanz. Durch die Fehler dieser Größen kommen auch die durch Schraffierung dargestellten Abweichungen der Fits zustande.

Bei beiden Messungen sind die ersten beiden angeregten Efimov-Zustände bei $\approx 843,8 \text{ G}$ und $\approx 843,0 \text{ G}$ als Maxima zu erkennen. Bei der Messung bei niedrigerer Temperatur entsprechend der Erwartung deutlicher als bei höherer Temperatur. Allerdings zeigen die Datenpunkte der Messung bei 450 nK auch noch den Efimov-Grundzustand bei $\approx 848,9 \text{ G}$. Die gefitteten Theoriewerte unterscheiden sich in diesem Bereich aber deutlich von den experimentellen Werten. Dies wird im Paper durch die Tatsache begründet, dass sich die Streulänge in diesem Bereich bereits in der Größenordnung der effektiven Reichweite des van der Waals-Potentials der Streuung befindet und der Grundzustand daher keinen reinen universellen Charakter aufweist.

Die experimentell ermittelten Skalenkonstanten lagen für die beiden angeregten Zustände ungefähr bei 5, also unter Beachtung der experimentellen Unsicherheiten durchaus in Übereinstimmung mit der theoretischen Vorhersage. Unter Einbeziehung des Grundzustandes war der Wert mit $\approx 5,5$ allerdings etwas höher. Auch dies ist ein Hinweis auf das nichtuniverselle Verhalten des Grundzustandes.

Halo-Kerne

Eine weiteres kernphysikalisches System, das universelle Eigenschaften aufweist, sind sogenannte Halo-Kerne. Diese bestehen aus einem stark gebundenen Kern, dessen Struktur keinen Einfluss auf die universellen Eigenschaften hat, und einem oder mehreren schwach gebundenen Valenznukleonen. Der kleinste Zweikörper-Halo-Kern ist das bereits genannte Deuteron. Beispiele für Dreikörper-Halo-Kerne sind die am meisten untersuchten Halos ${}^6\text{He}$ und ${}^{11}\text{Li}$. Beide zeigen universelle Eigenschaften, besitzen aber Partialwellen-Anteile höherer Ordnung, so dass deren Bindungszustände keine Efimov-Zustände darstellen. Ein Kandidat für solche Efimov-Zustände ist allerdings der Halo-Kern ${}^{22}\text{C}$. Er besitzt reine

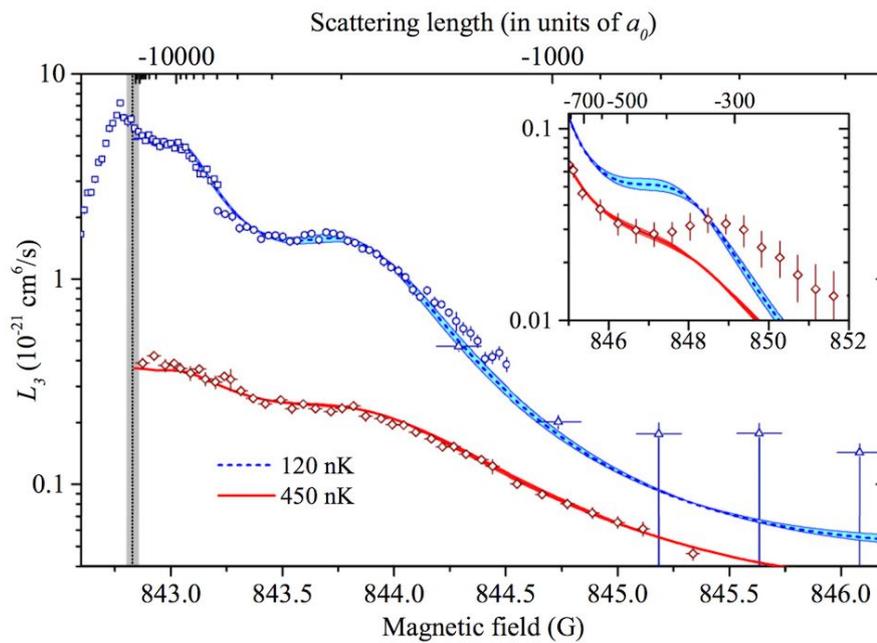


Abbildung 12: Li-Cs-Cs-Dreikörper-Rekombinationsrate bei 450 nK (rot) und 120 nK (blau). Experimentelle Daten mit gefittetem theoretischen Verlauf. Die gepunktete schwarze Linie mit grauem Fehlerbereich kennzeichnet die Position der Feshbach-Resonanz [5, S. 4, Abb. 3]

S-Wellen-Bindungszustände der Valenznucleonen und dessen Grundzustand ist theoretisch bereits als Efimov-Zustand beschrieben, der experimentelle Nachweis steht allerdings noch aus. Alle genannten Dreikörper-Halo-Kerne haben aber noch eine gemeinsame Eigenschaft. Es handelt sich bei ihnen um

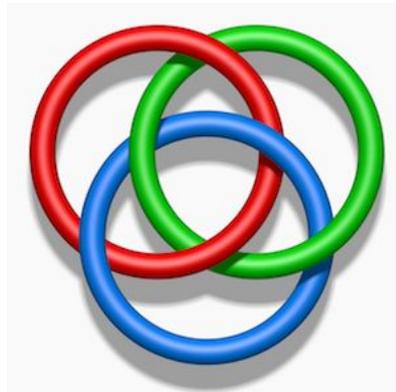


Abbildung 13: Borromäische Ringe [8]

sogenannte „borromäische“ Halo-Kerne, d.h. die Zweikörper-Subsysteme dieser Kerne besitzen keine gebundenen Zustände. Der Name der Kerne stammt von der italienischen Adelsfamilie der Borromäer. Denn deren Familienwappen, die sogenannten borromäischen Ringe (s. Abb. 13), hat genau die gleiche Eigenschaft: Entfernt man einen der drei Ringe, sind die anderen beiden auch nicht mehr verbunden. Diese Ringe werden daher auch häufig als Symbol für Halo-Kerne benutzt. Die Eigenschaft lässt sich aber auch auf einen Teil der Efimov-Zustände verallgemeinern. Denn alle Efimov-Bindungszustände mit negativer Streulänge, also im dritten Quadranten des in Abbildung 5 dargestellten Efimov-Spektrums, haben ebenfalls keine gebundenen Subsysteme, denn nur im vierten Quadranten kommt es zu Atom-Dimer-Streuung. Somit sind diese Zustände ebenfalls borromäische Zustände.

Literaturverzeichnis

- [1] Wikipedia-Artikel zur Universalität aufgerufen am 31.05.2016 um 16:30 Uhr,
[https://de.wikipedia.org/wiki/Universalität_\(Physik\)](https://de.wikipedia.org/wiki/Universalität_(Physik))
- [2] E. Braaten, H.-W. Hammer, Universality in few-body systems with large scattering length, Phys. Rep. 428 (2006) 259-390
- [3] H.-W. Hammer, L. Platter, Efimov States in Nuclear and Particle Physics, Annu. Rev. Nucl. part. Sci. 2010. 60:207-36
- [4] A. Marte, Feshbach-Resonanzen bei Stößen ultrakalter Rubidiumatome, Dissertation, TU München, 2003
- [5] J. Ulmanis et al, Universal three-body recombination and Efimov resonances in an ultracold Li-Cs mixture, Phys. Rev. A 93, 022707 (2016)
- [6] J. Ulmanis, Universality and non-universality in the heteronuclear Efimov scenario with large mass imbalance, Dissertation, Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg, 2015
- [7] S.-K. Tung et al, Geometric Scaling of Efimov States in a ${}^6\text{Li}$ - ${}^{133}\text{Cs}$ Mixture, Phys. Rev. Lett. 113, 240402 (2014)
- [8] Borromäische Ringe:
https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/5/5a/Borromean_Rings_Illusion.png