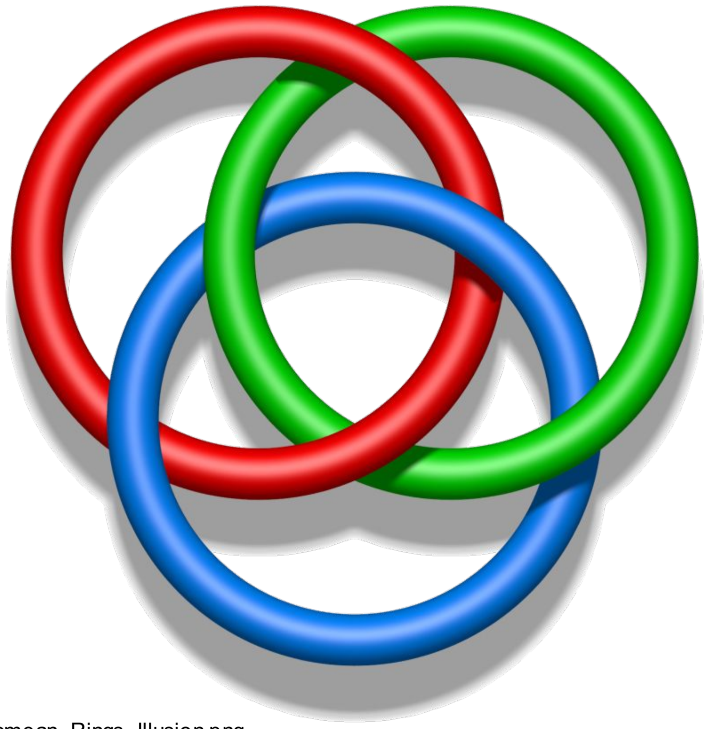
Universalität in der Kernphysik

Seminar-Vortrag von Thilo Egenolf



https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/5/5a/Borromean_Rings_Illusion.png

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Inhalt

- Bedeutung von Universalität
  - Allgemeines Beispiel
  - In der Kernphysik
- Theoretische Beschreibung
  - Hypersphärisches Modell
  - Effektive Feldtheorie
- Experimentelle Beispiele
  - Ultrakalte Atome und Feshbach-Resonanz
  - Halo-Kerne

Universalität

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

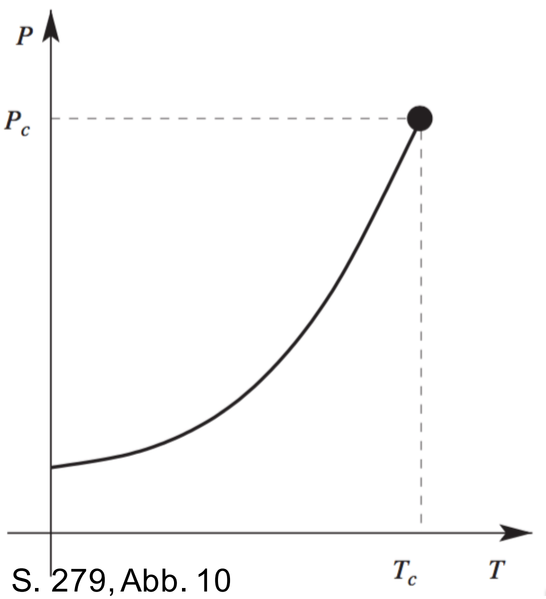
Wikipedia: „Universalität bezeichnet in der Statistischen Mechanik die Tatsache, dass gewisse Eigenschaften gewisser Klassen von Systemen nicht von allen Systemdetails abhängen: Vertreter einer Universalitätsklasse zeigen quantitativ dasselbe Verhalten (identische universelle Größen), obwohl sie im Detail einen unterschiedlichen Aufbau oder eine unterschiedliche Dynamik aufweisen.“ [1]

Systemparameter

Kritischer Exponent

Observable A nahe eines Phasenübergangs: $A = A_0 \cdot \|\beta - \beta_c\|^\alpha$

Kritischer Punkt



[2], S. 279, Abb. 10

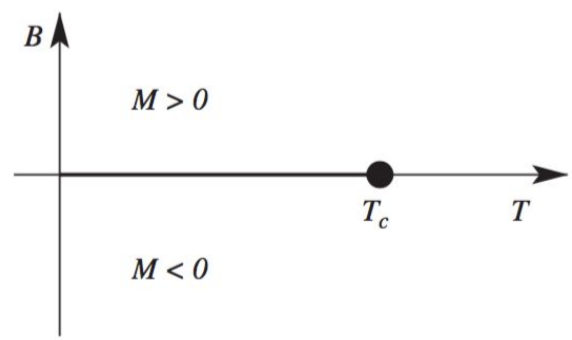
Übergang flüssig – gasförmig:

$$\rho_{\text{liq}}(T) - \rho_c \to +A(T_c - T)^\alpha$$
$$\rho_{\text{gas}}(T) - \rho_c \to -A(T_c - T)^\alpha$$

Ferromagnetisches Material:

$$M_0(T) \to A'(T_c - T)^\alpha$$

Für beide Systeme:
$\alpha = 0{,}325$



[2], S. 280, Abb. 11

Universalität in der Kernphysik

Betrachtung von Streuung im Grenzfall niedriger Energien, d.h. Energien nahe der Dissoziationsgrenze

↳ De Broglie-Wellenlänge $\lambda = {}^{2\pi\hbar}/_{p}$ ist groß gegenüber Reichweite der Wechselwirkungen

- Streuung zweier Teilchen ist bestimmt durch die S-Wellen-Streuung, beschrieben durch die Streulänge a

- Alle Eigenschaften der Streuung sind in erster Ordnung bestimmt durch einen Parameter – die Streulänge – und unabhängig von der Reichweite r_0 und anderen Details der kurzreichweitigen Wechselwirkung

  z.B. gibt es für zwei Teilchen gleicher Masse einen gebundenen Zustand mit Bindungsenergie $E_D = {}^{\hbar^2}/_{ma^2}$ und Korrekturen mit der Ordnung ${}^{r_0}/_{a}$

⇨ **Universalität**

Zweikörper- und Dreikörper-Zustände

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Bekanntes Beispiel für Zweikörpersystem: Deuteron

- Streuung zweier Nukleons mit unterschiedlichem Isospin
- Zwei Streulängen und effektive Reichweiten für NN-Streuung:
  - $a_s = -23{,}76\ \mathrm{fm}$ und $r_s = 2{,}75\ \mathrm{fm}$ für Isospin-Triplet $^1S_0$
  - $a_t = 5{,}42\ \mathrm{fm}$ und $r_t = 1{,}76\ \mathrm{fm}$ für Isospin-Singlet $^3S_1$
- Gebundener Zustand ist Isospin-Singlet $^3S_1$ mit Bindungsenergie $E_D = 2{,}225\ \mathrm{MeV}$
  - ➢ vergleichbar mit universeller Vorgabe $\hbar^2/ma_t^2 = 1{,}4\ \mathrm{MeV}$

[2], S. 274

Grenzfall $\boldsymbol{a} \to \pm\infty$

- Universeller gebundener Zweikörper-Zustand bleibt bei $E = 0$ bestehen
- Bei **Dreikörper-System** dagegen unendlich viele gebundenen Zustände
  - Häufungspunkt bei $E = 0$
  - Verhältnis der Bindungsenergien zweier aufeinanderfolgender Zustände ist konstant
    - ➢ Diskrete Skalensymmetrie, die zusätzlichen Parameter erfordert
    - ➢ Erweiterung des Universalitäts-Begriffs auf zwei Parameter

➡ **Efimov-Effekt**, 1970 entdeckt von Vitaly Efimov für drei identische Bosonen

Hypersphärische Koordinaten

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

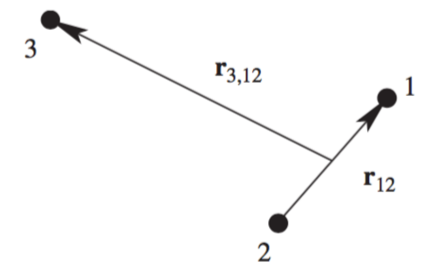
Schrödinger-Gleichung: $\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\sum_{i=1}^{3}\nabla_i^2 + V(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_3)\right)\Psi = E\Psi$

↳ Umformulieren in Abhängigkeit von hypersphärischen Koordinaten

1. Schritt: Jacobi-Koordinaten:

Beschreibung der Position der drei Teilchen gleicher Masse zueinander

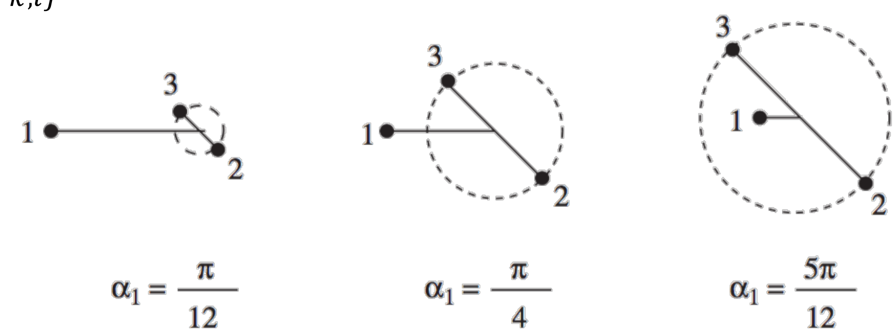
$$\boldsymbol{r}_{ij} = \boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j, \qquad \boldsymbol{r}_{k,ij} = \boldsymbol{r}_k - \frac{1}{2}(\boldsymbol{r}_i + \boldsymbol{r}_j)$$



2. Schritt: Hypersphärische Größen:

Hyperradius $R = \sqrt{\frac{1}{3}(r_{12}^2 + r_{23}^2 + r_{31}^2)} = \sqrt{\frac{1}{2}r_{ij}^2 + \frac{2}{3}r_{k,ij}^2}$

Hyperwinkel $\alpha_k = \arctan\left(\frac{\sqrt{3}r_{ij}}{2r_{k,ij}}\right)$



➡ **6 unabhängige Koordinaten:**

R, α_k, und jeweils zwei Winkel der Einheitsvektoren $\hat{\boldsymbol{r}}_{ij}$ und $\hat{\boldsymbol{r}}_{k,ij}$

[2], S. 292, Abb. 18 & 19

Schrödinger-Gleichung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

$$\left(T_R + T_{\alpha_k} + \frac{\Lambda_{k,ij}^2}{2mR^2} + V(R,\Omega)\right)\Psi = E\Psi \quad \text{mit} \quad \left\{ \begin{aligned} T_R &= -\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{5}{R}\frac{\partial}{\partial R}\right] \\ T_{\alpha_k} &= -\frac{\hbar^2}{2mR^2}\left[\frac{\partial^2}{\partial {\alpha_k}^2} + 4\cot(2\alpha_k)\frac{\partial}{\partial \alpha_k}\right] \\ \Lambda_{k,ij}^2 &= \frac{\boldsymbol{L}_{ij}^2}{\sin^2\alpha_k} + \frac{\boldsymbol{L}_{k,ij}^2}{\cos^2\alpha_k} \end{aligned} \right.$$

Potentialansatz:

$$V(R,\Omega) = V(r_{12}) + V(r_{23}) + V(r_{31})$$

Fadeev-Zerlegung:

$$\Psi(R,\alpha,\Omega) = \Psi(R,\alpha_1) + \Psi(R,\alpha_2) + \Psi(R,\alpha_3)$$

Niederenergie-Fadeev-Gleichung:

$$(T_R + T_\alpha - E)\Psi(R,\alpha) = -V\left(\sqrt{2}R\sin\alpha\right)\left[\Psi(R,\alpha) + \frac{4}{\sqrt{3}}\int_{|(1/3)\pi-\alpha|}^{(1/2)\pi-|(1/6)\pi-\alpha|} \frac{\sin(2\alpha')}{\sin(2\alpha)}\Psi(R,\alpha')d\alpha'\right]$$

Entwicklung der Wellenfunktion in Hyperwinkelfunktionen:

$$\Psi(R,\alpha) = \frac{1}{R^{5/2}\sin(2\alpha)}\sum_n f_n(R)\Phi_n(R,\alpha)$$

Lösung der Eigenwert-Gleichung

Teilung des Problems und Umformulierung der Niederenergie-Fadeev-Gleichung:

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}-\lambda_n(R)\right]\Phi_n(R,\alpha)=-\frac{2mR^2}{\hbar^2}V\left(\sqrt{2}R\sin\alpha\right)\left[\Phi_n(R,\alpha)+\frac{4}{\sqrt{3}}\int_{|(1/3)\pi-\alpha|}^{(1/2)\pi-|(1/6)\pi-\alpha|}\Phi_n(R,\alpha')d\alpha'\right]$$

↳ analytisch lösbar in zwei Grenzfällen:

1. $R\sin\alpha$ groß gegenüber Potentialreichweite

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}-\lambda_n(R)\right]\Phi_n^{(hi)}(R,\alpha)\approx 0\Longrightarrow \boldsymbol{\Phi_n^{(hi)}(R,\alpha)\approx\sin\left[\lambda_n^{1/2}(R)\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right]}$$

2. $R\sin\alpha$ klein, so dass $\lambda_n(R)$ klein gegenüber $V\left(\sqrt{2}R\sin\alpha\right),\alpha\ll 1$

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}+\frac{2mR^2}{\hbar^2}V\left(\sqrt{2}R\alpha\right)\right]\Phi_n^{(lo)}(R,\alpha)\approx-\frac{2mR^2}{\hbar^2}V\left(\sqrt{2}R\alpha\right)\frac{8\alpha}{\sqrt{3}}\Phi_n^{(hi)}\left(R,\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Longrightarrow\boldsymbol{\Phi_n^{(lo)}(R,\alpha)\approx A(R)\Psi_0\left(\sqrt{2}R\sin\alpha\right)-\frac{8\alpha}{\sqrt{3}}\Phi_n^{(hi)}\left(R,\frac{\pi}{3}\right)}$$

Lösung der Zweikörper-Schrödinger-Gleichung
$\Psi_0\left(\sqrt{2}R\sin\alpha\right)\to\sqrt{2}R\sin\alpha-a$ für $k\to 0$

↳ Matching der Lösungen für $\alpha=0$:

$$\Longrightarrow \mathrm{A}(R)=-\sin\left[\lambda_n^{1/2}(R)\frac{\pi}{2}\right]\frac{1}{a}$$

$$\Longrightarrow\boldsymbol{\cos\left(\lambda_n^{1/2}(R)\frac{\pi}{2}\right)-\frac{8}{\sqrt{3}}\lambda_n^{-1/2}\sin\left(\lambda_n^{1/2}(R)\frac{\pi}{6}\right)\xrightarrow[\alpha\to\pm\infty]{}0}$$

Lösung der Eigenwert-Gleichung

Einzige negative numerische Lösung:

$$\boldsymbol{\lambda_0(R) \xrightarrow[\alpha\to\pm\infty]{} -s_0^2, \text{mit } s_0 = 1,00624\ldots}$$

Nur für diesen Eigenwert ist das Potential in der hyperradialen Gleichung attraktiv

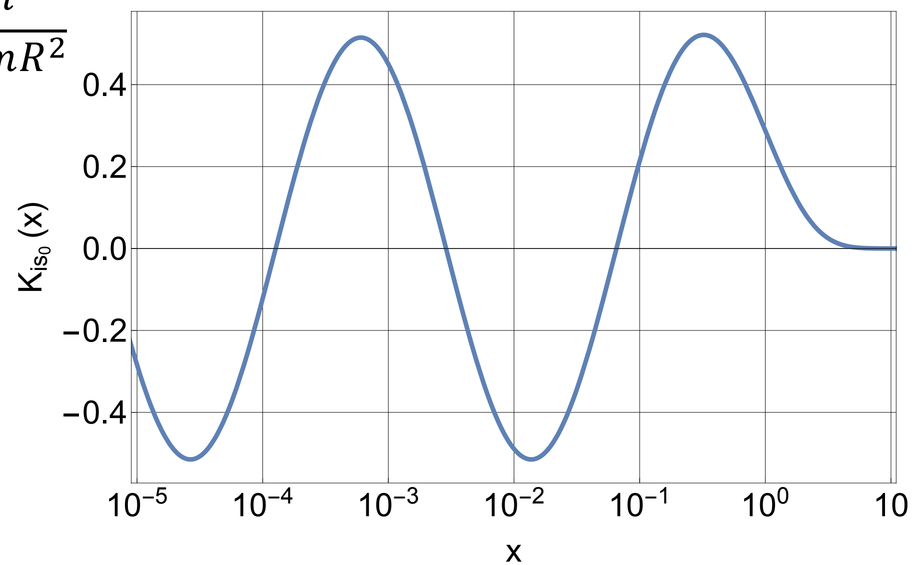
$$V_0(R) = (\lambda_0(R) - 4)\frac{\hbar^2}{2mR^2} \to -(s_0^2 + 4)\frac{\hbar^2}{2mR^2}$$

Die hyperradiale Gleichung lautet damit

$$\frac{\hbar^2}{2m}\left(-\frac{\partial^2}{\partial R^2} - \frac{s_0^2 + \frac{1}{4}}{R^2}\right) f_0(R) = E f_0(R)$$

mit der Lösung $\boldsymbol{f_0(R) = R^{1/2} K_{is_0}(\sqrt{2}\kappa R)}$

mit $\kappa = \sqrt{\frac{|E|m}{\hbar^2}}$



Potential ist für $R \to 0$ nicht begrenzt

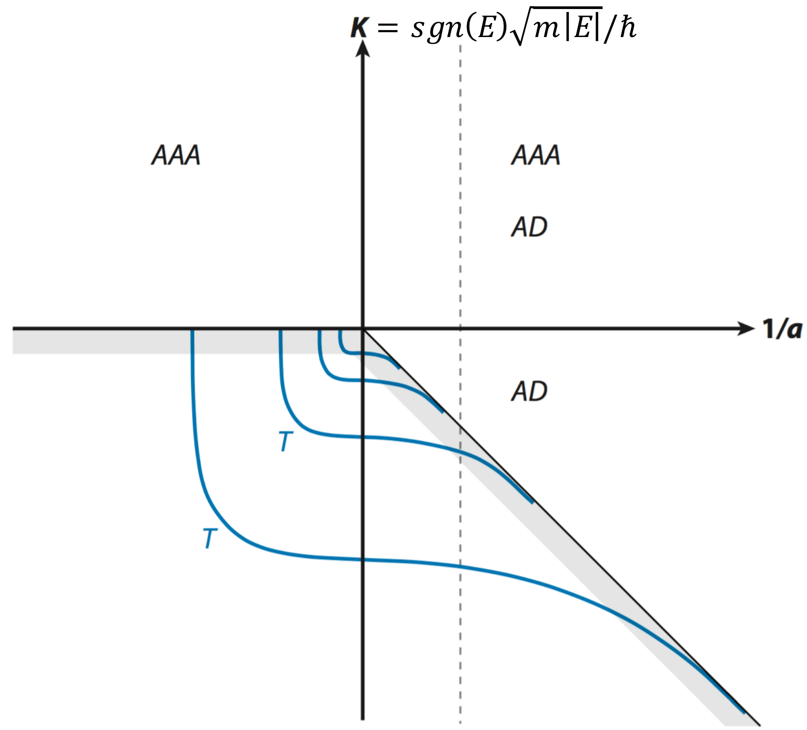
Zusätzliche Informationen über kurzreichweitiges Verhalten sind notwendig

Logarithmische Ableitung $\frac{R_0 f_0'(R_0)}{f_0(R_0)}$ wird für kleinen Hyperradius $R_0 > 0$ festgelegt

Efimov-Spektrum

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Gebundene Zustände mit Bindungsenergie $E_T^{(n)} = \left(e^{-2\pi/s_0}\right)^{n-n_*} \frac{\hbar^2 \kappa_*^2}{m}$
- Diskrete Skalensymmetrie mit Skalenkonstante $\lambda = e^{\pi/s_0} \approx 22{,}7$
  - $E_T^{(n)} = \lambda^{-2} E_T^{(n-1)}$ für $a \to \pm\infty$
  - Gilt auch für endliche Streulängen bis auf Korrekturen der Ordnung $\left({}^{r_0}/_{a}\right)^2$
  - Die Streulänge skaliert ebenfalls mit λ
  - Andere Observablen zeigen auch die diskrete Skalensymmetrie, z.B. der Atom-Dimer-Wirkungsquerschnitt: $\sigma_{AD}(\lambda^{-2m} E, \lambda^m a, \kappa_*) = \lambda^{2m} \sigma_{AD}(E, a, \kappa_*)$

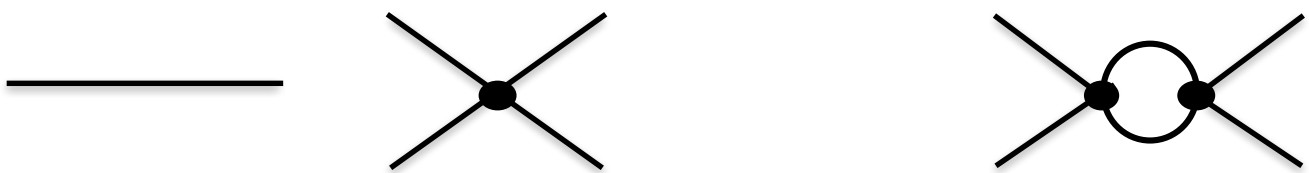


[3], S. 213, Abb. 1

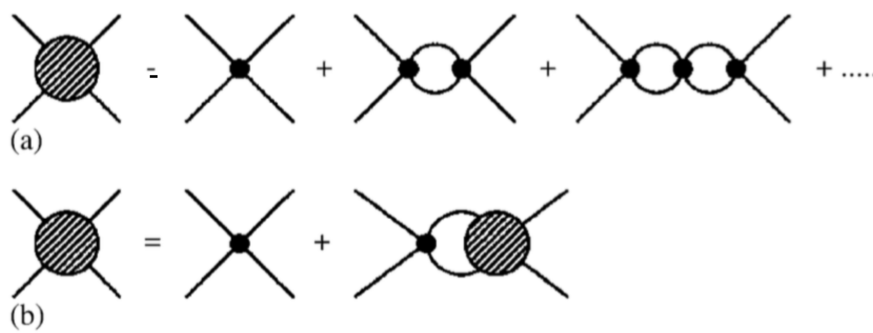
Effektive Feldtheorie: Zweikörper-Problem

Lagrange-Dichte: $\mathcal{L} = \psi^\dagger\left(i\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2}\nabla^2\right)\psi - \frac{g_2}{4}\left(\psi^\dagger\psi\right)^2,\ \hbar = 1,\ m = 1$

- Physikalische Informationen in $\langle 0|T\left(\psi\psi\psi^\dagger\psi^\dagger\right)|0\rangle$ im Ortsraum
- Feynman-Amplitude $\mathrm{i}\mathcal{A}$ im Impulsraum, berechenbar mit Feynman-Diagrammen



$\frac{i}{k_0 - \boldsymbol{k}^2/2 + i\varepsilon}$ $\qquad -ig_2 \qquad$ $\frac{g_2^2}{2}\int\frac{d^3q}{(2\pi)^3}\int\frac{dq_0}{2\pi}\frac{1}{q_0 - q^2/2 + i\varepsilon}\frac{1}{E - q_0 - q^2/2 + i\varepsilon}$

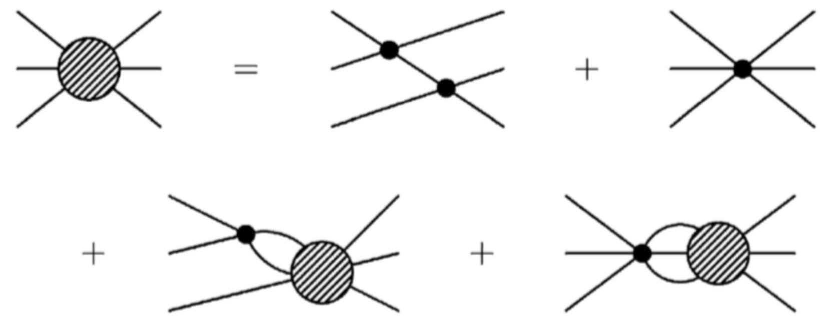


[2], S. 345, Abb. 40

Effektive Feldtheorie: Dreikörper-Problem

Lagrange-Dichte: $\mathcal{L} = \psi^\dagger\left(i\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2}\nabla^2\right)\psi - \frac{g_2}{4}\left(\psi^\dagger\psi\right)^2 - \frac{g_3}{36}\left(\psi^\dagger\psi\right)^3$

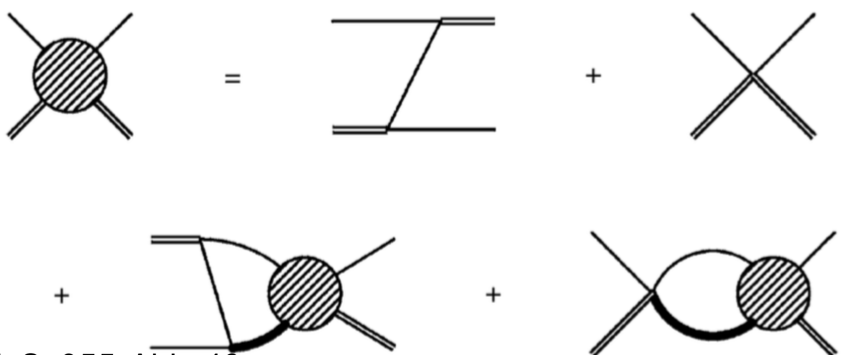
- Lösbar in Störungsrechnung ...
  oder als Integral-Gleichung:
  durch hohe Anzahl an Variablen
  aber nicht effizient



[2], S. 350, Abb. 44

- Stattdessen Lagrange-Dichte mit Diatom-Operator

$$\mathcal{L} = \psi^\dagger\left(i\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2}\nabla^2\right)\psi + \frac{g_2}{4}d^\dagger d - \frac{g_2}{4}\left(d^\dagger\psi^2 + {\psi^\dagger}^2 d\right) - \frac{g_3}{36}d^\dagger d\psi^\dagger\psi$$



[2], S. 355, Abb. 48

- Ergebnisse des Zweikörper-Problems wiederverwendbar
- Universelle Dreikörper-Eigenschaften sind aus Feynman-Amplitude reproduzierbar
- Weitere universelle Größen erklärbar

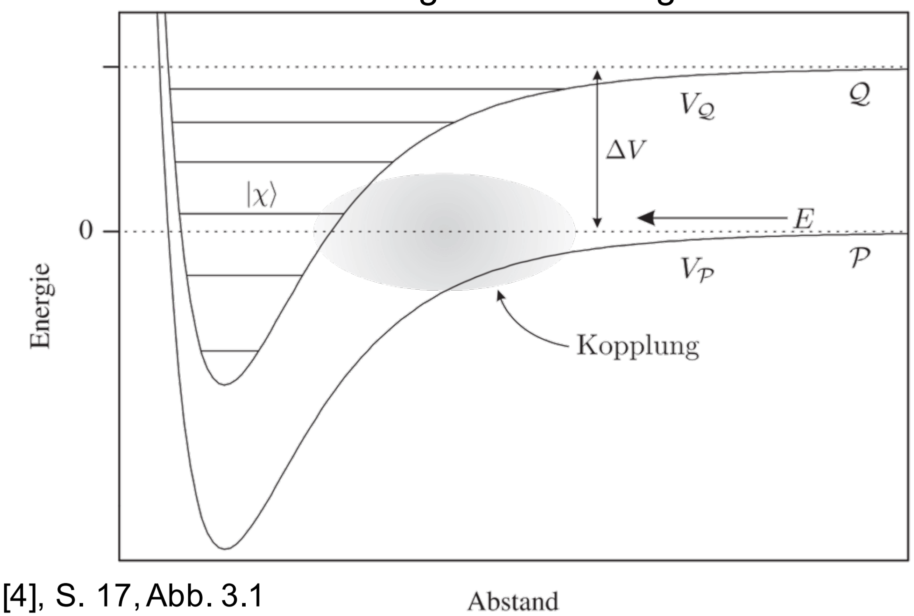
Ultrakalte Atome: Feshbach-Resonanz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

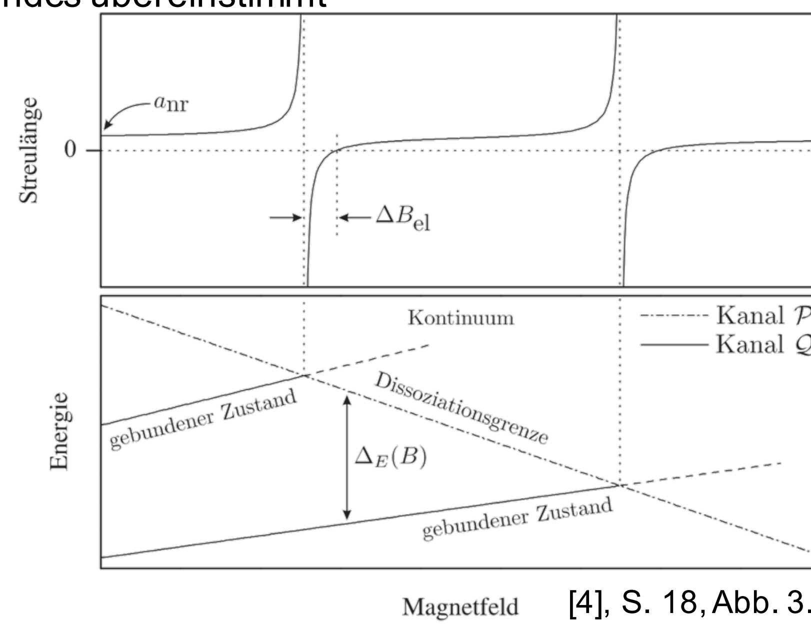
Ziel: Variation der Streulänge

↳ möglich durch **Feshbach-Resonanzen** von ultrakalten Atomen:

- Betrachtung von Mischzuständen aus gebundenem und ungebundenem Zustand unterschiedlicher Spinkonfigurationen
- Zeeman-Effekt: Veränderung der Lage gebundener Hyperfeinzustände relativ zur Stoßenergie durch ein externes Magnetfeld
- Streulänge divergiert, wenn die Energie des gebundenen Zustandes mit der Dissoziationsgrenze des ungebundenen Zustandes übereinstimmt



[4], S. 17, Abb. 3.1



[4], S. 18, Abb. 3.2

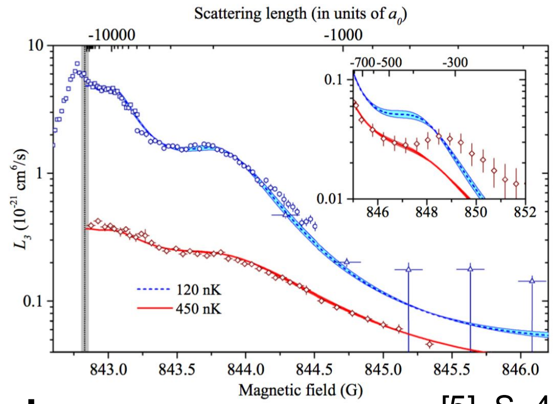
Ultrakalte Atome: Li-Cs-Gemisch

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

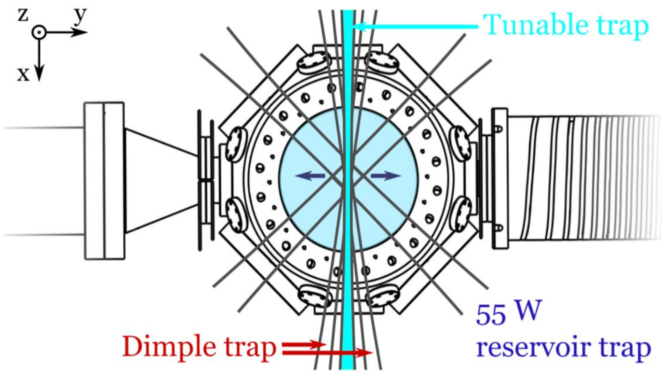
J. Ulmanis, S.Häffner, R. Pires, F. Werner, D.S. Petrov, E.D. Kuhnle und M. Weidmüller, Phys. Rev. A 93, 022707 (2016)

Experimenteller Aufbau

- Optische Dipol-Falle
- Zwei getrennte Potentiale für ^{6}Li und ^{133}Cs, die überlagert werden
- Messungen bei 450 nK und 120 nK
- Anlegen eines externen Magnetfeldes zur Nutzung der Feshbach-Resonanz



[5], S. 4, Abb. 3



[6], S. 62, Abb. 3.6

Ergebnisse:

- Bestimmung der 3-Körper-Rekombinationsrate aus Anzahl der Atome in der Falle

$$\dot{N}_{\mathrm{Li}} = -\mathcal{L}_1^{\mathrm{Li}} N_{\mathrm{Li}} - \mathcal{L}_3 N_{\mathrm{Li}} N_{\mathrm{Cs}}^2, \qquad \dot{N}_{\mathrm{Cs}} = -\mathcal{L}_1^{\mathrm{Cs}} N_{\mathrm{Cs}} - 2\mathcal{L}_3 N_{\mathrm{Li}} N_{\mathrm{Cs}}^2 - \mathcal{L}_3^{\mathrm{Cs}} N_{\mathrm{Cs}}^3$$

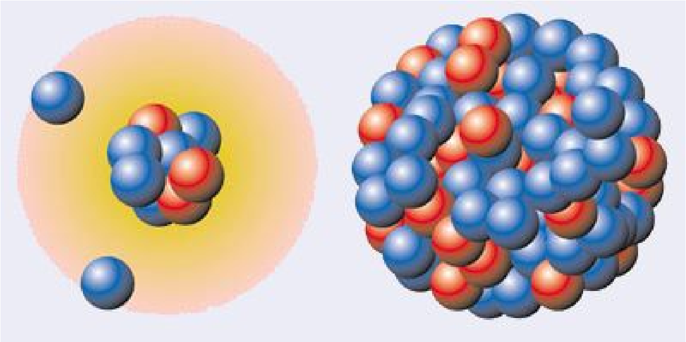
- Fit mit theoretischer Ableitung
- Ergebnisse zeigen ersten und zweiten angeregten Efimov-Zustand bei ≈843,8 G (-1800a_0) und ≈843,0 G (-9210a_0), theoretischer Efimov-Grundzustand bei ≈848,9 G

Halo-Kerne

- Bestehen aus stark gebundenem Kern umgeben von einem oder mehreren schwach gebundenen Valenznukleonen

- Zeigen universelle Eigenschaften unabhängig von der Struktur des Kerns

- Beispiele:
  - Deuteron: kleinster 2-Körper-Halo-Kern
  - 3-Körper-Halo-Kerne: ^{6}He, ^{11}Li und ^{22}C



^{11}Li ^{208}Pb [7]

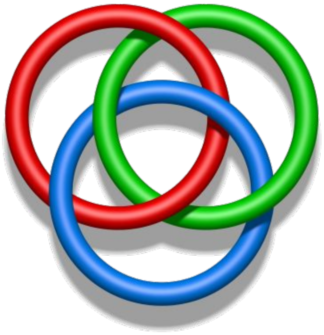
am meisten untersuchte Halos
Zeigen universelle Eigenschaften
Höhere Partialwellen-Anteile in den Bindungszuständen, daher keine Efimov-Zustände

S-Wellen-Bindungszustände der Valenz-Neutronen
Daher Kandidat für Efimov-Zustände

↳ Alle genannten 3-Körper-Halos besitzen keine gebundenen 2-Körper-Subsysteme: “Borromäische” Halo-Kerne

Zusammenfassung

- **Bedeutung von Universalität**
  - Universalitätsklasse: gleiches Verhalten trotz unterschiedlicher Systemdetails
  - Betrachtung in der Kernphysik im Grenzfall niedriger Energie und großer Streulängen
  - Zweikörper-Streuung nur von Streulänge abhängig, Dreikörper-Streuung mit zusätzlichem Parameter: Efimov-Effekt
- **Theoretische Beschreibung:**
  - Hypersphärisches Modell:
    - Lösung der Schrödinger-Gleichung in hypersphärischen Koordinaten
    - Efimov-Spektrum mit diskreter Skalensymmetrie mit Konstante $\lambda = e^{\pi/s_0} \approx 22{,}7$
  - Effektive Feldtheorie
    - Feynman-Amplitude: Darstellung als Summe aus Feynman-Diagrammen
    - Reproduktion der universellen Eigenschaften in Dreikörper-Problem, weitere universelle Ableitungen aus dieser Theorie möglich



- **Experimentelle Beispiele:**
  - Ultrakalte Gase:
    - Erster Nachweis eines Efimov-Zustandes in ^{133}Cs, weitere Nachweise folgten
    - 2014 bzw. 2016 erstmals drei aufeinanderfolgende Efimov-Zustände in Li-Cs-Gemisch nachgewiesen
  - Halo-Kerne:
    - Von Struktur der inneren Kerne unabhängige universelle Eigenschaften
    - Eventuelle Kandidaten für Efimov-Zustände

Quellen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

(1) https://de.wikipedia.org/wiki/Universalität_(Physik), 31.5.2016, 16:30

(2) E. Braaten, H.-W, Hammer, Universality in few-body systems with large scattering length, Phys. Rep. 428 (2006) 259-390

(3) H.W. Hammer, L. Platter, Efimov States in Nuclear and Particle Physics, Annu. Rev. Nucl. Part. Sci. 2010. 60:207-36

(4) A. Marte, Feshbach-Resonanzen bei Stößen ultrakalter Rubidiumatome, Dissertation, TU München, 2003

(5) J. Ulmanis et al, Universal three-body recombination and Efimov resonances in an ultracold Li-Cs mixture, Phys. Rev. A 93, 022707 (2016)

(6) J. Ulmanis, Universality and non-universality in the heteronuclear Efimov scenario with large mass imbalance, Dissertation, Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg, 2015

(7) http://images.iop.org/objects/ccr/cern/44/4/16/cernsup2_5-04.jpg, 31.5.2016
Cern Courier Mai 2004: „ISOLDE goes on the trail of superlatives“

(8) S.-K. Tung et al, Geometric Scaling of Efimov States in a ^{6}Li-^{133}Cs Mixture, Phys. Rev. Lett. 113, 240402 (2014)