Theoretische Physik I:

Vorlesung 10: Zentralkraft

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

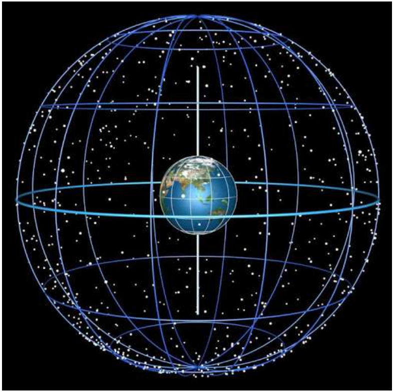
Anwendung: 2 Körper mit r-abhängiger Potentialenergie $V(r)$
Das wichtigste Beispiel ist die Himmelsbewegung.

- Planeten: Was wir sehen
- Kreise? Oder Ellipsen?
- Kepler'sche Gesetze
- Himmelsbewegung erklärt

Wir fangen mit ein bisschen Geschichte an....

2: Die festen Sterne

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT



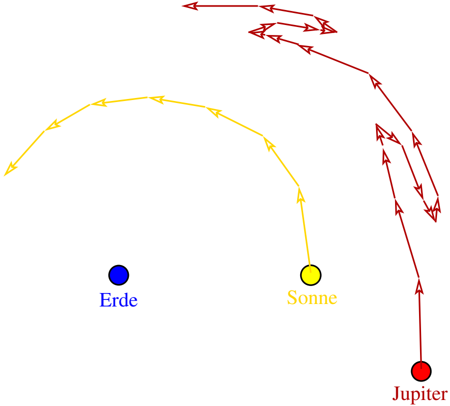
Die Sterne sind extrem weit weg.
Der Winkel zwischen zwei Sterne bleibt immer gleich
Ich kann die Sternen als *Hintergrund* und *Bezugssystem* verwenden
Richtungen sind relativ zu den Sternen

Relativ zu den Sternen dreht sich die Erde 366.25 mal im Jahr (*nicht 365.25*).
Die Sonne umkreist die Erde einmal im Jahr (plus 20 Minuten).
Der Mond umkreist die Erde jede 27.3 Tage (13,3 mal im Jahr).

3: Die Planeten

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Jupiter umkreist die Erde alle 11,86 Jahre. Aber er bewegt sich nicht regelmäßig!



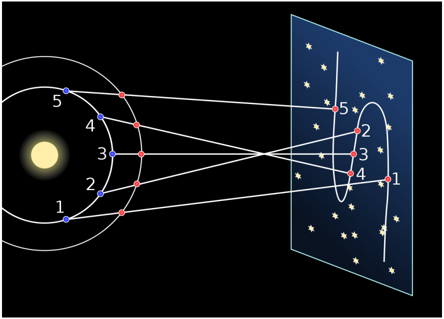
Die Sonne umkreist die Erde regelmäßig.
Jupiter nicht – er bewegt sich manchmal schneller, manchmal rückwärts.
(Die anderen Planeten auch)

Warum sind die Planeten so kompliziert?
Wie können sie sich rückläufig (retrograd) bewegen?

4: Copernicus

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Copernicus hat das erklärt:



Die Erde *und* Jupiter gehen beide um die Sonne.
Wir sehen die Bewegung von Jupiter und unsere eigene wechselnde Perspektive.

Die komplizierte Bewegung von Jupiter ist dadurch einfach erklärt.

5: Kepler

Tycho Brahe (1546 - 1601) arbeitete über Jahre, die relativen Koordinaten aller Sterne und die Bewegung der Planeten zu messen (ohne Teleskop!).

Als er starb, erbte Kepler (1571 - 1630) seine Daten.

Kepler wollte die Bewegung der Planeten vorhersagen, um astrologische Vorhersagen genauer zu machen.

Mit kreisförmigen Bahnen konnte er Brahes sehr genaue Daten nicht genau einpassen.

Er fand, dass die Bahnen der Planeten eher Ellipsen sein müssen.

6: Kepler'sche Gesetze

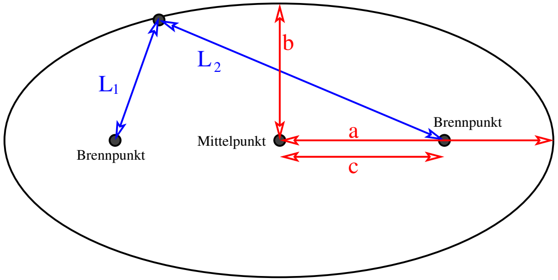
Kepler konnte alle Planetbahnen mit Hilfe der folgenden Gesetze beschreiben:

1. **Kepler 1:** Die Planeten bewegen sich auf elliptischen Bahnen. In einem ihrer Brennpunkte steht die Sonne.
2. **Kepler 2:** Ein von der Sonne zum Planeten gezogener Fahrstrahl überstreicht in gleichen Zeiten gleich große Flächen;
3. **Kepler 3:** $T^2 \propto a^3$ die Quadrate der Umlaufzeiten T zweier Planeten verhalten sich wie die Kuben der großen Bahnhalbachsen a.

Die Keplerschen Gesetze waren empirisch. Sie basierten auf passenden Daten, nicht auf einem theoretischen Prinzip.

Aber wir können sie jetzt mit Hilfe der klassischen Mechanik beweisen.

7: Wiederholung von Ellipsen



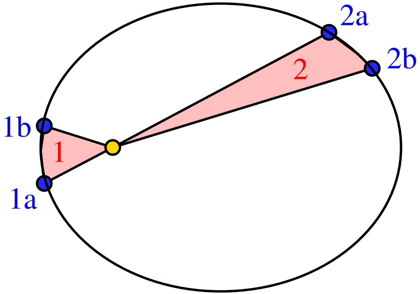
Mittelpunkt m
Zwei Brennpunkte f_1, f_2
große Bahnhalbachse a
kleine Bahnhalbachse b

Ellipse: Alle Punkte, wobei $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Wir nennen $c^2 \equiv a^2 - b^2$ und die *Ellipticität* $e \equiv c/a$.
Die Brennpunkte sind auf der großen Bahnachse, eine Weite $\pm c$ von dem Mittelpunkt entfernt. Die Ellipse sind alle Punkte, wobei

$$L_1 + L_2 = 2a \qquad \text{Oder} \qquad r(\varphi) = \frac{a^2 - c^2}{a - c\cos(\varphi)} \quad \text{(um einem Brennpunkt)}$$

Ein von der Sonne zum Planeten gezogener Fahrstrahl überstreicht in gleichen Zeiten gleich große Flächen



Die Sonne sitzt in einem Brennpunkt
Die Erde fährt ihre Bahn entlang
Wie lange dauert es,
von Punkt 1*a* bis Punkt 1*b* zu fahren?
Und wie lange von 2*a* bis 2*b*?

Die Zeit ist proportional zu der Fläche. Die Fläche, die ich mit “1” oder “2” gekennzeichnet habe, ist die für die Reisezeit relevante Fläche.

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{\Delta t_{1a,1b}}{\Delta t_{2a,2b}} \quad \text{, und deshalb} \quad \frac{A_1}{A_{\text{gesamt}}} = \frac{\Delta t_{1a,1b}}{T}$$

Hier ist T die Gesamtzeit, um einmal die Bahn entlang zu fahren.

9: Koordinaten

Wir sollen Kugelkoordinaten benutzen, mit der Sonne als Ursprung.
Welche Richtung sollen wir als z-Achse benutzen?

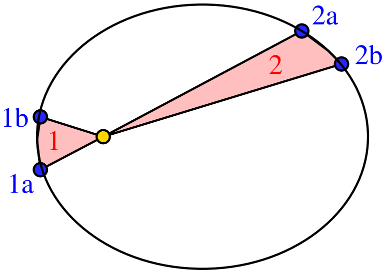
$\Rightarrow$ Wir sollten die Ellipse in der x, y oder $\theta = \pi/2$ oder $z = 0$ Ebene platzieren.

Oder (equivalent): wir sollten $\vec{L} \parallel \hat{e}_z$ platzieren.

Wenn wir das machen, sind die θ-Anfangswerte $\theta = \pi/2$ und $\dot{\theta} = 0$.
Wir werden denn finden: $\ddot{\theta} = 0$ und deshalb $\theta(t) = \pi/2$ für alle Zeiten.

Jetzt haben wir nur r, φ zu betrachten.

10: Kepler 2, erklärt



Für infinitesimalen Zeitunterschied ist die Fläche

$$A = \frac{r^2}{2}\delta\varphi = k\delta t$$

mit k eine Konstante.
Umorganisieren:

$$\frac{\delta\varphi}{\delta t} \Rightarrow \frac{d\varphi}{dt} = \frac{2k}{r^2}$$

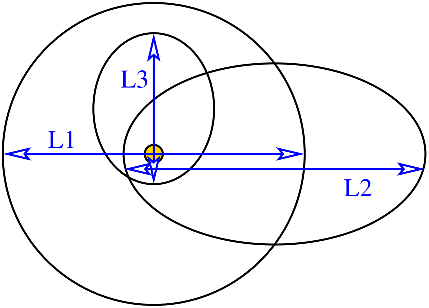
oder besser:

$$r^2\dot{\varphi} = 2k = p_\varphi$$

Bemerkung: $\theta = \pi/2$. Deshalb ist $r^2\dot{\varphi}$ wirklich $r^2 \sin^2(\theta)\,\dot{\varphi} = p_\varphi$.

Kepler 2 ist nur Drehimpulserhaltung!

Die Quadrate der Umlaufzeiten T zweier Planeten verhalten sich wie die Kuben der Großen Bahnhalbachsen.



Betrachten Sie diese 3 Umlaufbahnen.
Eine ist ein Kreis, zwei sind Ellipsen.
Der Kreis hat $a = b = 5$.
Die größere Ellipse hat $a = 5$, $b = 3$.
Die kleinere Ellipse hat $a = 2.5$, $b = 2$.

Kepler 3 sagt, dass die Umlaufzeit nur von a, nicht b, abhängig ist: $T \propto a^{3/2}$.

$$\text{Deshalb:} \quad a_1 = a_2 = 2a_3 \quad \Rightarrow \quad T_1 = T_2 = \sqrt{8}\,T_3$$

Wie können wir das beweisen?

12: Zwei Körper Problem

Wir haben das teilweise schon gesehen.
Zwei Körper, Massen m und M, Potentialenergie $V(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$

$$L = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}_1^{\,2} + \frac{M}{2}\dot{\vec{r}}_2^{\,2} - V(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$$

Schwerpunkt und relativ-Koordinaten

$$\vec{r}_s = \frac{m\vec{r}_1 + M\vec{r}_2}{m + M}\,, \qquad \vec{r}_r = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$$

Viel langweilige Algebra:

$$L = \frac{m + M}{2}\dot{\vec{r}}_s^{\,2} + \frac{1}{2}\frac{mM}{m + M}\dot{\vec{r}}_r^{\,2} - V(|r_r|)$$

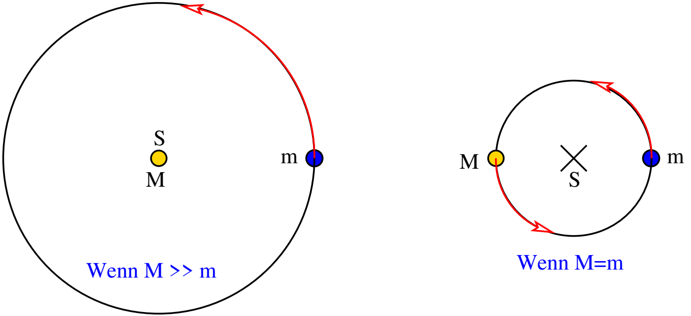
Die $\vec{r}_s$ Komponenten sind zyklische Koordinaten. Keine weitere Rolle.
Effektiv: 1 Teilchen, Masse $\mu \equiv mM/(m + M)$, potentielle Energie $V(|r_r|)$.

13: Reduzierte Masse, erklärt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Warum hat unser Planet eine kleinere reduzierte Masse?

Betrachten Sie die zwei Limes: $M \gg m$ und $M = m$



Links: $M \gg m$. Schwerpunkt ist wo M ist, und m muss sich $2\pi R$ bewegen.

Rechts: $M = m$. Schwerpunkt ist in der Mitte. m, M müssen sich jeder πR bewegen.

Links: m hat Geschwindigkeit v. Rechts: m, M haben jeder Geschwindigkeit $v/2$.

Links: $T = mv^2/2$. Rechts: $T = M(v/2)^2/2 + m(v/2)^2/2 = mv^2/4 = (m/2)v^2/2$.

14: Erhaltungsgrößen

Kugelkoordinaten. Jetzt ist unsere Lagrangefunktion

$$L = \frac{\mu}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2 \sin^2(\theta)\,\dot{\varphi}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) - V(r)$$

Wie diskutiert: Koordinaten benutzen, wobei $\theta = \pi/2$.
Die Umlaufbahn ist auf dem Äquator, θ bleibt $\pi/2$.

2 Koordinaten *und 2 Erhaltungsgrößen*:

$$p_\varphi = \mu r^2 \dot{\varphi} \quad \text{und} \quad H = E = \frac{\mu}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) + V(r) = \frac{\mu}{2}\dot{r}^2 + \frac{p_\varphi^2}{2\mu r^2} + V(r)$$

Ich brauche keine Bewegungsgleichungen!
Ich kann alles mit Erhaltungsgrößen lösen!

Ich kann meine Energie umschreiben, um meine Radialbewegung zu lösen:

$$\begin{aligned} E &= \frac{\mu}{2}\dot{r}^2 + \frac{p_\varphi^2}{2\mu r^2} + V(r) \\ \dot{r} &= \pm\sqrt{\frac{2}{\mu}\left(E - V(r) - \frac{p_\varphi^2}{2\mu r^2}\right)} \end{aligned}$$

Wenn $\dot{r} > 0$ ist, nimmt r zu bis $\dot{r} = 0$. Dann nimmt r ab bis $\dot{r} = 0$. Dann...
Bemerkung: Wenn etwas sich in 1 Dimension bewegt, mit Potentialenergie $U(r)$, finden wir

$$E = \frac{\mu}{2}\dot{r}^2 + U(r) \quad \Rightarrow \quad \dot{r} = \pm\sqrt{\frac{2}{\mu}\left(E - U(r)\right)}$$

Wir haben eine *effektive Potentialenergie*

$$U(r) = V(r) + \frac{p_\varphi^2}{2\mu r^2} = \text{Potentialenergie} + \text{Zentrifugalpotential}$$

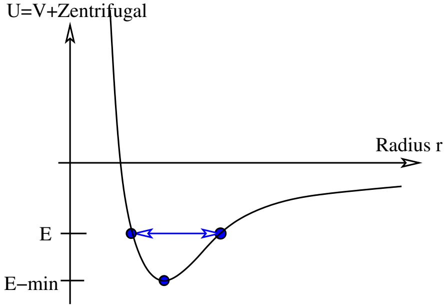
15.5: Zentrifugalpotential??

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

16: Radialproblem für Gravitation: Qualitativ

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Für Gravitation ist die Potentialenergie: $V(r) = -\dfrac{G_N mM}{r}$.



Effektive Potentialenergie

$$U = +\frac{p_\varphi^2}{2\mu r^2} - \frac{G_N mM}{r}$$

Großes r: $-1/r$ gewinnt, $U(r) < 0$
Kleines r: $+1/r^2$ gewinnt, $U(r) > 0$
Für einen festen p_φ-Wert
gibt es einen Minimalenergiewert
$E_{\text{min}} = -(G_N mM)^2 \mu / 2p_\varphi^2$
auf Radius $r = p_\varphi^2 / GmM\mu$

- $E < E_{\text{min}}$ ist nicht möglich.
- $E = E_{\text{min}}$: Umlaufbahn ist ein Kreis
- $0 > E > E_{\text{min}}$: Umlaufbahn schwingt zwischen r_{min} (Sonnennähe / Perihel) und r_{max} (Sonnenferne / Aphel)
- $E > 0$: Planet fliegt weg, $r \to \infty$

17: Radialproblem für Gravitation: Quantitativ

$$\frac{dr}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{\mu}\left(E + \frac{G_N mM}{r} - \frac{p_\varphi^2}{2\mu r^2}\right)} \Rightarrow \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu}\left(E + \frac{G_N mM}{r} - \frac{p_\varphi^2}{2\mu r^2}\right)}} = dt$$

Integrierbar $\Rightarrow t = t(r)$.
Diese müssen wir invertieren, um $r = r(t)$ zu schreiben.
Und φ ist danach auch lösbar:

$$p_\varphi = \mu r^2 \dot{\varphi} \qquad \Rightarrow \qquad \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{\mu r^2(t)}$$

$$d\varphi = \frac{p_\varphi}{\mu r^2(t)} dt \qquad \Rightarrow \qquad \varphi(t) = \varphi(t = 0) + \frac{p_\varphi}{\mu} \int_0^t \frac{dt'}{r^2(t')}$$

Diese Rechnungen machen wir beim nächsten Mal.

18: English Summary part 1

Based on the complex motion of the planets, Kepler concluded:

1. The **orbit** of a planet is an **ellipse** with the Sun at a **focus** (not the center point)
2. A line segment joining a planet and the Sun sweeps out equal areas during equal time intervals
3. The square of the **orbital period** of a planet is directly proportional to the cube of the **semi-major axis** of its orbit

An ellipse is described in terms of a center point and two foci.
The semi-major axis a and semi-minor axis b are related to the **ellipticity** e through $c \equiv \sqrt{a^2 - b^2}$ and $e \equiv c/a$.

Kepler 2 arises directly from angular momentum conservation.
We have not yet derived Kepler 1 or Kepler 3.

19: English Summary part 2

We addressed the 2-body problem with **center-of-mass and relative coordinates**. The cm coordinates are cyclic and play no role. The relative problem can be handled in spherical coordinates, placing the orbit in the equatorial plane. The reduced mass $\mu = Mm/(m + M)$ is a consequence of both bodies moving around the center of mass.

Conservation of energy allows the radial problem to be solved in terms of an **effective potential**

$$U(r) = V(r) + p_\varphi^2/2\mu r^2$$

For a given energy, we can find the minimum and maximum radii, the **perihelion and aphelion**

The radial problem can be solved by integration,

$$\frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{\mu}\left(E + \frac{G_N mM}{r} - \frac{p_\varphi^2}{2\mu r^2}\right)}} = dt$$