Theoretische Physik I:

Vorlesung 11: Kepler II

Das letzte Mal haben wir uns die Kepler'sche Gesetze angesehen.

I Planetenbahnen sind Ellipsen. Die Sonne liegt in einem Brennpunkt.

II $d\varphi/dt \propto r^{-2}$ (Drehimpulserhaltung)

III Die Umlaufzeit T hängt nur an der Großen Halbachse a: $T \propto a^{3/2}$.

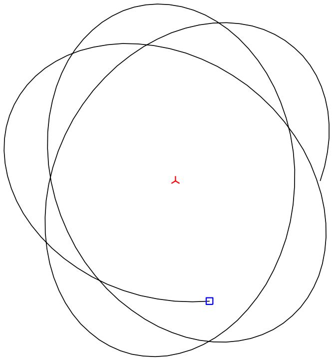
Wir haben **Kepler I** und **Kepler III** noch nicht erklärt.
Wir haben aber gelernt, dass wir *Erhaltungsgrößen* benutzen können, die r und φ Zeitabhängigkeit in Form von 1-Ordnung DGl zu schreiben:

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{\mu}\left(E + \frac{G_N mM}{r} - \frac{p_\varphi^2}{2\mu r^2}\right)}\,, \qquad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{p_\varphi}{\mu r^2}\,.$$

Heute wollen wir diese lösen. Wir wollen auch *verstehen*, warum die Bahnen Ellipsen sind: es ist eine Folge der Symmetrie!

2: Generische Bahnen

Betrachten Sie ein System, wobei $V(r) = \alpha r^k$ mit α, k Konstanten.
(Für das Keplerproblem ist $k = -1$ und $\alpha = -G_N mM$.)



Betrachten Sie als Beispiel $k = 1$:
Die Bahn kommt nicht zurück an den Anfangspunkt, und formt keine Ellipse.
Die Bahn schließt sich nicht!

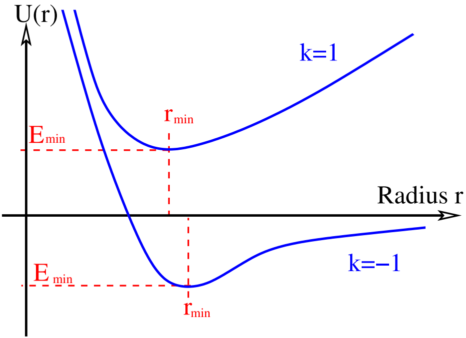
Ellipsen sind etwas Besonderes für den Fall $k = -1$.
Heute sehen wir was generisch ist, und was besonders für $k = -1$ ist.

3: Kreisförmige Bahnen

Betrachten Sie nochmal die Potentialenergie $V(r) = \alpha r^k$.

$$U(r) = \alpha r^k + \frac{p_\varphi^2}{2\mu r^2} \,.$$

Für einen festen p_φ-Wert gibt es eine Minimalenergie und einen Minimalradius.



$$\text{Minimalwert: } U'(r) = 0, \text{ oder} \quad 0 = k\alpha r_{\text{min}}^{k-1} - \frac{p_\varphi^2}{\mu r_{\text{min}}^3} \quad \Rightarrow \quad r_{\text{min}}^{k+2} = \frac{p_\varphi^2}{k\alpha\mu} \,.$$

Die Bahn ist kreisförmig, wenn $E = U(r_{\text{min}})$ und $r = r_{\text{min}}$.

4: Umlaufzeit für Kreisförmige Bahnen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Die Umlaufzeit ist die Zeit, die benötigt wird, um φ von 0 auf 2π zu ändern.

$$p_\varphi = \mu r_{\min}^2\,\dot{\varphi} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{p_\varphi}{\mu\, r_{\min}^2} \quad \Rightarrow \quad \Delta\varphi = \frac{p_\varphi}{\mu\, r_{\min}^2}\Delta t$$

Umlaufzeit T: Δt wenn $\Delta\varphi = 2\pi$:

$$T = \frac{2\pi\mu r_{\min}^2}{p_\varphi}$$

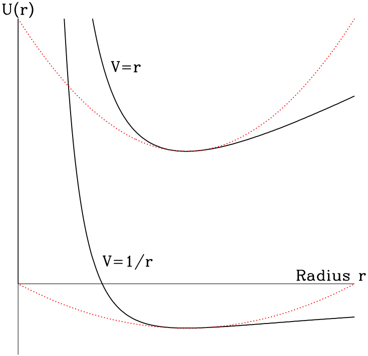
Aber $r_{\min}^{k+2} = p_\varphi^2/k\alpha\mu$. Deshalb ist $p_\varphi = r_{\min}^{1+k/2}\sqrt{k\alpha\mu}$, und

$$T = 2\pi r^{1-k/2}\sqrt{\mu/k\alpha}$$

Die Umlaufzeit variiert mit dem Radius als $r^{1-k/2}$.
Für $k = -1$ ist das $T \propto r^{3/2}$. **Kepler III**
Aber bisher nur bei kreisförmigen Bahnen

5: Kleine Schwingungen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT



Wenn $E > E_{\text{min}}$ gibt es extra Energie. In diesem Fall schwingt r hin und her um $r = r_{\text{min}}$.
Wenn es nur ein bisschen extra Energie gibt, bleibt r nah an r_{min}. Dann können wir eine Taylorreihe um r_{min} benutzen.

$$\text{Taylorreihe:} \quad U(r) = U(r_{\text{min}}) + \cancelto{0}{U'(r_{\text{min}})}(r - r_{\text{min}}) + U''(r_{\text{min}})\frac{(r - r_{\text{min}})^2}{2} + \ldots$$

$$\text{Bewegung:} \quad \mu\ddot{r} = -\frac{\partial U(r)}{\partial r} = -(r - r_{\text{min}})U''(r_{\text{min}}) \quad \Rightarrow \quad r = r_{\text{min}} + a\cos(\omega t + b)$$

Hier ist a die Größe der Schwingungen, b die Anfangsphase, und $\omega \equiv \sqrt{U''/\mu}$

6: Umlaufzeit, Schwingungszeit

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Eine Schwingung dauert $T_s = 2\pi/\omega$.
Die Umlaufzeit ist $T = 2\pi/\dot{\varphi}$. Sind sie gleich?
Wenn $T_s = T$, oder $T_s = nT$, $n \in \mathcal{Z}$, schließen sich die Umlaufsbahnen.

Lassen wir uns das Verhältnis dann berechnen...

$$\begin{aligned} T_s = 2\pi\sqrt{\mu/U''} = \text{(Algebra...)} \quad &= \quad 2\pi r_{\text{min}}^{1-k/2}\sqrt{\mu/(\alpha k(k+2))} \\ \text{gegen} \qquad T \quad &= \quad 2\pi r_{\text{min}}^{1-k/2}\sqrt{\mu/\alpha k} \end{aligned}$$

Im Allgemeinen sind sie ungleich:

$$\frac{T}{T_s} = \sqrt{k+2}$$

Aber für $k = -1$ (Gravitation, $V(r) = -G_N mM/r$) ist $T = T_s$.

Für kleine Schwingungen zumindest, sollen sich die Umlaufsbahnen schließen.

7: Virialsatz

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Für große Schwingungen ist alles komplizierter.

Wir können jedoch eine grundlegende Frage beantworten:

Wie ist die Energie zwischen T und V geteilt,

im Durchschnitt (oder gemittelt über die Zeit)?

Um dies zu beantworten, betrachten wir die folgende Funktion:

$$\begin{aligned} G(t) &\equiv \vec{p} \cdot \vec{r} \\ \frac{dG}{dt} &= \vec{p} \cdot \dot{\vec{r}} + \dot{\vec{p}} \cdot \vec{r} \quad = \mu \dot{r}^2 + \vec{F} \cdot \vec{r} \\ &= 2T - kV \quad \text{für} \quad V = \alpha r^k \end{aligned}$$

$$\text{Zeit-integral:} \quad \int_{t_0}^{t_f} \frac{dG}{dt} dt = 2 \int_{t_0}^{t_f} T dt - k \int_{t_0}^{t_f} V dt$$

$$G(t_f) - G(t_i) = (t_f - t_i)\left(2\overline{T} - k\overline{V}\right) \quad \text{(Durchschnittswerte)}$$

Für eine lange Zeit, oder für genau eine Periode, finden wir:

$$\overline{T} = \frac{k}{2}\overline{V} \qquad \text{oder, für } k = -1, \qquad \overline{V} = -2\overline{T}$$

8: Laplace-Runge-Lenz Vektor

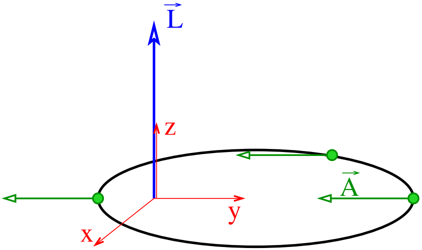
Warum sind in unserem Fall ($k = -1$) die Lösungen *immer* Ellipsen?
Warum schließen sich die Umlaufsbahnen, auch für große Schwingungen?

Unser System hat *mehr Symmetrie*! Für

$$L = \frac{\mu}{2}\dot{\vec{r}}^2 + \frac{\alpha}{r}$$

wissen wir schon, dass der *Drehimpuls* $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \mu\vec{r} \times \dot{\vec{r}}$ erhalten ist.
So ist auch der
Laplace-Runge-Lenz Vektor $\vec{A}$:

$$\vec{A} \equiv \vec{p} \times \vec{L} - \frac{\mu\alpha\vec{r}}{|r|}$$



Er zeigt immer die große Achse entlang.

9: Runge-Lenz Vektor Erhaltung

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

$\vec{A}$ ist erhalten. Wirklich? Lassen wir uns das überprüfen:

$$
\begin{aligned}
\frac{d\vec{A}}{dt} &= \frac{d}{dt}\left(\vec{p}\times\vec{L}-\mu\alpha\frac{\vec{r}}{|r|}\right)\\
&= \dot{\vec{p}}\times\vec{L}+\vec{p}\times\overset{0}{\dot{\vec{L}}}-\mu\alpha\frac{\dot{\vec{r}}}{|r|}+\mu\alpha\frac{(\vec{r}\cdot\dot{\vec{r}})\vec{r}}{|r|^3}\\
\text{aber}\quad \dot{\vec{p}} &= \vec{F}=-\alpha\frac{\vec{r}}{r^3}\\
\dot{\vec{p}}\times\vec{L} &= -\frac{\alpha}{r^3}\vec{r}\times(\vec{r}\times\vec{p})\\
&= -\frac{\alpha}{r^3}\left((\vec{r}\cdot\vec{p})\vec{r}-r^2\vec{p}\right)\quad (\text{und } \vec{p}=\mu\dot{\vec{r}})\\
\frac{d\vec{A}}{dt} &= -\alpha\mu\left[\frac{(\vec{r}\cdot\dot{\vec{r}})}{r^3}\vec{r}-\frac{1}{r}\dot{\vec{r}}\right]-\alpha\mu\left[\frac{1}{r}\dot{\vec{r}}-\frac{(\vec{r}\cdot\dot{\vec{r}})}{r^3}\vec{r}\right]\\
&= 0 \qquad \text{und } \vec{A} \text{ ist erhalten!}
\end{aligned}
$$

Ich kann die $\vec{A}$-Richtung als x-Achse benutzen.
Was ist der Winkel zwischen $\vec{r}$ und $\vec{A}$?

$$Ar\cos\varphi = \vec{r}\cdot\vec{A} = \vec{r}\cdot\left(\vec{p}\times\vec{L} - \frac{\mu\alpha\vec{r}}{r}\right) = \vec{r}\cdot(\vec{p}\times\vec{L}) - \mu\alpha r$$

Erinnern Sie sich: $\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) = \epsilon_{ijk}A_iB_jC_k = \vec{C}\cdot(\vec{A}\times\vec{B})$

$$\vec{r}\cdot(\vec{p}\times\vec{L}) = \vec{L}\cdot(\vec{r}\times\vec{p}) = \vec{L}\cdot\vec{L} = p_\varphi^2$$

Relation zwischen $A = |\vec{A}|$, r, φ:

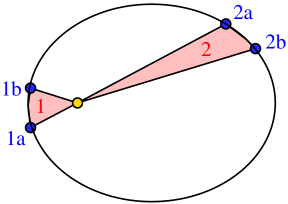
$$Ar\cos\varphi = p_\varphi^2 - \mu\alpha r \qquad \text{oder} \qquad r = \frac{p_\varphi^2}{\mu\alpha + A\cos\varphi} = \frac{p_\varphi^2/\mu\alpha}{1 - \frac{-A}{\mu\alpha}\cos\varphi}$$

Letzte Vorlesung:

$$\text{Eine Ellipse gehorcht:} \quad r(\varphi) = \frac{a^2 - c^2}{a - c\cos\varphi} = \frac{a(1-e^2)}{1 - e\cos\varphi}$$

Aha! Wir haben eine Ellipse! $e = A/\mu\alpha$ und $a(1-e^2) = p_\varphi^2/\mu\alpha$.
Minuszeichen: A zeigt in $-x$-Richtung, von Aphel nach Perihel.

Wie sehen wir, dass $T^2 \propto a^3$ ist?



Eine Fläche δF ist in der Zeit von δt umlaufen.
Wir haben bereits gesehen:

$$\delta F = \frac{r^2}{2}\delta\varphi \quad \Rightarrow \quad \frac{dF}{dt} = \frac{r^2\dot{\varphi}}{2} = \frac{p_\varphi}{2\mu}\,.$$

Die Gesamtfläche ist $F = \pi ab = \pi a^2\sqrt{1-e^2}$.

Die Umlaufzeit ist $T = \dfrac{F}{dF/dt} = \dfrac{2\pi ab\mu}{p_\varphi}$

Die Quadrate dieser Gleichung, mit Hilfe von $b^2 = a^2(1-e^2)$ sind:

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^4\mu^2(1-e^2)}{p_\varphi^2} \qquad \text{(und, letzte Folie:)} \qquad p_\varphi^2 = \mu\alpha a(1-e^2)$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2\mu a^3}{\alpha}$$ und das ist **Kepler III**!

12: English Summary

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

For a general potential $V(r) = \alpha r^k$, the orbits do not **close**, and certainly do not form ellipses. $k = -1$ (Gravity) is special.

The orbit with minimal E for fixed p_φ is always circular.
The orbital period is $T = 2\pi r^{1-k/2}\sqrt{\mu/k\alpha}$.

For *nearly* circular orbits, one can make a Taylor series expansion of $U(r)$ to quadratic order, to find the period of the radial oscillations: $T_s = T/\sqrt{k+2}$.

Virial's Theorem: for any orbit, the time-averaged kinetic and potential energies are related via $\overline{T} = \frac{k}{2}\overline{V}$. For gravitation this is $\overline{V} = -2\overline{T}$.

There is one extra unexpected conserved quantity:
the **Laplace-Runge-Lenz vector** $\vec{A} \equiv \vec{p} \times \vec{L} - \frac{\mu\alpha\vec{r}}{|r|}$.
This points along the major axis from the aphelion to the perihelion.

Using $\vec{A}$ conservation, we can show that orbits are ellipses, and that the period T obeys $T^2 = 4\pi^2\mu a^3/\alpha$.

Frage von vorherigen Vorlesungen

Potentialenergie ist nur bis zu einer Konstante definiert.
Was passiert bei Minimierung von S, wenn ich die Potentialenergie $V(q) \to V(q) + K$ (K ein Konstant) umschreibe?

Antwort:

Betrachten Sie $L(q,\dot{q}) = T(\dot{q},q) - V(q)$ und
$\tilde{L}(q,\dot{q}) = T(\dot{q},q) - V(q) - K = L(q,\dot{q}) - K$.

Bemerkung: $$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$$

und $$\frac{\partial \tilde{L}}{\partial q} = \frac{\partial T}{\partial q} - \frac{\partial V}{\partial q} - \cancelto{0}{\frac{\partial K}{\partial q}} = \frac{\partial L}{\partial q}$$

Deshalb haben die zwei Lagrangefunktionen die gleiche Euler-Lagrange-Gleichungen.

Wirkung? $$\tilde{S}(q(t)) = \int_{t_0}^{t_f} (L - K)dt = -K(t_f - t_i) + S(q(t))$$

K ist ein q-unabhängiges Konstant.
Die $q(t)$-Funktion, die $S(q)$ minimiert, minimiert auch $\tilde{S}$. Nur die Minimalwert ist nicht gleich. Der genaue Wert von S ist nicht wichtig (wie E, V auch).

Frage, vor 2 Jahren: Kontinuierliche Symmetrien

Wenn ich über Rotationen sprechen, mit:

$$\begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\gamma & -\sin\gamma \\ 0 & \sin\gamma & \cos\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r'_x \\ r'_y \\ r'_z \end{bmatrix}$$

sind $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{R}$ reelle, endliche Zahlen.

Solche Symmetrien formen eine mathematische Gruppe (eine sogenante Liegruppe), und die Theorie davon heißt Liegruppentheorie.

Man kann Kurse darüber hören, und Bücher lesen. In diesem Kurs werden wir nur ein bisschen davon brauchen – in Quantentheorie brauchen wir mehr.

Kontinuierliche Symmetrien II

Betrachten Sie die Rotation:

$$\begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r'_x \\ r'_y \\ r'_z \end{bmatrix} = R(\alpha)\vec{r}'$$

Die Rotationsmatrix $R(\alpha)$ ist

$$R(\alpha) = R(\alpha/2)R(\alpha/2) = (R(\alpha/3))^3 = (R(\alpha/N))^N$$

Ich kann mehr und mehr Rotationen mit immer kleineren Winkeln benutzen.
"Deshalb" ist es genug, Rotationen im Allgemeinen zu verstehen, wenn man $\alpha \ll 1$ gut versteht.
Die Folgen einer Symmetrie können auf der Grundlage sehr kleiner (oder infinitesimaler) Transformationen verstanden werden.
Deshalb war es ausreichend, infinitesimale Transformationen zu betrachten, um das Nöther'sche Theorem abzuleiten.