Theoretische Physik I:

Vorlesung 12: Starre Körper I

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Zumnächst betrachten wir unsere zweite Anwendung der Lagrange'schen Mechanik: starre Körper.

- Was sind **Starre Körper** und warum sind sie wichtig?
- Die 6 Freiheitsgrade
- Körperfeste- und Inertialsystemskoordinaten
- Drehgeschwindigkeit und Lagrangefunktion
- Trägheitstensor und Drehimpuls

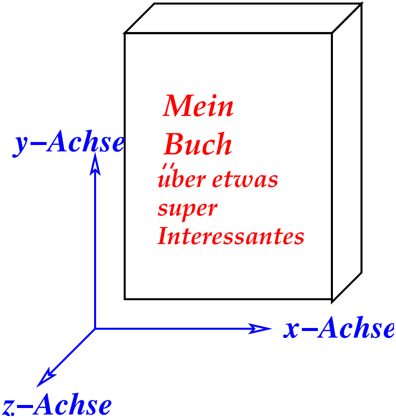
2: Starre Körper

Viele Körper sind steif oder starr.

Solche Körper sind Systeme von Teilchen, aber die Abstände zwischen zwei Teilchen bleiben fest.
Beispiele: Kuli, Schiff, Flugzeug (hoffentlich), Kreisel, usw.

Starrheit ist immer eine Annäherung.
Aber die Physik ist voll von nützlichen Annäherungen.
Wir wollen die Bewegung von starren Körpern verstehen.

3: Ein Rätsel



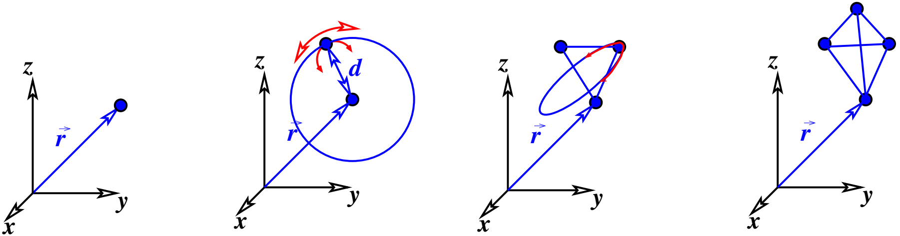
Ein Experiment!

Finden Sie ein altes Buch.
Kleben Sie es mit Klebeband zu.
Werfen Sie nun das Buch in die Luft, so dass es sich um die z-Achse dreht.
Nochmal um die y-Achse.
Schließlich um die x-Achse.
(Vergessen Sie nicht, das Buch zu fangen!)

Um zwei Achsen dreht es sich ganz normal. Aber um die x-Achse macht es etwas chaotisches. **Warum???** Dieses Rätsel wollen wir in diese 2 Vorlesungen erklären.

4: Freiheitsgrade

Wieviele Koordinaten brauche ich, um einen starren Körper zu beschreiben?

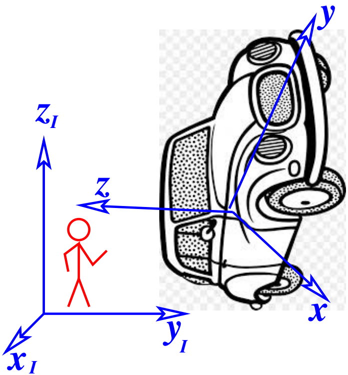


1. 1 Teilchen: $\vec{r}$, 3 Koordinaten, 3 Freiheitsgrade
2. 2. Teilchen: *d* ist fest. 3 neue Koordinaten, 1 Zwangsbedingung, 2 weitere Freiheitsgrade (2 Winkel einer Kugel)
3. 3. Teilchen: 3 neue Koordinaten, 2 feste Länge, 1 weiterer Freiheitsgrad (der Winkel um einen Kreis)
4. Alle weiteren Teilchen: keine weiteren Freiheitsgrade!!

Insgesamt brauchen wir 6 Freiheitsgrade: 3 Koordinaten, 3 Winkel.

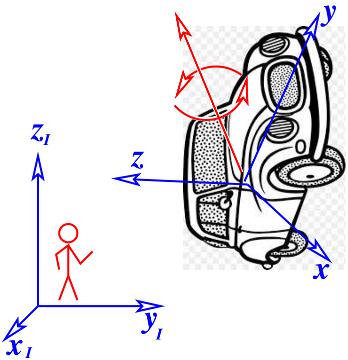
5: Die Zwei Koordinatensysteme

Ich habe 2 Koordinatensysteme:



Inertialsystem: (x_I, y_I, z_I).
Diese bleiben relativ zu einem externen Beobachter fixiert.
Körperfestes System: (x, y, z).
Die Abstände zwischen Körperteile bleiben in diesen Koordinaten fest.
(x: Richtung Tür.
y: Richtung Motor.
z: Richtung Dach)
Der Ursprung des körperfesten Systems kann (aber muss nicht) der Schwerpunkt sein.

wärend das Auto dreht, ändern sich die zwei Koordinatensysteme relativ zueinander.



Der Körper hat eine (augenblickliche, zeitabhängige) Drehachse und Drehgeschwindigkeit: $\vec{\omega}(t) = |\omega|\vec{e}_\omega$.
Ein Punkt mit (körperfestem Koordinatensystem) Ortsvektor $\vec{r}$ hat Geschwindigkeit

$$\vec{v}_I = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Hier ist v_0 die Koordinatenursprungsgeschwindigkeit (relativ zu den Inertialsystemkoordinaten), $\vec{r}$ ist der Ortsvektor in den körperfesten Koordinaten. (ω ist auch in den körperfesten Koordinaten geschrieben.)

7: Kinetische Energie

Wir brauchen einen Ausdruck für die kinetische Energie. Notation:

- $\vec{r}_{I\alpha}$, $\vec{r}_\alpha$: Ortsvektor, des α Teilchens im inertial/körperfesten System
- $\vec{r}_s$, $\vec{v}_s$: Schwerpunktsort, Geschwindigkeit (in I-system)
- $\vec{r}_0$, $\vec{v}_0$: Körpersystemskoordinatenursprung und Ursprungsgeschwindigkeit in I-system

Die gesamte kinetische Energie ist eine Summe über alle Teilchen:

$$\begin{aligned} T &= \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{m_\alpha}{2} \vec{v}_{I\alpha}^2 = \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{m_\alpha}{2} \left(\vec{v}_0 + (\vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha)\right)^2 \quad \text{(Warum } \vec{v}_I^2\text{??)} \\ &= \sum_\alpha \frac{m_\alpha}{2} \vec{v}_0^2 + \sum_\alpha m_\alpha \vec{v}_0 \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha) + \sum_\alpha \frac{m_\alpha}{2} (\vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha)^2 \end{aligned}$$

2 Möglichkeiten sind üblich:

- Ein starrer Körper, frei im Raum
- Ein starrer Körper, mit einem Punkt festgehalten (zB, ein Kreisel auf seiner Spitze, oder ein Rad auf einer Radachse)

8: Kinetische Energie, frei im Raum

Die kinetische Energie haben wir schon geschrieben:

$$T = \sum_\alpha \frac{m_\alpha}{2} \vec{v}_0^2 + \sum_\alpha m_\alpha \vec{v}_0 \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha) + \sum_\alpha \frac{m_\alpha}{2} (\vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha)^2$$

Wenn der Körper sich frei im Raum bewegt, ist est praktisch, $r_0 = r_s$ zu benutzen. Dann finden wir:

$$\sum_\alpha m_\alpha \vec{v}_s \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha) = \sum_\alpha m_\alpha \vec{r}_\alpha \cdot (\vec{v}_s \times \vec{\omega}) = \left(\sum_\alpha m_\alpha \vec{r}_\alpha \right) \cdot (\vec{v}_s \times \vec{\omega})$$

Aber $\vec{r}_\alpha$ ist relativ zu unserem Schwerpunkt. Deshalb ist $\sum_\alpha m_\alpha \vec{r}_\alpha = 0$, und

$$T = \frac{m}{2} \vec{v}_s^2 + \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{m_\alpha}{2} (\vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha)^2 = T_{\text{trans}} + T_{\text{rot}}$$

Wir betrachten den Ausdruck $\sum_\alpha m_\alpha (\vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha)^2$ in einem Moment.

9: wenn ein Punkt fest bleibt

Wenn etwas einen Punkt fest hält, sollen wir den festen Punkt als $\vec{r}_0$ benutzen. Dann ist $v_0 = 0$, und

$$\begin{aligned} T &= \sum_\alpha \frac{m_\alpha}{2}\vec{v}_0^2 + \sum_\alpha m_\alpha \vec{v}_0 \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha) + \sum_\alpha \frac{m_\alpha}{2}(\vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha)^2 \\ &= \sum_\alpha \frac{m_\alpha}{2}(\vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha)^2 = T_{\mathrm{rot}}. \end{aligned}$$

Wir müssen den gleichen Ausdruck betrachten!

10: Trägheitstensor

Wir werden die Indexnotation benutzen: $\vec{r}_\alpha = r_{\alpha,i}$, $i = 1, 2, 3$. Ich werde die Einstein'sche Summenkonvention auch benutzen.

$$T_{\text{rot}} = \sum_\alpha \frac{m_\alpha}{2}(\vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha)^2 = \sum_\alpha \frac{m_\alpha}{2} \epsilon_{ijk}\omega_j r_{\alpha,k} \epsilon_{ilm}\omega_l r_{\alpha,m}$$

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{ilm} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}$$

$$\begin{aligned} T_{\text{rot}} &= \sum_\alpha \frac{m_\alpha}{2}\omega_j\omega_l \left(\delta_{jl} r_k r_k - r_j r_l\right) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{ij}\omega_i\omega_j \left[\sum_\alpha m_\alpha \left(r^2\delta_{ij} - r_i r_j\right)\right] \\ &= \frac{1}{2}\sum_{ij}\omega_i\omega_j I_{ij} \end{aligned}$$

wobei $I_{ij} = \sum_\alpha m_\alpha(r^2\delta_{ij} - r_i r_j)$ ist der **Trägheitstensor**
(Ein Tensor ist etwas mit 2 oder mehr Indizes.)

11: Trägheitstensor Eigenschaften

In Matrixnotation:

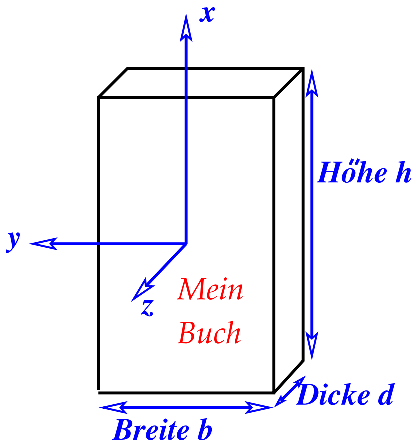
$$I_{ij} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \begin{bmatrix} y_{\alpha}^2 + z_{\alpha}^2 & -x_{\alpha} y_{\alpha} & -x_{\alpha} z_{\alpha} \\ -x_{\alpha} y_{\alpha} & x_{\alpha}^2 + z_{\alpha}^2 & -y_{\alpha} z_{\alpha} \\ -x_{\alpha} z_{\alpha} & -y_{\alpha} z_{\alpha} & x_{\alpha}^2 + y_{\alpha}^2 \end{bmatrix}$$

Nicht immer diagonal! Aber reell, symmetrisch, mit positiven Eigenwerten.
Deshalb kann ich immer körperfesten Koordinaten finden, wobei

$$I_{ij} = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix}, \qquad \text{mit } \; 0 \leq I_1 \leq I_2 \leq I_3 \, .$$

Solche Koordinatensysteme nennen wir ein **Hauptachsensystem**.
Die Achsen sind dann die **Hauptachsen** unseres Körpers.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT



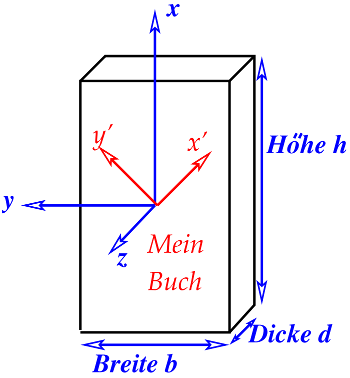
Betrachten Sie ein Buch, (Höhe,Breite,Dicke)=(h, b, d)
Die Hauptachsen sind wie erwartet.
Die Trägheitstensorkomponenten sind

$$I_{xx} = \frac{m}{12}(b^2 + d^2) \equiv A,$$
$$I_{yy} = \frac{m}{12}(h^2 + d^2) \equiv B,$$
$$I_{zz} = \frac{m}{12}(h^2 + b^2) \equiv C.$$

Solange $h > b > d$ sind sie alle ungleich.

13: Buch in unsinnigen Koordinaten

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT



Ich kann aber neue Koordinaten benutzen:
$x' = (x - y)/\sqrt{2}$,
$y' = (x + y)/\sqrt{2}$
Das ist eine -45° Rotation meiner Koordinaten.

Weil I_{ij} 2 Indizes hat, brauche ich zwei Rotationsmatrizen:

$$I_{ij}^{\text{neu}} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{A+B}{2} & \frac{A-B}{2} & 0 \\ \frac{A-B}{2} & \frac{A+B}{2} & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}$$

Die Eigenwerte sind immer noch A, B, C.

14: Trägheitstensor, Allgemein

Hier ist ein Objekt.
Was sind die Hauptachsen?
Was ist der Trägheitstensor?
Keine Ahnung. Wie rechnete ich die?
1) Wählen wir irgendein Koordinatensystem.
2) Rechnen wir alle I_{ij}-Komponenten.

$$\text{Ergebnis:} \qquad I_{ij} = \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{12} & I_{22} & I_{23} \\ I_{13} & I_{23} & I_{33} \end{bmatrix}$$

Die Matrix ist reell und symmetrisch, mit positiven Eigenwerten.
Die Eigenvektoren sind automatisch orthogonal.
Ich kann die Eigenvektoren als Vektoren (im Raum) verstehen!
Sie zeigen den drei Hauptachsen entlang.
Wenn ich Koordinaten benutze, mit den Eigenvektoren als $\vec{e}_{x,y,z}$ Richtungen, ist I_{ij} diagonal, mit den drei Eigenwerten als Diagonalkomponenten.

15: Trägheitstensor Namen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Im Allgemeinen ist $0 \leq I_1 \leq I_2 \leq I_3$. Aber zwei (oder mehr) Werte können gleich sein. Wir nennen die verschiedenen Fälle:

- Wenn $I_1 = 0$ nennen wir unser System einen **Rotator**.
  Das passiert nur, wenn unser Körper 1-dimensional ist.
- Wenn $I_1 \neq I_2 \neq I_3$ ist unser System **dreiachsig.**
- Wenn $I_1 = I_2 \neq I_3$ nennen wir unser System **symmetrisch**.
- Wenn $I_1 = I_2 = I_3$ haben wir eine **Kugelkreisel.**
  (Bemerkung: nicht nur Kugeln sind Kugelkreisel, sondern zum Beispiel, auch Würfel.)

Solange $\vec{\omega}$ eine Hauptachse entlang läuft, brauchen wir nur einen Komponenten des Trägheitstensors, und das Leben ist einfach.
Ansonsten ist das Leben komplizierter!

$$\text{Drehimpuls:} \quad L_{\text{ges}} = \sum_\alpha m_\alpha \vec{r}_{I,\alpha} \times \vec{v}_\alpha$$

Schon gesehen: $\vec{r}_{I,\alpha} = \vec{r}_0 + \vec{r}_\alpha$ und $\vec{v}_{I,\alpha} = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha$

$$L = m\vec{r}_0 \times \vec{v}_0 + \vec{r}_0 \times \left(\vec{\omega} \times \sum_\alpha m_\alpha r_\alpha\right) + \left(\sum_\alpha m_\alpha r_\alpha\right) \times v_0 + \sum_\alpha m_\alpha \vec{r}_\alpha \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha)$$

- Frei im Raum: nach ein bisschen Arbeit finden wir

$$\vec{L}_{\text{ges}} = m\vec{r}_s \times \vec{v}_s + \vec{L} \quad \text{mit} \quad L_i = I_{ij}\omega_j$$

- Festgehalten: $\vec{v}_0 = 0 = \vec{r}_0$ und

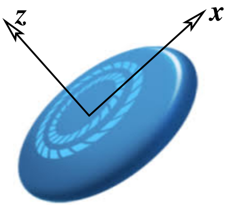
$$\vec{L}_{\text{ges}} = \vec{L}\,, \qquad L_i = I_{ij}\omega_j\,.$$

Ohne externe Kräfte, oder wenn die externen Kräfte nur auf den Punkt $\vec{r}_0$ wirken, bleibt L_i erhalten. *Aber* wenn $\vec{\omega}$ nicht eine Hauptachse entlang zeigt, rotiert unser Körper. In dem Fall ändert sich I_{ij}, und $\vec{\omega}$ ändert sich auch.

Und im Allgemeinen ist $\vec{L}$ *nicht* parallel zur $\vec{\omega}$.

17: Wie kann L, ω nicht parallel sein?

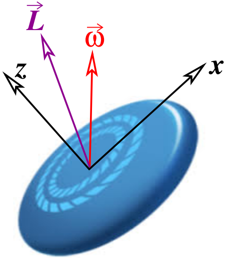
TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT



Betrachten Sie eine Kreisscheibe (Frisbee?). Wenn sie sich um die z-Achse dreht, müssen alle Teilchen sich bewegen. Aber wenn sie sich um die x-Achse dreht, gibt es Punkte, die sich nicht weit bewegen müssen.
Deshalb ist $I_{zz} \simeq 2I_{xx}$.

Wenn $\omega_x = \omega_z$, zeigt $\vec{\omega}$ in die Richtung einer $\vec{e}_x$, $\vec{e}_z$-Mischung.
$L_i = I_{ij}\omega_j$: $L_z = I_{zz}\omega_z$ und $L_x = I_{xx}\omega_x \simeq L_z/2$.
L zeigt in $\vec{e}_x + 2\vec{e}_z$-Richtung...

Und wenn sich die Kreisscheibe dreht, ändert sich die Richtung der z-Achse!
$\vec{L}$ bleibt gleich – dann muss $\vec{\omega}$ sich ändern.



18: Warum dreht sich unser Buch so komisch?

Wie beantworten wir unser Rätsel?
Das müssen wir in der nächsten Vorlesung weiter diskutieren.

19: English summary

A **rigid body** is an object for which the relative distances between points are all fixed. We want to understand the dynamics of such bodies.

Rigid bodies show some strange behaviors. A book, thrown in the air and spinning about its wide axis, tumbles chaotically.

We saw that such bodies have 6 degrees of freedom, corresponding to 3 coordinates and 3 angles. We need to distinguish two coordinate systems, the inertial coordinate system $\vec{r}_I$ and the body system $\vec{r}$. A point's velocity is $\vec{v}_\alpha = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha$, with $\vec{\omega}$ the rotational frequency.

$$\text{The kinetic energy is} \quad T = \frac{m}{2} v_{s,i}^2 + \frac{1}{2}\omega_i I_{ij}\omega_j \,, \qquad I_{ij} = \sum_\alpha m_\alpha (r^2\delta_{ij} - r_i r_j)$$

In general the **moment of intertia tensor** I_{ij} is not diagonal.
However, there is always a set of **principal axes** about which it is diagonal.
If $I_1 < I_2 < I_3$ the body is **triaxial**. If two components are equal it is **symmetrical** and if all are equal it is **spherical** (but not necessarily a sphere!).

$$\text{The orbital angular momentum is} \quad L_i = I_{ij}\omega_j$$

If I_{ij} is triaxial and ω_j does not lie along a principal axis, then I_{ij} and ω_j change with time.