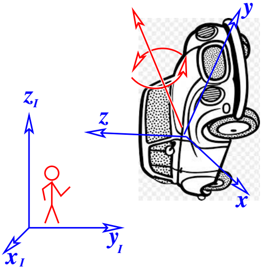
Theoretische Physik I:

Vorlesung 13: Starre Körper II

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Externe Kräfte und Drehmoment
- Warum unser Buch sich so komisch dreht
- Euler’sche Winkel
- Kreisel

2: Wiederholung: letzte Vorlesung



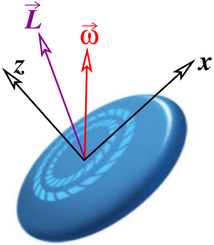
Inertialkoordinaten und Körperkoordinaten.

Kinetische Energie: $T = T_s + T_{\text{rot}}$,

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2}\omega_i \omega_j I_{ij} = \frac{1}{2}\omega_i L_j$$

Trägheitstensor $I_{ij} = \sum_\alpha m_\alpha (r^2 \delta_{ij} - r_i r_j)$
Drehgeschwindigkeit ω, Drehimpuls $L_i = I_{ij}\omega_j$

Im Allgemeinen ist $I_{ij} \neq I\delta_{ij}$ und $\omega_i \nparallel L_i = I_{ij}\omega_j$
Körperkoordinaten: I_{ij} fest, ω_i, L_i ändern sich
Inertialkoorinaten: ω_i, I_{ij} ändern sich,
L_i fest *im Abwesenheit von* Drehmoment



3: Drehmoment

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wenn externe Kräfte auf das System einwirken, entsteht ein Drehmoment:

$$\frac{d}{dt}\vec{L}_{l,\text{ges}} = \frac{d}{dt}\sum_\alpha \vec{r}_{\alpha,l} \times m_\alpha \dot{\vec{r}}_{l,\alpha} = \sum_\alpha \left(\cancelto{0}{m_\alpha \dot{\vec{r}}_{l,\alpha} \times \dot{\vec{r}}_{l,\alpha}} + \vec{r}_{l,\alpha} \times (m_\alpha \ddot{\vec{r}}_{l,\alpha}) \right)$$

$$\frac{d}{dt}\vec{L}_{l,\text{ges}} = \sum_\alpha \vec{r}_{l,\alpha} \times \vec{F}^{\text{ext}} + \cancelto{0}{\sum_{\alpha\beta} \vec{r}_{l,\alpha} \times \vec{F}_{\alpha\beta}} \quad \text{weil} \quad m_\alpha \ddot{\vec{r}}_\alpha = \vec{F}_\alpha$$

$$\frac{d}{dt}\vec{L}_{l,\text{ges}} = \sum_\alpha \vec{r}_{l,\alpha} \times \vec{F}^{\text{ext}}_\alpha = \vec{N} \qquad \textbf{der Drehmomentsatz}$$

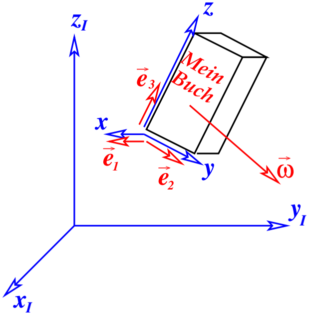
Aber $L_{l,\text{ges}} = m\vec{r}_s \times \dot{\vec{r}}_s + \sum_\alpha m_\alpha(\vec{r}_{l,\alpha} - \vec{r}_s) \times (\dot{\vec{r}}_{l,\alpha} - \dot{\vec{r}}_s) = L_{\text{bahn}} + L_s$.
Teilt sich N auch so? Wir schreiben $\vec{r} = \vec{r}_s + \vec{r}_{r,\alpha}$. Wenn man $\sum_\alpha m_\alpha \vec{r}_{r,\alpha} = 0 = \sum_\alpha m_\alpha \ddot{\vec{r}}_{r,\alpha}$ benutzt, findet man nach ein bisschen Algebra:

$$\frac{d}{dt}\vec{L}_s = \sum_\alpha m_\alpha \vec{r}_{r,\alpha} \times \ddot{\vec{r}}_{r,\alpha} = \sum_\alpha \vec{r}_{r,\alpha} \times F^{\text{ext}}_\alpha \equiv \vec{N}_s$$

Drehimpuls bezogen auf den Schwerpunkt

4: Buch in der Luft: Koordinaten

Vektoren im Inertialsystem, Indizes im Körpersystem!

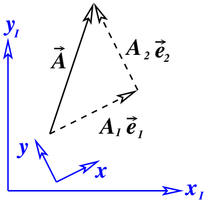


Wenn $\vec{\omega}$ parallel eine Trägheitshauptachse zeigt, ist

$$L_{si} = I_{ij}\omega_j = I\omega_i$$

und ω, I sind zeitunabhängig.
Und wenn ich das Buch nicht perfekt werfe?
$\frac{d}{dt} I_{ij} = 0$ in körperfesten Koordinaten,
aber nicht in Inertialkoordinaten.
Ich muss mit beiden Koordinatensystemen arbeiten.

Um beide Koordinatensysteme zu benutzen, brauche ich die Einheitsvektoren der körperfesten Koordinatenrichtungen in dem Inertialsystem: $\vec{e}_i$. Hier ist $\vec{e}$ ein Vektor im Inertialsystem, aber der Index i bezieht sich auf eine Achse des Körpersystems.
Ein Vektor $\vec{A}_I = \vec{e}_i A_i$ mit A_i die A-Komponenten im Körpersystem.



5: Buch in der Luft II

Drehmomentsatz:

$$\vec{N}_s = \frac{d}{dt}\vec{L}_s = \frac{d}{dt}\left(L_i \vec{e}_i\right) = \frac{d}{dt}\left(I_{ij}\vec{e}_i \omega_j\right)$$

Aber I_{ij} sind die Trägheitstensorkomponenten im Körpersystem. Sie sind zeitunabhängig:

$$\vec{N}_s = I_{ij}\left(\dot{\vec{e}}_i \omega_j + \vec{e}_i \dot{\omega}_j\right)$$

Wir wissen, wie die Hauptachsenrichtungen sich ändern: $\dot{\vec{e}}_i = \vec{\omega} \times \vec{e}_i$, wobei $\vec{\omega}$ im Inertialsystem ist (wie alle Vektoren).

$$\vec{N}_s = I_{ij}\vec{e}_i \dot{\omega}_j + \vec{\omega} \times (\vec{e}_i I_{ij} \omega_j) = I_{ij}\vec{e}_i \dot{\omega}_j + \vec{\omega} \times \vec{L}_s$$

Wie verstehe ich diese zwei “Zutaten” des Drehmoments?

- In der Perspektive des Körpersystems ist $L_i = I_{ij}\omega_j$ und $\dot{L}_i = I_{ij}\dot{\omega}_j$.
- Das Körpersystem ändert sich: wenn L fest bleibt im Körpersystem, ändert sich im Inertialsystem durch $\dot{L}_s = \omega \times L_s$.

6: Buch in der Luft III

Wenn unser Buch sich in der Luft dreht, gibt es nur die Schwerkraft: $\vec{N}_s = 0$.
Wir können $\vec{e}_{1,2,3}$ entlang der Hauptachsen wählen, und auf $t = 0$ dürfen wir auch Inertialkoordinaten nehmen, mit $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) = (\hat{x}_I, \hat{y}_I, \hat{z}_I)$. Dann finden wir:

$$\begin{aligned}
\vec{L}_s &= (\omega_1 I_1, \omega_2 I_2, \omega_3 I_3) \\
\vec{\omega} \times \vec{L}_s &= \Big(\omega_2\omega_3(I_3 - I_2), \omega_1\omega_3(I_1 - I_3), \omega_1\omega_2(I_2 - I_1)\Big) \\
I_{ij}\vec{e}_i\dot{\omega}_j &= (I_1\dot{\omega}_1, I_2\dot{\omega}_2, I_3\dot{\omega}_3)
\end{aligned}$$

und dadurch (für $\vec{N}_s = 0$ und deshalb $I_{ij}\vec{e}_i\dot{\omega}_j = -\vec{\omega} \times \vec{L}_s$)

$$\begin{aligned}
I_1\dot{\omega}_1 &= (I_2 - I_3)\omega_2\omega_3 \\
I_2\dot{\omega}_2 &= (I_3 - I_1)\omega_3\omega_1 \\
I_3\dot{\omega}_3 &= (I_1 - I_2)\omega_1\omega_2
\end{aligned}$$

Drei 1. Ordnung, *nicht lineare*, gewönliche Differentialgleichungen.
Leider können wir diese nicht genau lösen.

7: Buch in der Luft IV: Annäherung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Was passiert wenn $\omega_1 \gg \omega_2, \omega_3$?
Bis zur linearen Ordnung in den kleineren Komponenten:

$$\dot{\omega}_1 = 0\,, \qquad \dot{\omega}_2 = \frac{(I_3 - I_1)\omega_1}{I_2}\omega_3 \equiv A\omega_3\,, \qquad \dot{\omega}_3 = \frac{(I_1 - I_2)\omega_1}{I_3}\omega_2 \equiv -B\omega_2$$

Deshalb ist $\ddot{\omega}_3 = -AB\omega_3$, und $\omega_3 = \omega_{3,0}\sin(\sqrt{AB}t + \beta)$.
Die kleinen Komponenten bleiben klein. Das Gleiche passiert wenn $\omega_3 \gg \omega_1, \omega_2$.

Aber für $\omega_2 \gg \omega_1, \omega_3$ (das Buch dreht sich um die y-Achse):

$$\dot{\omega}_2 \simeq 0\,, \qquad \dot{\omega}_1 = \frac{(I_2 - I_3)\omega_2}{I_1}\omega_3 \equiv -A\omega_3\,, \qquad \dot{\omega}_3 = \frac{(I_1 - I_2)\omega_2}{I_3}\omega_1 \equiv -B\omega_1\,.$$

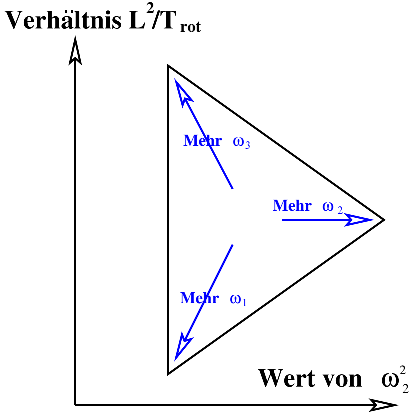
Deshalb ist $\ddot{\omega}_1 = +AB\omega_1$ und $\omega_1(t) = c_1\exp(\sqrt{AB}t) + c_2\exp(-\sqrt{AB}t)$
Störungen nehmen exponentiell zu!

8: Buch in der Luft V: Warum?

Rotationsenergie und Eigendrehimpuls sind beide erhalten.

$$T_{\mathrm{rot}} = \frac{1}{2}\left(I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2\right) \quad \text{und} \quad L^2 = I_1^2\omega_1^2 + I_2^2\omega_2^2 + I_3^2\omega_3^2 \, .$$

Betrachten Sie das Verhältnis $L^2/2T_{\mathrm{rot}}$.
Es ist auch eine Erhaltungsgröße.
Wenn $\omega_1 \gg \omega_2, \omega_3$ hat das Verhältnis seinen Minimalwert.
Bei $\omega_3 \gg \omega_1, \omega_2$ ist es maximal.
Aber bei $\omega_2 \gg \omega_1, \omega_3$ ist es in der Mitte.
Es hat auch einen Mittelwert, wenn $\omega_1 \sim \omega_3 \sim \omega_2$.



9: Die Euler'sche Winkel

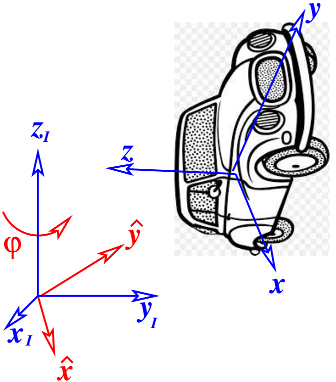
Wie sieht dieses Verhalten für einen externen Beobachter aus?
Dafür muss ich die Einheitsvektoren des Körpersystems besser verstehen.

Die $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ brauchen jeder 3 Zahlen: 9 Zahlen insgesamt.
Aber $|\vec{e}_1| = 1 = |\vec{e}_2| = |\vec{e}_3|$ – 3 Bedingungen lassen nur 6 freie Zahlen.
Und $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = 0 = \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3 = \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3$ – 3 Bedingungen mehr.
Am Ende benötigen wir 3 Zahlen, um die drei Einheitsvektoren zu spezifizieren.

Wie kann ich alle drei Vektoren beschreiben, mit nur 3 Zahlen?
Die *Eulerschen Winkel* sind ein Standard,
die 3 Einheitsvektoren mit 3 Winkeln zu beschreiben.
Man kann sie als Anweisungen verstehen,
von den Inertialsystemkoordinaten zu den Körperkoordinaten zu gelangen:

$$\begin{aligned}
(x_I, y_I, z_I) \quad &\rightarrow \varphi - \text{rotation} \rightarrow \quad (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) \\
(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) \quad &\rightarrow \theta - \text{rotation} \rightarrow \quad (\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}) \\
(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}) \quad &\rightarrow \psi - \text{rotation} \rightarrow \quad (x, y, z)
\end{aligned}$$

10: Präzessionswinkel



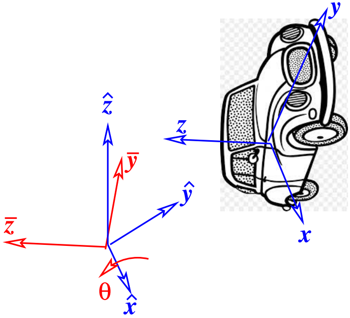
Zuerst rotiere ich um die z_I-Achse,
bis $\hat{x}$ senkrecht mit $\vec{e}_z$ ist
(oder, bis $\hat{x}$ in der (x, y)-Ebene liegt)
Der Winkel dieser Drehung heißt
φ **der Präzessionswinkel**

($\hat{z} = z_I$, $\hat{x}$, $\hat{y}$ sind neu)

Ein Vektor $\vec{A}_I$ ändert sich durch:

$$\begin{bmatrix} \hat{A}_x \\ \hat{A}_y \\ \hat{A}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{Ix} \\ A_{Iy} \\ A_{Iz} \end{bmatrix}$$

11: Nutationswinkel



Zumnächst rotiere ich um die $\hat{x}$-Achse,
bis $\overline{z}$ zeigt in der z-Richtung.
(Immer möglich, weil $e_{\hat{x}} \cdot e_z = 0$.)
Der Winkel dieser Drehung heißt
θ **der Nutationswinkel.**

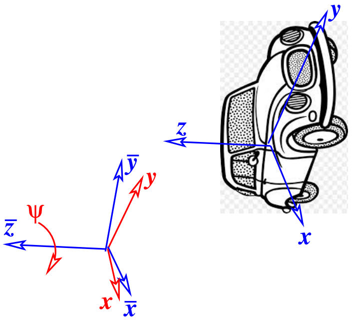
($\overline{z} = z$, die anderen zwei sind
Zwischenschritte.)

$\hat{\vec{A}}$ ändert sich durch:

$$\begin{bmatrix} \overline{A}_x \\ \overline{A}_y \\ \overline{A}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{A}_x \\ \hat{A}_y \\ \hat{A}_z \end{bmatrix}$$

12: Eigenrotationswinkel

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT



Am Ende rotiere ich um die $\overline{z}$-Achse,
bis die x, y Richtungen richtig sind.
(Immer möglich, weil $\overline{z} = z$.)
Der Winkel dieser Drehung heißt
ψ **der Eigenrotationswinkel.**

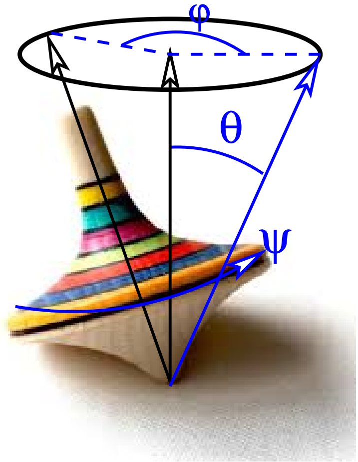
$\vec{A}$ ändert sich durch:

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{A}_x \\ \overline{A}_y \\ \overline{A}_z \end{bmatrix}$$

13: Was sind die Euler'schen Winkel?

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Betrachten Sie einen Kreisel, zum Beispiel.



θ (Nutationswinkel):
wie weit von senkrecht (vertikal) die Achse ist

φ (Präzessionswinkel):
in welche Richtung die Achse nicht vertikal ist

ψ (Eigenrotationswinkel):
wie weit sich der Kreisel gedreht hat

13.5: Euler'sche Winkel und Erde

θ: Achse ist nicht senkrecht der Ekliptikebene
φ: Achse zeicht nicht immer nach Polaris: 26.000 Jahre Periode...
ψ: Erde dreht. Periode = 23.934 Stunden...

14: Drehimpuls und Euler'sche Winkel

Wenn mein starrer Körper sich dreht

- gibt es eine Drehgeschwindigkeit $\vec{\omega}$
- ändern sich die 3 Euler'sche Winkel: $\dot{\varphi}$, $\dot{\theta}$, $\dot{\psi}$.

Was ist die Beziehung zwischen $\vec{\omega}$ und $\dot{\varphi}$, $\dot{\theta}$, $\dot{\psi}$?
Wir schreiben $\vec{\omega} = \vec{\omega}_\varphi + \vec{\omega}_\theta + \vec{\omega}_\psi$, wobei $\omega_{\varphi,\theta,\psi}$ die Komponenten sind, die aus $\dot{\varphi}$, $\dot{\theta}$, und $\dot{\psi}$ entstehen.
Wenn nur $\dot{\varphi} \neq 0$, dann finde ich *im Inertialsystem*,

$$\vec{\omega}_{I,\varphi} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{\omega}_\varphi = \begin{bmatrix} \dot{\varphi}\sin(\psi)\sin(\theta) \\ \dot{\varphi}\cos(\psi)\sin(\theta) \\ \dot{\varphi}\cos(\theta) \end{bmatrix}$$

Hier habe ich die θ, ψ Rotationsmatrizen auf $\vec{\omega}_{I,\varphi}$ operiert.
Wenn $\dot{\theta} \neq 0$ finde ich, in $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ System,

$$\bar{\omega}_\theta = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{\omega}_\theta = \begin{bmatrix} \cos(\psi)\ \dot{\theta} \\ \sin(\psi)\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Für $\dot{\psi}$ habe ich direkt im Körperkoordinatensystem:

$$\vec{\omega}_\psi = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{\omega}_{\text{gesamt}} = \begin{bmatrix} \sin(\theta)\sin(\psi)\ \dot{\varphi} + \cos(\psi)\ \dot{\theta} \\ \sin(\theta)\cos(\psi)\ \dot{\varphi} - \sin(\psi)\ \dot{\theta} \\ \cos(\theta)\ \dot{\varphi} + \dot{\psi} \end{bmatrix}$$

15: Kinetische Energie und Euler'sche Winkel

Wenn ich die Hauptachse als Körperachse benutze, finde ich:

$$T_{\text{rot}} = \frac{1}{2}\omega_i\omega_j I_{ij} = \frac{1}{2}\left(I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2\right)$$

Die ω-Komponenten habe ich gerade gefunden.
Der Antwort ist kompliziert. Aber wenn $I_1 = I_2$ ist es einfacher:

$$T_{\text{rot}} = \frac{I_1}{2}\left(\dot{\varphi}^2\sin^2(\theta) + \dot{\theta}^2\right) + \frac{I_3}{2}(\dot{\varphi}\cos(\theta) + \dot{\psi})^2$$

Zwei Koordinaten sind zyklisch. 3 Erhaltungsgrößen für 3 Koordinaten (die drei Winkel).
Ich kann die Erhaltungsgröße benutzen, alles zu lösen....
Aber nicht wenn $I_1 < I_2 < I_3$ (wie schon gesehen)

16: English summary

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

We learned how external forces exert a **torque**:

$$\frac{d}{dt}\vec{L}_s = \sum_\alpha \vec{r}_{r,\alpha} \times \vec{F}_\alpha^{\text{ext}} = \vec{N}_s$$

We saw how a free body's angular frequencies about the 3 axes evolve in a complex way:

$$I_1\dot{\omega}_1 = (I_2 - I_3)\omega_2\omega_3 \qquad \text{and } (1,2,3) \to (2,3,1) \to (3,1,2)$$

If ω_3 or ω_1 dominate, they remain dominant. But if ω_2 dominates, the other components grow exponentially with time.

We introduced the three **Euler's angles** to relate inertial and body-centered coordinates: φ, θ, and ψ the **angles of precession, nutation, and intrinsic rotation**.

For the case $I_1 = I_2$, the kinetic energy of rotation is

$$T_{\text{rot}} = \frac{I_1}{2}\left(\dot{\varphi}^2 \sin^2(\theta) + \dot{\theta}^2\right) + \frac{I_3}{2}(\dot{\varphi}\cos(\theta) + \dot{\psi})^2$$

Eine interesante Frage

Frage: Wie genau würde denn das Potential eines schwarzen Loches außerhalb des Schwarzschildradiuses aussehen? Gibt es ein lokales Minimum des Potentials, also eine (meta)stabile Bahn darum herum?

Antwort: Das is weit außerhalb was wir hier *richtig* diskutieren könnten, aber...

$$E^2 = m^2 c^2 \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + V^2(r, \dot{r})$$

$$V^2 = \left(mc^2 - \frac{2GMm}{r}\right)\left(mc^2 + \frac{(\vec{r} \times \vec{p})^2}{mr^2}\right)$$

Hier ist τ die *Eigenzeit* (nicht Zeit!), und $E = mc^2 + E_{\text{nicht-rel}}$, $V = mc^2 + V_{\text{nicht-rel}}$. Innerhalb der Näherungen $|\vec{v}| \ll c$ und $2GM/r \ll c^2$ findet man

$$V \simeq mc^2 - \frac{GmM}{r} + \frac{m(\vec{r} \times \vec{v})^2}{2r^2} + ...$$

aber für $r < R_{\text{schw.}} = 2GM/c^2$ is $V^2 < 0$....