Theoretische Physik I:

Vorlesung 16: Hamilton II

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Vorlesung 15 hat die Hamilton-Funktion und Hamilton'sche Mechanik eingeführt.

Hamilton'sche Mechanik ist *ungefähr* so einfach/schwer zu lösen wie Lagrange'sche Mechanik. Hamilton'sche Mechanik wird benutzt, weil sie schönere *Eigenschaften* hat.

Diese Woche diskutieren wir weitere Eingenschaften der Hamilton'schen Methodiken:

- **Legendre-Transformation**, $L(q, \dot{q}) \to H(q, p)$ und $H(q, p) \to L(q, \dot{q})$
- **Poisson-Klammern**
- **Kanonische Transformationen**
- (Vorlesung 17) **Phasenraum**
- (Vorlesung 17) **Satz von Liouville**

2: Legendre-Transformation

Wie komme ich von Lagrange nach Hamilton?

- Die Lagrange-Funktion ist $L(q_i, \dot{q}_i)$.
- Für jede $\dot{q}_i$ definieren wir:

$$p_i \equiv \left. \frac{\partial L(q_j, \dot{q}_j)}{\partial \dot{q}_i} \right|_{q_k, \dot{q}_{k \neq i}}$$

- Wir bestimmen die inverse Beziehung zwischen den Variablen: $\dot{q}_i = \dot{q}_i(q_j, p_j)$
- Wir schreiben

$$H(q_i, p_i) = \left(\sum_j p_j \dot{q}_j \right) - L(q, \dot{q})$$

  wobei $\dot{q}_i \equiv \dot{q}_i(q_j, p_j)$ umgeschrieben sein soll.

Diese Transformation wird als Legendre-Transformation bezeichnet.

3: Legendre-Transformation auf $H(q_i, p_i)$

Wir können die gleiche Transformation auf H probieren...

- Die Hamilton-Funktion ist $H(q_i, p_i)$.
- Für jeden p_i definieren wir: $$k_i \equiv \left.\frac{\partial H(q_j, p_j)}{\partial p_i}\right|_{q_k, p_{k \neq i}}$$

  Aber wie letzte Woche schon gesehen, ist:

$$k_i = \frac{\partial}{\partial p_i}\left(\sum_j p_j \dot{q}_j(q,p) - L(q_j, \dot{q}_j(p))\right)$$

$$k_i = \dot{q}_i(q,p) + \sum_j p_j \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial p_i} - \sum_j \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial p_i}\left(\left.\frac{\partial L(q_k, \dot{q}_k)}{\partial \dot{q}_j}\right|_{q_\ell, \dot{q}_{\ell \neq j}}\right)$$

$$k_i = \dot{q}_i(q,p) + \sum_j p_j \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial p_i} - \sum_j \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial p_i}\left(p_j\right) = \dot{q}_i(q,p)$$

  Weil $k_i \equiv \dot{q}_i$ ist, werden wir es weiter als $\dot{q}_i$ schreiben.

4: Legendre Transform auf H, II

$$\text{Wie gesehen, ist} \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H(q_j, p_j)}{\partial p_i}$$

Wie komme ich, denn, von H nach L?

- die inverse Beziehung $p_i = p_i(q_j, \dot{q}_j)$ muss dann die gleiche sein, wie wir das erste Mal gefunden haben.
- $$\text{Wenn wir} \qquad K(q, \dot{q}) \equiv \sum_j \dot{q}_j p_j - H(q_i, p_i)$$

  schreiben, und uns errinern, dass $H = \sum_j p_j \dot{q}_j - L$, dann finden wir $K(q, \dot{q}) = L(q, \dot{q})$.

Eine Legendre-Transformation von $H(q, p)$ ergibt die Lagrange Funktion $L(q, \dot{q})$!

Legendre-Transformation is wie Fourier-Transformation: nach zweimal, kommt man zurück wo man angefangen hat.

5: Poisson-Klammern

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Die Hamilton-Funktion $H(q_i, p_i)$ hat als Variablen q_i, p_i.
Die Hamilton-Gleichungen sehen irgendwie symmetrisch aus:

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_i} \qquad\qquad \dot{q}_i = +\frac{\partial H(q,p)}{\partial p_i} \; .$$

Geht diese Symmetrie weiter? Ja!
Betrachten Sie eine allgemeine Funktion von (q, p): $f(q, p)$.
Das kann zum Beispiel $T(q, p)$, $V(q, p)$, $L_x(q, p)$, xp_x, u.s.w. sein.
Wir finden durch die Kettenregel:

$$\begin{aligned} \frac{df(q,p,t)}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i \left[\frac{\partial f(q,p)}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial f(q,p)}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dt} \right] \\ &= \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i \left[\frac{\partial f(q,p)}{\partial q_i} \frac{\partial H(q,p)}{\partial p_i} - \frac{\partial f(q,p)}{\partial p_i} \frac{\partial H(q,p)}{\partial q_i} \right] \; . \end{aligned}$$

Dies ist der Grund für die Definition der **Poisson-Klammern** von f, g:

$$[f(q,p)\,,\; g(q,p)]_{q,p} \equiv \sum_i \left(\frac{\partial f(q,p)}{\partial q_i} \frac{\partial g(q,p)}{\partial p_i} - \frac{\partial f(q,p)}{\partial p_i} \frac{\partial g(q,p)}{\partial q_i} \right)$$

6: Poisson-Klammern II

Poisson-Klammern und Zeitabhängigkeit:

$$\frac{df(q,p,t)}{dt} = [f(q,p,t)\,,\ H(q,p)] + \frac{\partial f(q,p,t)}{dt}$$

H kontrolliert Zeitabhängigkeit einer *Observablen* durch die Poisson-Klammern.
Wichtige Eigenschaften der Poisson-Klammern:

$$[c_1 f + c_2 g\,,\ h] = c_1\,[f\,,\ h] + c_2\,[g\,,\ h] \qquad \text{Linearität}$$

$$[f\,,\ g] = -\,[g\,,\ f] \qquad \text{Antisymmetrie}$$

$$[c\,,\ f] = 0 \text{ für } c \text{ Konstant} \qquad \text{Null-Element}$$

$$[fg\,,\ h] = f\,[g\,,\ h] + [f\,,\ h]\,g \qquad \text{Produkt}$$

$$0 = [f\,,\ [g\,,\ h]] + [g\,,\ [h\,,\ f]] + [h\,,\ [f\,,\ g]] \qquad \text{Jacobi-Identität}$$

und $\left[q_i\,,\ q_j\right] = 0 = \left[p_i\,,\ p_j\right]$ aber $\left[q_i\,,\ p_j\right] = \delta_{ij}$ fundamentale Poisson-Klammern

Jacobi braucht 1 Seite Papier + viel Geduld. Die Andere sind relativ einfach zu beweisen.

7: Poisson-Klammern: Beispiel I

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wir brauchen ein Beispiel: der harmonische Oszillator

$$H(x,p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{kx^2}{2}$$

ohne Calculus, nur durch symbolische Manipulation finden wir:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}x &= \left[x\,,\ \frac{kx^2}{2} + \frac{p^2}{2m}\right] \\
\dot{x} &= \frac{k}{2}\left[x\,,\ x^2\right] + \frac{1}{2m}\left[x\,,\ p^2\right] \\
\dot{x} &= \frac{k}{2}\left(x\,[x\,,\ x] + [x\,,\ x]\,x\right) + \frac{1}{2m}\left(p\,[x\,,\ p] + [x\,,\ p]\,p\right) \\
\dot{x} &= \frac{k}{2}\,(0+0) + \frac{1}{2m}\,(p*1 + 1*p) = \frac{p}{m}
\end{aligned}$$

8: Poisson-Klammern, Beispiel II

$$H(x, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{kx^2}{2}$$ weiter rechnen:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}p &= \left[p\,,\ \frac{kx^2}{2} + \frac{p^2}{2m}\right] \\
\dot{p} &= \frac{k}{2}\left(\left[p\,,\ x^2\right]\right) + \frac{1}{2m}\left(\left[p\,,\ p^2\right]\right) \\
\dot{p} &= \frac{k}{2}\left(x\,[p\,,\ x] + [p\,,\ x]\,x\right) + \frac{1}{2m}\left(p\,[p\,,\ p] + [p\,,\ p]\,p\right) \\
\dot{p} &= \frac{k}{2}\left(-x - x\right) + \frac{1}{2m}(0 + 0) = -kx\,.
\end{aligned}$$

Beide Bewegungsgleichungen *ohne* Calculus – nur Algebra!

9: Poisson-Klammern: Wichtigkeit

Ja, aber warum?

- Die Poisson-Klammern erfassen die Symmetrien des Hamilton'schen Systems.
- Calculus kann durch Algebra ersetzt werden.
- *Wie wir nächstes Semester sehen werden,* sind die Poisson-Klammern wesentlicher Bestandteil beim Übergang von einer klassischen zu einer Quantenbeschreibung eines Systems.

Es gibt relativ wenig Probleme, die einfacher sind zu lösen mit Hilfe der Poisson-Klammern als ohne. Aber sie sind wichtig für die formale Entwicklung der Hamilton'sche Mechanik.

10: Punkttransformationen

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Im Lagrange-Formalismus kann ich Koordinatentransformationen (die auch Punkttransformationen genannt werden) machen: wenn $Q_i = Q_i(q_j, t)$ neue Koordinaten sind, und die Relation zwischen Q_i und q_i invertierbar ist (d.h., $q_i = q_i(Q_j, t)$), kann ich L auch umschreiben:

$$L'(Q, \dot{Q}, t) = L(q(Q, t), \dot{q}(Q, \dot{Q}, t), t)$$

Wir haben schon gesehen, dass

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial q_i} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial L'(Q, \dot{Q}, t)}{\partial \dot{Q}_i} = \frac{\partial L'(Q, \dot{Q}, t)}{\partial Q_i} \, .$$

Die P_i sind auch transformiert:

$$p_i = \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}_i} \quad \Leftrightarrow \quad P_i = \frac{\partial L'(Q, \dot{Q}, t)}{\partial \dot{Q}_i}$$

11: Punkttransformationen

Wenn ich $q_i \to Q_i(q,t)$ ersetze, ändert sich auch meine Hamilton-Funktion:

$$H(q,p,t) \quad \Rightarrow \quad H'(Q,P,t) \equiv \sum_i P_i \dot{Q}_i - L'(Q,\dot{Q},t)$$

Die Hamilton'sche Gleichungen sind natürlich

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= +\frac{\partial H(q,p,t)}{\partial p_i} & \Leftrightarrow & & \dot{Q}_i &= +\frac{\partial H'(Q,P,t)}{\partial P_i} \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H(q,p,t)}{\partial q_i} & \Leftrightarrow & & \dot{P}_i &= -\frac{\partial H'(Q,P,t)}{\partial Q_i} \end{aligned}$$

Die zwei Systeme sehen ungleich aus, aber die Physik ist natürlich gleich – sie sind das gleiche System, nur in anderen Koordinaten.

12: Triviales Beispiel

Harmonischer Oszillator

$$L(q,\dot{q}) = \frac{m}{2}\dot{q}^2 - \frac{D}{2}q^2 \quad \Rightarrow \quad p = m\dot{q} \quad \Rightarrow \quad H(q,p) = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{D}{2}q^2 \,.$$

Euler-Lagrange und Hamilton Gleichungen:

$$m\ddot{q} = -Dq\,, \qquad \dot{q} = \frac{p}{m}\,, \quad \dot{p} = -Dq\,.$$

Wir nennen $Q = q/2$. Deshalb ist $\dot{Q} = \dot{q}/2$.
Invertierbar: $q = 2Q$ und $\dot{q} = 2\dot{Q}$. Nach einfacher Arbeit finden wir:

$$L'(Q,\dot{Q}) = 2m\dot{Q}^2 - 2DQ^2 \quad \Rightarrow \quad P = 4m\dot{Q} \quad \Rightarrow \quad H'(Q,P) = \frac{1}{8m}P^2 + 2DQ^2 \,.$$

(Bemerkung: $P = 2p$, obwohl $Q = q/2$.) Euler-Lagrange und Hamilton Gleichungen:

$$4m\ddot{Q} = -4DQ\,, \qquad \dot{Q} = \frac{P}{4m}\,, \quad \dot{P} = -4DQ\,.$$

Die Gleichungen sind äquivalent.
Während jedoch Q und $\dot{Q}$ beide kleiner werden, wird P größer; während also $dQd\dot{Q} = dqd\dot{q}/4$, wird $dQdP = dqdp$.

13: Weiteres Beispiel, Hamilton'sche Mechanik

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Betrachten Sie ein System mit 2 Teilchen und einer Zentralkraft:

$$H(\vec{r}_i, \vec{r}_2, \vec{p}_1, \vec{p}_2) = \frac{\vec{p}_1^2}{2m_1} + \frac{\vec{p}_2^2}{2m_2} + V(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)\,.$$

(Dies könnten wir aus einer Lagrangefunktion ableiten, aber wir können es auch direkt schreiben.) Die Hamilton'sche Gleichungen sind

$$\dot{\vec{r}}_1 = \frac{\vec{p}_1}{m_1}\,, \quad \dot{\vec{p}}_1 = -\vec{\nabla}_{r_1} V(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) = -\frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} V'(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)\,,$$

und ähnlich für r_2.

14: Hamilton Beispiel: Koordinatenänderung

Wir können die neuen Koordinaten einführen:

$$\vec{r}_s = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}, \qquad \vec{r}_r = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

Dies können wir in Matrixnotation umschreiben:

$$\begin{bmatrix} \vec{r}_s \\ \vec{r}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{m_1}{m_1+m_2} & \frac{m_2}{m_1+m_2} \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{r}_1 \\ \vec{r}_2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} \vec{r}_1 \\ \vec{r}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{m_2}{m_1+m_2} \\ 1 & \frac{m_1}{m_1+m_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{r}_s \\ \vec{r}_r \end{bmatrix}$$

Die zweite Matrix ist die Inversmatrix der ersten Matrix.
Wir haben gefunden: $\frac{\partial P_i}{\partial p_j} = \frac{\partial q_j}{\partial Q_i}$, die Transponierte der zweiten Matrix:

$$\begin{bmatrix} \vec{p}_s \\ \vec{p}_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{m_2}{m_1+m_2} & \frac{m_1}{m_1+m_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{p}_1 \\ \vec{p}_2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} \vec{p}_1 \\ \vec{p}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{m_1}{m_1+m_2} & -1 \\ \frac{m_2}{m_1+m_2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{p}_s \\ \vec{p}_r \end{bmatrix}$$

Nach viel Algebra finden wir:

$$\frac{\vec{p}_1^2}{2m_1} + \frac{\vec{p}_2^2}{2m_2} = \frac{\vec{p}_s^2}{2(m_1 + m_2)} + \frac{(m_1 + m_2)\vec{p}_r^2}{2m_1 m_2} = \frac{\vec{p}_s^2}{2M} + \frac{\vec{p}_r^2}{2\mu}.$$

15: Hamilton Beispiel: Bewegungsgleichungen

Unsere Hamilton-Funktion

$$H(\vec{r}_s, \vec{r}_r, p_s, p_r) = \frac{\vec{p}_s^2}{2M} + \frac{\vec{p}_r^2}{2\mu} + V(|\vec{r}_r|)$$

hat als Hamilton'sche Bewegungsgleichungen:

$$\dot{\vec{r}}_s = \frac{\partial H}{\partial \vec{p}_s} = \frac{p_s}{M} \qquad \dot{\vec{p}}_s = -\frac{\partial H}{\partial \vec{r}_s} = 0$$

$$\dot{\vec{r}}_r = \frac{\partial H}{\partial \vec{p}_r} = \frac{p_r}{\mu} \qquad \dot{\vec{p}}_r = -\frac{\partial H}{\partial \vec{r}_r} = -\frac{\vec{r}_r}{|r_r|} V'(|r_r|)\,.$$

Wie erwartet finden wir, dass r_s zyklisch ist, und die Kraft für die Relativkoordinate $\vec{r}_r$ ist $\vec{F}_r = -\vec{\nabla} V$.

16: Für das nächste Mal

Unter Koordinatentransformation ändert sich $\prod_i dq_i d\dot{q}_i$.
Aber $\prod_i dq_i dp_i$ ändert sich nicht.
Das wird uns ermöglichen, das Konzept des **Phasenraums** einzuführen.

Mit dem Lagrange-Formalismus können wir Transformationen an unseren Koordinaten durchführen. Aber der Hamilton'sche Formalismus wird auch allgemeinere Sätze von Transformationen zwischen den (q, p) erlauben.

17: English summary

We discussed several formal aspects of Hamiltonian dynamics and its relation with Lagrangian dynamics:

The **Legendre transform** carries us from $L(q, \dot{q}, t)$ to $H(q, p, t)$. But the exact same transformation, carried out on H, brings us back to L!

Poisson brackets

$$[f\,,\;g] \equiv \sum_i \left(+ \frac{\partial f(q,p,t)}{\partial q_i} \frac{\partial g(q,p,t)}{\partial p_i} - \frac{\partial g(q,p,t)}{\partial q_i} \frac{\partial f(q,p,t)}{\partial p_i} \right)$$

capture the dynamics:

$$\frac{df(q,p,t)}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + [f\,,\;H]$$

and have formal properties which allow some problems to be solved algebraically. They will be important in quantum mechanics.

Just as coordinate transformations $Q_i = Q_i(q)$ recast the Lagrangian without changing the underlying dynamics, they also recast the Hamiltonian. However, whereas the integration measure $\prod_i dq_i d\dot{q}_i$ can change, the measure $\prod_i dq_i dp_i$ does not. We will see the consequences in the next lecture.

18: Zwei Fragen

Frage (oder Kommentar): Kaos/kaotisch $\Rightarrow$ Chaos/chaotisch.
Antwort (oder Entschuldigung): Oups. Stimmt – Chaos auf Deutsch.

Frage: ist die Zeit-integrierte Hamiltonfunktion minimiert?

$$\delta \int_{t_i}^{t_f} H(q(t), p(t))\, dt = ?$$

Antwort: Nein.
Die Zeitintegral der Lagrangefunktion $S = \int L(q, \dot{q})\, dt$ ist minimiert, aber $\int H(q(t), p(t))\, dt$ ist nicht.
1 Punkt für Lagrangefunktionen.
Aber $dH(q(t), p(t))/dt = 0$ ist (oft) eine Erhaltungsgröße.
1 Punkt für Hamiltonfunktionen.

19: Fals ich mehr Platz brauche