Zwangsbedingungen, so weit:

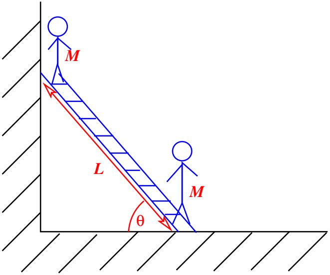
- Koordinaten finden, wobei die Zwangsbedingungen trivial sind: $r = R$ oder $\theta = \pi/2$ oder....
- Diese Koordinaten ignorieren.

Effizient. Aber wir lernen nicht die Stärke der Zwangskräfte.

Lagrange I ist eine Methode, um die Zwangskräfte auch zu rechnen.

Wir werden die Methode der Lagrange-Multiplikatoren benutzen....

2: Beispiel Problem



Mein Bruder und ich stehen auf einer Leiter. 4 Koordinaten (x_1, y_1, x_2, y_2) haben 3 Zwangsbedingungen: $x_1 = 0$, $y_2 = 0$, $y_1^2 + x_2^2 = L^2$.
Wir können alles mit einer Koordinate θ schreiben. Wir haben schon gesehen:

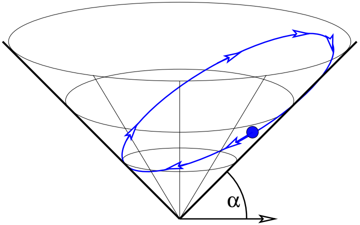
$$L(\theta) = \frac{ML^2\dot{\theta}^2}{2} - MgL\sin(\theta)$$

Aber ist die Normalkraft gegen die Wand immer positiv? Wenn sie negativ wird, verlässt die Leiter die Wand!

Ich muss alle Normalkräfte irgendwie rechnen.
Der Vorteil von **Lagrange II** war, dass ich Normalkräfte ignorieren konnte.
Aber jetzt brauche ich die Normalkräfte!

3: Einfacheres Beispiel

Um die Methodik zu lernen, betrachten wir ein Beispiel mit nur einer Zwangsbedingung: ein Teilchen auf einem Kegel.

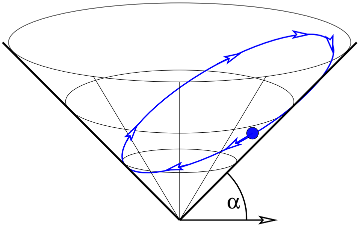


Lagrange II: 2 Koordinaten φ, ρ. Auch z, aber: Zwangsbedingung: $z = \rho \tan(\alpha)$

$$
\begin{aligned}
L &= \frac{m}{2}\left(\rho\dot{\varphi}^2 + \dot{\rho}^2 + \tan^2(\alpha)\dot{\rho}^2\right) - mg\rho\tan(\alpha) \\
&= \frac{m}{2}\left(\rho\dot{\varphi}^2 + \sec^2(\alpha)\,\dot{\rho}^2\right) - mg\rho\tan(\alpha)
\end{aligned}
$$

Euler-Lagrange:
$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}m\rho^2\dot{\varphi} &= 0 \quad \text{(zyklische Koordinate)} \\
m\sec^2(\alpha)\,\ddot{\rho} &= m\rho\dot{\varphi}^2 - mg\tan(\alpha)\,.
\end{aligned}
$$

Aber wie stark ist meine Normalkraft??



Wir schreiben unsere Lagrangefunktion mit *allen drei* generalisierten Koordinaten:

$$L = \frac{m}{2}\left(\rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{\rho}^2 + \dot{z}^2\right) - mgz - \lambda[z - \rho\tan(\alpha)]$$

Hier ist λ ein Lagrangemultiplikator und $z - \rho\tan(\alpha) = f(q_i)$ ist unsere Zwangsbedingung.

Wir finden die Bewegungsgleichungen, und dann stellen wir λ auf die richtige Größe ein, so dass unsere Zwangsbedingung erfüllt wird, d.h., $z - \rho\tan(\alpha) = 0$.

5: Lagrange I Beispiel

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

$$L = \frac{m}{2}\left(\rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{\rho}^2 + \dot{z}^2\right) - mgz - \lambda[z - \rho\tan(\alpha)] \tag{1}$$

$$m\ddot{z} = -mg - \lambda \qquad \text{Euler-Lagrange } z \tag{2}$$

$$m\ddot{\rho} = m\rho\dot{\varphi}^2 + \lambda\tan(\alpha) \qquad \text{Euler-Lagrange } \rho \tag{3}$$

$$\frac{d}{dt}m\rho^2\dot{\varphi} = 0 \qquad \text{Euler-Lagrange } \varphi \tag{4}$$

Newton II is: $m\ddot{z} = F_z = -mg + Z$.
Dann ist $-\lambda$ die Komponente der Zwangskraft in der z-Richtung.
Und $\lambda\tan(\alpha)$ ist die Komponente der Zwangskraft in der ρ-Richtung.

Plan:

- $z - \rho\tan(\alpha) = 0$ benutzen, um die Gleichungen zu den **Lagrange II** Gleichungen zu reduzieren,
- Diese lösen,
- λ davon rechnen, um die Zwangskräfte zu finden.

6: Beispiel II

Wir wollen λ finden, so dass $z - \rho\tan(\alpha) = 0$.
Aber wenn $z = \rho\tan(\alpha)$ ist, ist $\ddot{z} = \tan(\alpha)\,\ddot{\rho}$.

$$m\ddot{z} = -mg - \lambda \quad \Rightarrow \quad m\tan(\alpha)\ddot{\rho} + mg = -\lambda$$

Diesen λ-Wert können wir in die ρ-Euler-Lagrange Gleichung einsetzen:

$$m\ddot{\rho} = m\rho\dot{\varphi}^2 + \tan(\alpha)\,(-mg - m\tan(\alpha)\ddot{\rho}) \quad \Rightarrow \quad m\sec^2(\alpha)\ddot{\rho} = m\rho\dot{\varphi}^2 - mg\tan(\alpha)$$

Alte Euler-Lagrange Gleichung!

Wenn wir die Zwangsbedingungen benutzen, dann reduzieren sich die Gleichungen auf die vorherigen Euler-Lagrange (II) Gleichungen. Aber jetzt haben wir

- Gleichungen, um die λ-Werte zu rechnen,
- Beziehungen zwischen λ-Werte und Zwangskräften

7: Lagrange I Methode

Betrachten wir ein System mit N generalisierten Koordinaten und k Zwangsbedingungen. Die Lagrangefunktion wäre $\bar{L}(q_j, \dot{q}_j)$ wenn wir die Zwangsbedingungen ignorierten.
Die Zwangsbedingungen sind $f_s(q_j) = 0$, $s = 1, \ldots, k$.

Die **Lagrange I** Methode ist:

- Lagrangefunktion mit Lagrange-Multiplikatoren schreiben:

$$L = \bar{L}(q_j, \dot{q}_j) - \sum_s \lambda_s f_s(q_j)$$

- Die N Euler-Lagrangegleichungen davon rechnen
- Die λ-Werte so auswählen, dass die k Zwangsbedingungen $f_s(q_j) = 0$ alle stimmen

Wir haben N Euler-Lagrangegleichungen plus k Zwangsbedingungen, um die N Koordinaten und k λ-Werte zu ermitteln.

8: Beweis I

Wie können wir beweisen, dass diese Methode richtig ist?
Betrachten wir ein Problem mit N generalisierten Koordinaten und k Zwangsbedingungen.
Wir können Koordinaten so verwenden, dass alle $q_{N-k+1}, \ldots, q_N = 0$ sind.
Das heißt, die Zwangsbedingungen sind

$$f_1(q_j) = q_{N-k+1} = 0\,, \qquad \ldots \qquad f_k(q_j) = q_N = 0$$

Wir schreiben $L(q_i)$ als Funktion von *allen* N generalisierten Koordinaten. Wenn $q_{N-k+1} = 0 = \dot{q}_{N-k+1} = \ldots$ hat $L(q_i)$ den gleichen Wert wie bei **Lagrange II**.
Deshalb sind die ersten $N-k$ EL Gleichungen die gleichen wie vorher.

$$\text{d'Alembert:} \quad \sum_{j=1}^{N} \left[\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} \right] \delta q_j = 0$$

Für $j = 1, \ldots, N-k$ stimmt das wegen der $N-k$ Euler-Lagrange Gleichungen.
Für $j = N-k+1, \ldots, N$ stimmt das, weil $\delta q_j = 0$ ist.

9: Beweis II

Wie vorher, nennen wir $a_{sj} = \partial f_s / \partial q_j$. Für diese Koordinaten sind $a_{sj} = \delta_{s+N-k,j}$. Das heißt, $a_{1,N-k+1} = 1$, ..., $a_{k,N} = 1$, und alle andere sind 0.

$$\text{Es ist automatisch, dass} \qquad \sum_j \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} - \sum_{s=1}^{k} \lambda_s a_{sj} \right) \delta q_j = 0\,. \tag{5}$$

Die ersten $N-k$ Komponenten sind unverändert; die letzten k δq_j-Werte sind 0.
Aber jetzt können wir auch λ_s-Werte finden, wobei die Ausdrücke in Klammern jeder genau 0 sind – wenn

$$\lambda_s = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{N-k+s}} - \frac{\partial L}{\partial q_{N-k+s}}\,.$$

Aber Gleichung (**??**) ist in einer Form, wo wir die Freiheit haben, andere Koordinaten auszuwählen.
Daher gelten diese Gleichungen für alle Koordinatenentscheidungen.
Und sie sind die Euler-Lagrange Gleichungen, die von

$$L = \bar{L}(q_j, \dot{q}_j) - \sum_s \lambda_s f_s(q_j) \quad \text{abgeleitet sind.}$$

10: Zahl der Gleichungen?

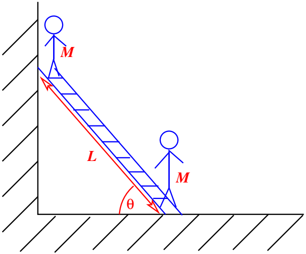
Aus dieser Lagrangefunktion können wir die folgenden Euler-Lagrange Gleichungen ableiten:

$$\frac{d}{dt}p_j - \frac{\partial L}{\partial q_j} = \sum_{s=1}^{k} a_{sj}\lambda_s$$

Hier haben wir N Gleichungen, für $N - k$ unbekannte Koordinaten und k unbekannte λ-Werte. Genau genug, um alles zu rechnen!

(Man kann auch sagen, dass wir N unbekannte Koordinaten haben – aber k mehr Gleichungen: $f_s(q_j) = 0$.)

11: Endlich zurück zu unserem Beispiel



Koordinaten: (θ, x_1, y_2).
Zwangsbedingungen: $x_1 = 0$, $y_2 = 0$.
Lagrangefunktion:

$$
\begin{aligned}
L(\theta, x_1, y_2) = \frac{m}{2}\Big(&2\dot{x}_1^2 + 2\dot{y}_2^2 + L^2\dot{\theta}^2 \\
&+ 2L\cos(\theta)\,\dot{y}_2\dot{\theta} - 2L\sin(\theta)\,\dot{x}_1\dot{\theta}\Big) \\
&- mgL\sin(\theta) - 2mgy_2 \\
&- \lambda_x x_1 - \lambda_y y_2
\end{aligned}
$$

Euler-Lagrange:

$$
\begin{aligned}
2m\ddot{x}_1 - \frac{d}{dt}\left(mL\sin(\theta)\,\dot{\theta}\right) &= -\lambda_x \\
2m\ddot{y}_2 + \frac{d}{dt}\left(mL\cos(\theta)\,\dot{\theta}\right) &= -\lambda_y - 2mg \\
mL^2\ddot{\theta} + \frac{d}{dt}\left(mL(\cos(\theta)\dot{y}_2 - \sin(\theta)\dot{x}_1)\right) &= -mL\left(\dot{y}_2\dot{\theta}\sin(\theta) - \dot{x}_1\dot{\theta}\cos(\theta)\right) - mgL\cos(\theta)
\end{aligned}
$$

12: Weiter mit unserem Beispiel

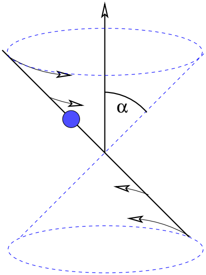
Aber $x_1 = 0 = \dot{x}_1 = \ddot{x}_1$ und $y_2 = 0 = \dot{y}_2 = \ddot{y}_2$. Deshalb finden wir:

$$\begin{aligned}
-\lambda_x &= -\frac{d}{dt} mL \sin(\theta)\dot{\theta} \\
-\lambda_y &= 2mg + \frac{d}{dt} mL \cos(\theta)\dot{\theta} \\
mL^2\ddot{\theta} &= -mgL\cos(\theta)
\end{aligned}$$

Die dritte Gleichung ist genau was wir bei **Lagrange II** gefunden haben. Die anderen zwei Gleichungen geben uns die Normalkräfte in der x-Richtung und in der y-Richtung.

(Wir haben L fest gehalten, und die Spannung der Leiter nicht gelernt. Das dürfen wir – aber wir können dies auch lernen, mit Hilfe eines weiteren Lagrangemultiplicators.)

13: Noch ein weiteres Beispiel



Eine Perle bewegt sich reibungslos entlang eines geraden Drahtes. Der Draht hat einen Winkel α von der Vertikalen und dreht sich mit einer Frequenz ω, wobei er einen Kegel nachzeichnet.
Kugelkoordinaten (r, φ, θ) mit zwei Zwangsbedingungen: $\theta = \alpha$ und $\varphi = \omega t$.

Lagrange II: $$L(r) = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2 \sin^2(\alpha)\omega^2\right) - mgr\cos(\alpha)$$

Euler-Lagrange: $$m\ddot{r} = mr\omega^2 \sin^2(\alpha) - mg\cos(\alpha)$$

Man kann das auch mit **Lagrange I** untersuchen:

$$L(r, \theta, \varphi) = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2(\theta)\,\dot{\varphi}^2\right) - mgr\cos\theta - \lambda_1(\theta - \alpha) - \lambda_2(\varphi - \omega t)$$

14: Beispiel, Folie II

$$L(r,\theta,\varphi) = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2(\theta)\,\dot{\varphi}^2\right) - mgr\cos\theta - \lambda_1(\theta-\alpha) - \lambda_2(\varphi-\omega t) \quad (6)$$

$$m\ddot{r} = mr\dot{\theta}^2 + mr\sin^2(\theta)\dot{\varphi}^2 - mg\cos(\theta) \quad (7)$$

$$m\left(2r\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta}\right) = mr^2\sin(\theta)\cos(\theta)\dot{\varphi}^2 + mgr\sin(\theta) - \lambda_1 \quad (8)$$

$$\frac{d}{dt}mr^2\sin^2(\theta)\dot{\varphi} = -\lambda_2 \quad (9)$$

Wenn ich $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 = 0$ lasse, sind diese die Gleichungen eines freien Teilchens unter der Schwerkraft in Kugelkoordinaten.
Um die Zwangsbedingungen zu erfüllen, muss ich die Werte genau so auswählen, dass $\theta = \alpha$ und $\varphi = \omega t$:

$$\lambda_1 = mgr\sin(\alpha) + mr^2\omega^2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$$

$$\lambda_2 = -2mr\omega\sin^2(\alpha)\dot{r}$$

Für genau diese Werte finde ich danach: $\theta = \alpha$ und $\varphi = \omega t$.
Diese Werte kann ich danach in Gl.(**??**) einschreiben. Ich finde:

$$m\ddot{r} = mr\omega^2\sin^2(\alpha) - mg\cos(\theta) \quad \text{genau wie vorher}$$

15: Zwangskraft und λ-Wert

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Zuerst: Ist es $L = ... - \lambda f(q_i)$, oder $L = ... + \lambda f(q_i)$?
Das ist eine Konvention. Nicht alle Bücher benutzen das gleiche Zeichen.
Wenn ich $-\lambda f() \rightarrow \lambda f()$ tausche, ändert sich der λ-Wert. Aber die Bedeutung des λ-Werts ist auch das Gegenteil. Deshalb sind die Zwangskräfte die gleichen.

Und was ist die Zwangskraft? In der letzten Folie fanden wir, zum Beispiel,

$$mr^2\ddot{\theta} = ... - \lambda_1$$

Deshalb ist $-\lambda_1/r^2 \equiv Z_\theta$ die generalisierte Zwangskraft.
Aber die Koordinaten sind krummlinig. Was ist die echte Beschleunigung? Eine $d\theta$-Änderung entspricht einer Abstand-Änderung $rd\theta$, so dass die wahre Beschleunigung $r\ddot{\theta}$ ist. (Die Einheiten sind auch richtig.)

16: Lagrange I Vorteile und Nachteile

Lagrange I ist komplizierter als **Lagrange II**.
Man hat N, nicht $N - k$, Gleichungen, und muss die k λ-Werte rechnen.
Am Ende findet man die gleichen E-L Gleichungen für die Koordinaten, die unbeschränkt sind.

Warum dann die extra Arbeit?
Wir finden die Normalkräfte. Wenn man die Größe der Normalkräfte wissen will, soll man **Lagrange I** benutzen.
Wenn nicht, kann man bei **Lagrange II** bleiben.

17: English summary

When it is important to determine the size of **normal forces,** one should use the **Lagrange I** formalism:

- Write the Lagrangian in terms of all coordinates, including those which are constrained. But one may use generalized coordinates, typically the same ones one would use with **Lagrange II**.
- Add a Lagrange multiplier term $-\lambda f(q_j)$ for each constraint.
- Find the Euler-Lagrange equations
- Choose the values of the λ_s such that all constraints are obeyed. One may freely use the results of the constraints to help simplify the equations.
- Identify the coefficients λ_s in terms of the normal forces they represent. This may be easiest to see in Cartesian coordinates.

18: Frage 1

Frage: Wir haben gesehen, dass sich unser System auf einer mehrdimensionalen Mannigfaltigkeit im Phasenraum bewegt und dass chaotische Systeme nie zu ihrem Anfangswert zurückkehren. Betrachten wir nun ein beliebiges fest gewähltes chaotisches System mit beliebigen fest gewählten Zwangsbedingungen und beliebigen fest gewählten Anfangsbedingungen. Meine Frage ist: Was genau bestimmt, wie genau sich mein System im Phasenraum bewegt? Ist es nur von den gewählten Anfangsbedingungen abhängig? Kann ich das chaotische System also so auffassen, dass ich eine Art unendlich lange, geschlossene Phasentrajektorie habe und ich mit den Anfangsbedingungen nur festlege, an welchem Punkt der Trajektorie ich mit der Bewegung durch den Phasenraum starte?

19: Frage 1 Antwort

Antwort: Lagrangefunktion + Anfangsdaten = einzigartige Phasenraumbahn. Generisch (aus einer Menge der Größe Null) ist die Bahn offen, das heißt, unendlich lang und kommt nie zurück auf den Anfangspunkt.
Diese Bahn passt *nicht* durch jeder Punkt auf der Mannigfaltigkeit der Punkte mit den gleichen Erhaltungsgrößen. Sie verläuft jedoch beliebig nahe an jedem solchen Punkt, so dass sie in der Mannigfaltigkeit dicht ist.

20: Frage 2

Frage: Bei Lecture 17 auf Folie 12 steht beim Satz von Liouville auf der linken Seite die partielle Ableitung. Wieso? Und warum folgt daraus, dass sich $P(q, p, t)$ durch die Zeit nur ändert, weil p, q sich ändern? Sollte die Wahrscheinlichkeitsdichte nicht auch invariant unter der Zeit sein?

Antwort: $P(q, p, t)$ ändert sich auf 3 Grunden:

- Ich betrachte die gleiche (q, p) Werten, aber eine andere Zeit: $\partial P(q, p, t)/\partial t$
- Ich betrachte die gleiche Zeit und p, aber einen anderen q-Wert: $\partial P(q, p, t)/\partial q$
- Ich betrachte die gleiche Zeit und q, aber einen anderen p-Wert: $\partial P(q, p, t)/\partial p$

Liouville: Wenn Zeit sich ändert, und (q, p) sich ändert, wie sie durch Zeit unter Hamilton'sche Gleichungen sich ändern, ändert sich $P(q, p, t)$ nicht:

$$\frac{\partial P(q,p,t)}{\partial t} = -\dot{q}\frac{\partial P(q,p,t)}{\partial q} - \dot{p}\frac{\partial P(q,p,t)}{\partial p} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial P}{\partial t} + \dot{q}\frac{\partial P}{\partial q} + \dot{p}\frac{\partial P}{\partial p} = 0\,.$$

21: Platz für Bilder