Theoretische Physik I:

Vorlesung 19: Schwingungen I

Dieser Kurs hat 3 Komponenten:

Kernthemen

- Zusammenfassung der Newton'sche Mechanik
- Minimierung der Wirkung, Lagrange II
- Symmetrie, Nöther
- Lagrange I
- Hamilton'sche Mechanik, Phasenraum, Liouville

Anwendungen

- Zentralkraft: das grundsätzliche Problem der Mechanik
- Starre Körper: wenn Objekte nicht punktförmig sind
- **Schwingungen: lösbare Systeme mit (extrem) vielen Freiheitsgraden**

Relativität: wenn Objekte sich extrem schnell bewegen

2: Limes der Klassischen Mechanik

- Extrem *schnelle* Teilchen: Relativitätstheorie.
- Extrem *kleine* Systeme: Quantentheorie.
- Extrem *viele* Freiheitsgrade: statistische Physik

In 3 Vorlesungen diskutieren wir eine Annäherung, wobei Systeme mit extrem vielen Freiheitsgraden trotzdem lösbar sein können: **kleine Schwingungen**

Dieses Problem hat auch viele Anwendungen.
Wir werden die Lösungen in *statistischer Physik* oft brauchen.
Sie sind auch im Maschinenbau usw. oft gebraucht.

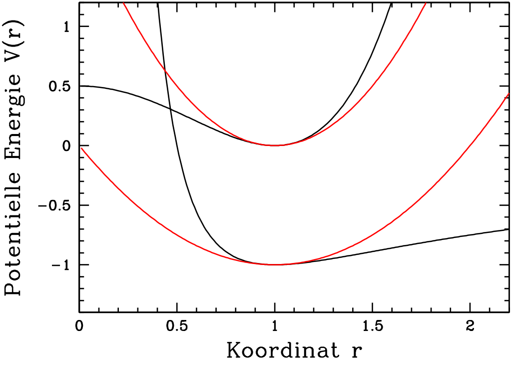
Betrachten Sie:

$$H(p, q) = \frac{1}{2m}p^2 + V(q)$$

$V(q)$ hat ein Minimum bei q_0
Bei kleinen Ausflügen: Taylor

$$V(q) = V(q_0) + \cancel{(q - q_0)V'(q_0)} \rightarrow 0$$
$$+ \frac{(q - q_0)^2}{2} V''(q_0)$$
$$+ \frac{(q - q_0)^3}{6} V'''(q_0) + \ldots$$

$V'(q_0) = 0$ weil $V(q_0)$ ein Minimum ist.



4: Schwingungen: lösen

$$V(q) = V(q_0) + \frac{(q-q_0)^2}{2} V''(q_0) + \frac{(q-q_0)^3}{6} V'''(q_0) + ...$$

Bei kleiner $(q - q_0)$ können wir $(q - q_0)^3$ usw. vergessen, und $V(q) \to V(q) - V(q_0)$, $V''(q_0) \equiv D$, $q - q_0 = Q$, neu benennen:

$$H(Q,p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{DQ^2}{2} \,.$$

Die Bewegungsgleichungen sind

$$\dot{p} = -DQ \,, \quad \dot{Q} = \frac{p}{m} \quad \Rightarrow \quad \ddot{Q} = -\omega_0^2 Q \,, \quad \omega_0 \equiv \sqrt{D/m}$$

Die allgemeine Lösung ist:

$$Q(t) = Q_0 \sin(\omega_0 t + \phi) \,, \qquad p(t) = m\omega Q_0 \cos(\omega_0 t + \phi) \,.$$

5: gedämpft harmonischer Oszillator

Oszillatoren sind oft gedämpft. Das folgt nicht aus einer Lagrangefunktion, aber wir können es phänomenologisch angehen:

$$m\ddot{Q} + c\dot{Q} + DQ = 0\,, \qquad c \text{ die Dämpfung}$$

mit $\omega_0^2 \equiv D/m$ die ungedämpfte Winkelfrequenz.
Wir schreiben auch $\gamma \equiv c/2m$, und machen einen Ansatz:

$$Q(t) = Q_0 e^{\lambda t} \quad \Rightarrow \quad Q_0(\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2) = 0$$

Die Lösungen sind

$$\lambda = -\gamma \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \quad \text{oder} \quad \lambda = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

$$Q(t) = \begin{cases} e^{-\gamma t}\left(c_1 \cos(t\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}) + c_2 \sin(t\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2})\right) & \omega_0 > \gamma \\ e^{-\gamma t}\left(c_1 + c_2 t\right) & \omega_0 = \gamma \\ e^{-\gamma t}\left(c_1 e^{-t\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}} + c_2 e^{+t\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}}\right) & \gamma > \omega_0 \end{cases}$$

6: Erzwungene Schwingungen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Dies haben Sie auch schon gesehen:

$$H(p, q, t) = \frac{p^2}{2m} + \frac{D}{2}(q - x(t))^2 , \qquad x(t) = x_0 \cos(\omega t)$$

Auch mit Dämpfung:

$$m\ddot{q} + c\dot{q} + Dq = Dx(t) .$$

Wir erwarten eine Antwort der Form:

$$q(t) = q_c \cos(\omega t) + q_s \sin(\omega t)$$

Wir können die zwei kombinieren:

$$q(t) = \mathrm{Re}\, Ae^{-i\omega t} \qquad \text{mit} \quad A = q_c + iq_s$$

Wenn wir diesen Ansatz in unsere Differentialgleichung einfügen, finden wir:

$$A\left(-m\omega^2 - i\omega c + D\right) e^{-i\omega t} = Dx_0 e^{-i\omega t} \quad \Rightarrow \quad A = \frac{Dx_0}{D - i\omega c - m\omega^2}$$

7: Erzwungene Schwingungen

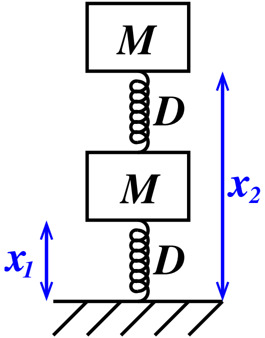
TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wir können die Größe der Schwingungen A als

$$A = |A|e^{i\phi}\,, \qquad |A| = \frac{x_0}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{4\gamma^2\omega^2}{\omega_0^4}}}\,, \qquad \tan\phi = \frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \text{ schreiben.}$$

Bei $\gamma \ll \omega_0$ gibt es ein Resonanz um $\omega = \omega_0$: $A \to x_0\omega_0/2\gamma$, $\phi = \pi/2$.

Wir nennen $Q \equiv \omega_0/2\gamma$ den **Gütefaktor** oder Q-Faktor. So größer Q ist, umso enger die “Bandbreite” wo diese Resonanz passiert, und so größer sind die Schwingungen bei $\omega = \omega_0$.



Und bei zwei Körpern und zwei oder mehr Federn?

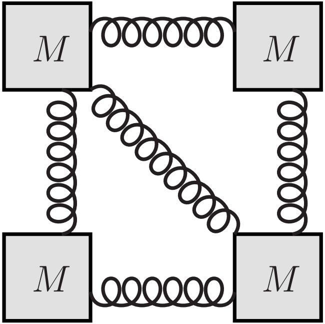
$$L(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2) = \frac{T_{11}}{2}\dot{x}_1^2 + T_{12}\dot{x}_1\dot{x}_2 + \frac{T_{22}}{2}\dot{x}_2^2 - \frac{V_{11}}{2}x_1^2 - V_{12}x_1x_2 - \frac{V_{22}}{2}x_2^2$$

Warum brauche ich T_{12} und V_{12}?
Wie geschrieben, ist $T_{11} = M = T_{22}$ und $T_{12} = 0$, aber $V_{11} = 2D$, $V_{22} = D$, $V_{12} = -D$.
Wenn ich $x_2' = x_2 - x_1$ statt x_1 als Koordinate benutze, ist $V_{11} = D = V_{22}$, $V_{12} = 0$, aber $T_{11} = 2M$, $T_{22} = M$, $T_{12} = M$.

Wenn ich $V_{21} = V_{12}$ und $T_{21} = T_{12}$ definiere, kann ich L als

$$L(x_i, \dot{x}_i) = \sum_{ij} \frac{1}{2}\dot{x}_i T_{ij}\dot{x}_j - \frac{1}{2}x_i V_{ij}x_j \qquad \text{umschreiben.}$$

9: Schwingungen, T_{ij}, V_{ij}



Betrachten Sie ein System von 4 Massen in der Ebene:

$$L = \sum_{i=1}^{4} \frac{M}{2}\left(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2\right) - \frac{D}{2}\left((x_1 - x_3)^2 + (x_2 - x_4)^2 + ...\right)$$

Wenn ich $V(x_i, y_i)$ in ihrer vollen Form ausschreibe, ist sie sehr lang und kompliziert.

Beide T und V sind quadratisch in $\dot{q}$ oder q.
Deshalb *kann* ich sie als Matrizen schreiben.
Es gibt ein starkes Standardset von Methoden, um Matrizen zu bearbeiten.
Deshalb ist es auch sinnvoll.

10: T_{ij}, V_{ij} Matrizen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Mit 8 Koordinaten werden die Ausdrücke zu lang. Um das einfacher zu schreiben, betrachten wir stattdessen 3 Koordinaten: $T = \frac{M}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2)$

$$T = \frac{M}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 & \dot{x}_2 & \dot{x}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 \\ 0 & 0 & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \dot{x}_i T_{ij} \dot{x}_j$$

Für diese Koordinaten ist T_{ij} diagonal. Aber das ist koordinatenabhängig.
Wenn $V(x_1, x_2, x_3) = \frac{D_1}{2}(x_1 - x_2)^2 + \frac{D_2}{2}(x_1 - x_3)^2$ ist, könnten wir das umschreiben:

$$\frac{D_1}{2}(x_1 - x_2)^2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 & -D_1 & 0 \\ -D_1 & D_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\frac{D_2}{2}(x_1 - x_3)^2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_2 & 0 & -D_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -D_2 & 0 & D_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$V = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_1 + D_2 & -D_1 & -D_2 \\ -D_1 & D_1 & 0 \\ -D_2 & 0 & D_1 + D_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} x_i V_{ij} x_j$$

11: N gekoppelte Oszillatoren, Matrizen

Bei N gekoppelte Oszillatoren haben wir:

$$L(q_i, \dot{q}_i) = \frac{1}{2} T_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j - \frac{1}{2} V_{ij} q_i q_j \qquad \text{Lagrangefunktion}$$

$$\sum_j T_{ij} \ddot{q}_j = -\sum_j V_{ij} q_j \qquad \text{Euler-Lagrange Gleichungen}$$

N 2. Ordnung gDGl. Wir suchen $2N$ unabhängige Lösungen.

Geratenen Ansatz: $\quad q_j = c\, a_j\, \cos(\omega t)\,, \qquad \sum_j a_j^2 = 1$

Zeitabhängigkeit:

$$\begin{aligned} \ddot{q}_j &= \frac{d^2}{dt^2} c\, a_j\, \cos(\omega t) \\ &= -\omega^2\, c\, a_j\, \cos(\omega t) \end{aligned}$$

Euler-Lagrange: $\quad \sum_j -c\,\omega^2 T_{ij} a_j\, \cos(\omega t) = -\sum_j c V_{ij} a_j\, \cos(\omega t)$

nur wann $\quad \sum_j \left(-\omega^2 T_{ij} + V_{ij}\right) a_j = 0$

12: a_j als Eigenvektor

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Wirklich, zwei Lösungen gefunden:

$$q_j = a_j \left(c \cos(\omega t) + s \sin(\omega t) \right) ,$$

mit (c, s) zwei unabhängige Koeffizienten.
Wir können die zwei Koeffizienten kompakter umschreiben:

$$q_j = \mathrm{Re}\, k\, e^{-i\omega t}\, a_j , \qquad k = c + is \in \mathcal{C} .$$

Hier müssen (ω, a_j) die folgende Bedingung erfüllen:

$$\sum_j \left(-\omega^2 T_{ij} + V_{ij} \right) a_j = 0 .$$

Hier ist a_j ein null Eigenvektor der Matrix $-\omega^2 T_{ij} + V_{ij}$, und ω^2 ist ähnlich wie ein Eigenwert – aber noch nicht ganz genau....

13: Die Matrix T_{ij}

Die kinetische Energie ist $T = \frac{1}{2}\sum_{ij} \dot{x}_i T_{ij} \dot{x}_j$. Deshalb ist T

- reel.
- symmetrisch $T_{ij} = T_{ji} \to$ reele Eigenwerte, orthogonale Eigenvektoren.
- positiv: alle Eigenwerte müssen > 0 sein, dass T immer > 0 bleibt.
- invertierbar.

(Wenn die Eigenwerte und Eigenvektoren t_a und $\xi_{a,i}$ sind, $T_{ij}\xi_{a,j} = t_a \xi_{a,i}$ mit $\sum_i \xi_{ai}\xi_{bi} = \delta_{ab}$, ist $T_{ij} = \sum_a t_a \xi_{ai}\xi_{aj}$, und $T^{-1}_{ij} = \sum_a t_a^{-1}\xi_{ai}\xi_{aj}$.)

$$0 = \sum_j \left(-\omega^2 T_{kj} + V_{kj}\right) a_j \qquad \text{Mal } T^{-1}_{ik} \text{ ist}$$

$$0 = \sum_i T^{-1}_{ik} \sum_j \left(-\omega^2 T_{kj} + V_{kj}\right) a_j$$

$$0 = \sum_j \left(-\omega^2 \delta_{ij} + (T^{-1}V)_{ij}\right) a_j$$

ω^2 sind die Eigenwerte, und a_j die Eigenvektoren, der Matrix $T^{-1}V$.

14: Wiederholung: Eigenvektorprobleme

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Für eine $N \times N$ Matrix D_{ij} ist

$$\text{Det}\ \left(-\lambda\delta_{ij} + D_{ij}\right) = c_0\lambda^0 + c_1\lambda^1 + ... + c_N\lambda^N$$

das charakteristische Polynom, ein Polynom N-ter Ordnung. Es hat N Wurzeln $\lambda_1, ..., \lambda_N$. Diese sind die Eigenwerte der Matrix. Für jeden Eigenwert λ_r ist

$$\text{Det}\ \left(-\lambda_r\delta_{ij} + D_{ij}\right) = 0$$

Die Matrix ist singulär. Deshalb *muss* es ein $a_{i,r}$ geben, wobei

$$\left(-\lambda_r\delta_{ij} + D_{ij}\right) a_{j,r} = 0 \quad \text{oder} \quad D_{ij}a_{j,r} = \lambda_r a_{i,r}\ .$$

Um die λ_r-Werte zu finden, muss man die Wurzeln eines Polynoms N-ter Ordnung finden. $N \leq 4$: Algorithmus. $N > 4$: numerisch (im Allgemeinen)

Für größere Matrizen muss das Eigenwert/Vektorproblem numerisch gelöst werden.

15: Entartete Eigenwerte

Ein Polynom N-ter Ordnung ist

$$c_0\lambda^0 + ... + c_N\lambda^N = \prod_{r=1}^{N}(\lambda - \lambda_r)\,, \qquad \lambda_r \text{ die Eigenwerte.}$$

Es kann sein, dass $\lambda_r = \lambda_s$ (das heißt, ein $(\lambda - \lambda_r)^2$ passiert).
Dann gibt es 2 linear unabhängige Eigenvektoren

$$(D_{ij} - \lambda_r\delta_{ij})a_{j,r} = 0 = (D_{ij} - \lambda_r\delta_{ij})a_{j,s}\,.$$

Eine willkürliche Linearkombination ist ebenfalls ein Eigenvektor:

$$(D_{ij} - \lambda_r\delta_{ij})(c_1 a_{j,r} + c_2 a_{j,s}) = 0$$

Wenn $a_{i,r}$ und $a_{i,s}$ nicht orthogonal sind, kann ich immer Linearkombinationen finden, die orthogonal sind. Ein Algorithmus dafür ist das Gram-Schmidt'sches Verfahren.
Wenn Sie das nicht kennen, sollten Sie es googeln.
Der Artikel in Wikipedia ist ganz gut.

16: Die allgemeinen Lösungen

$$
\begin{aligned}
\text{Lagrangefunktion} \qquad L(q_i, \dot{q}_i) &= \frac{1}{2} T_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j - \frac{1}{2} V_{ij} q_i q_j \\
\text{Euler-Lagrange} \qquad T_{ij} \ddot{q}_j &= -V_{ij} q_j \\
\text{Lösung} \qquad q_j &= \sum_{r=1}^{N} \mathrm{Re}\, k_r\, a_{r,j}\, e^{-i\omega_r t} \\
&= \sum_{r=1}^{N} a_{r,j} \left(c_r \cos(\omega_r t) + s_r \sin(\omega_r t) \right)
\end{aligned}
$$

sind $2N$ unabhängige Lösungen.
Hier sind ω_r^2 die Eigenwerten der Matrix $T^{-1} V$,
und $a_{r,j}$ sind die zugehörigen Eigenvektoren.

17: Beispiel: Schaukel, 2 Kinder

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Zwei Kinder auf Schaukeln. Die Stange ist nicht ganz starr!

$$L = \frac{m_1 \ell_1^2}{2} \dot{\theta}_1^2 + \frac{m_2 \ell_2^2}{2} \dot{\theta}_2^2 - \frac{m_1 g \ell_1}{2} \theta_1^2 - \frac{m_2 g \ell_2}{2} \theta_2^2 - k \theta_1 \theta_2$$

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} m_1 \ell_1^2 & 0 \\ 0 & m_2 \ell_2^2 \end{bmatrix}, \quad V_{ij} = \begin{bmatrix} m_1 g \ell_1 & k \\ k & m_2 g \ell_2 \end{bmatrix}.$$

$$T^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{m_1 \ell_1^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_2 \ell_2^2} \end{bmatrix}, \qquad T^{-1} V = \begin{bmatrix} \frac{g}{\ell_1} & \frac{k}{m_1 \ell_1^2} \\ \frac{k}{m_2 \ell_2^2} & \frac{g}{\ell_2} \end{bmatrix},$$

$$\omega_\pm = \frac{g(\ell_1 + \ell_2)}{2 \ell_1 \ell_2} \pm \sqrt{a + b},$$

$$a = \frac{k^2}{m_1 m_2 \ell_1^2 \ell_2^2}, \qquad b = \frac{g^2 (\ell_1 - \ell_2)^2}{4 \ell_1^2 \ell_2^2}.$$

18: Schaukel, 2 Kinder

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

2 interessante Fälle:

1. $\ell_1 > \ell_2$ und $k \ll mg(\ell_1 - \ell_2)$.
   Die Kinder haben verschiedene Schwingungsfrequenzen:

$$\omega_+ \simeq \frac{g}{\ell_2}\,,\ a_+ = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\,, \qquad \omega_- \simeq \frac{g}{\ell_1}\,,\ a_- = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\,.$$

   Das eine oder das andere Kind schwingt.

2. $k \gg mg(\ell_1 - \ell_2)$, z.B. $\ell_1 = \ell_2$:

$$\omega_\pm = \frac{g}{\ell} \pm \frac{k}{\ell^2\sqrt{m_1 m_2}}\,, \quad a_+ \propto \begin{bmatrix} m_2^{1/4} \\ m_1^{1/4} \end{bmatrix}\,, \quad a_- \propto \begin{bmatrix} m_1^{1/4} \\ -m_2^{1/4} \end{bmatrix}\,.$$

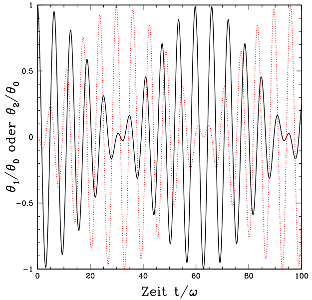
   Die Kinder schwingen zusammen oder versetzt.

19: Und wenn nur ein Kind schwingt?

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Was passiert wenn $m_1 = m_2$, $\ell_1 = \ell_2$, und am Anfang schwingt nur Kind 1?

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$



Das ist eine Mischung von (zusammen) und (versetzt).

$$\theta_1(t) = \frac{\theta_0}{2}\left(\cos(\omega_+ t) + \cos(\omega_- t)\right)$$

$$\theta_2(t) = \frac{\theta_0}{2}\left(\cos(\omega_+ t) - \cos(\omega_- t)\right)$$

Schwebungen: $T_s = \dfrac{2\pi}{\omega_+ - \omega_-}$

20: Summary in English

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

When a potential function $V(q_1, \dots, q_N)$ has a minimum and q_i stay close to the minimum, we can work to quadratic order:

$$L(q_i, \dot{q}_i) = \frac{1}{2} T_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j - V_{ij} q_i q_j$$

This is a coupled system of harmonic oscillators. We solve it by finding the inverse of the T_{ij} matrix, T_{ij}^{-1}, and solving the eigenvalue / eigenvector problem for $T^{-1}V$:

$$(T_{ik}^{-1} V_{kj}) a_{w,j} = \omega_w^2 a_{w,i}\,, \quad w = 1, \dots, N$$

in which case the most general solution is:

$$q_i(t) = \sum_w a_{w,i} \left(c_{w,c} \cos(\omega_w t) + s_{w,s} \sin(\omega_w t) \right) \,.$$

Here $c_{w,c}$, $c_{w,s}$ are $2N$ parameters which give the most general solution.
When two frequencies are close to each other, one can observe **beats.**