Theoretische Physik I:

Vorlesung 2: Newton'sche Axiome, Konservative Kräfte

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Heute wiederholen wir die Newton'sche Mechanik.
Es gibt ein paar Gründe:

- Dass wir alle am gleichen Anfangspunkt sind
- Dass wir alle ein paar Konzepte und Notationen festhalten.

Inhalt (Heute)

- Newton II und Newton III
- Offene und Geschlossene Systeme
- Gesamter Impuls und Schwerpunkt
- Drehimpuls und Drehmoment
- Konservative Kräfte
- Energie und andere Erhaltungsgröße

(Eine Mischung: Sprache/Beschreibung, Gesetze)

Newton II

Axiom II (Newton II)
Jeder Körper hat eine Trägheit m, und wir nennen $m\vec{v} \equiv \vec{p}$ das **Impuls**.

$$\textbf{Kraft} \quad \vec{F} = \frac{d}{dt}\vec{p} = \frac{d}{dt}m\vec{v} = \dot{m}\vec{v} + m\vec{a}$$

(wenn m fest ist, $\vec{F} = m\vec{a}$, wobei $\vec{a} = \dot{v}$ die Beschleunigung ist.)

Axiom II ist wirklich mehr ein Begriff für Kraft.
Es wird jedoch auch ein wieteres neues Konzept eingeführt: Trägheit.
Wir müssen die Bedeutung der Trägheit ein wenig genauer erklären.

Trägheit und Masse

Trägheit bedeutet: wieviel Kraft es braucht, ein Objekt zu beschleunigen.

Oft benutzt man “Masse” statt “Trägheit.” Das Problem ist, dass Masse zwei Bedeutungen haben kann:

- Masse bedeutet Trägheit (Trägheitsmasse)
- Masse bedeutet Gravitative Masse – wie stark ein Körper an anderen Körpern zieht, durch Gravitation. (Das werden wir später weiter diskutieren.)

Es ist eine tiefgreifende und nicht triviale Tatsache, dass diese beiden Arten von Masse proportional sind.

Solange wir nicht über die Gravitation diskutieren, brauchen wir auch nicht über die gravitative Masse zu sprechen, und deshalb werden wir im Folgenden manchmal Masse und Trägheit synonym verwenden.

Newton III

Axiom III (Newton III)
Jede Kraft hat eine Gegenkraft. Eine Kraft von Körper A auf Körper B, F_{AB}, geht immer mit einer gleich großen, aber entgegen gerichteten Kraft von Körper B auf Körper A einher.

$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA} \quad \Rightarrow \quad \frac{m_A}{m_B} = \frac{|\ddot{\vec{r}}_B|}{|\ddot{\vec{r}}_A|}$$

Axiom III hat zwei Aspekte:

- Kräfte kommen in Paaren, die in Gegenrichtung zeigen, und
- Das Verhältnis der Beschleunigungen ist der Kehrwert vom Verhältnis der Trägheiten.

Newton III: Diskussion

Newton III ist nicht trivial. Nur jetzt sehen wir, warum Trägheit wichtig ist.
Betrachten Sie 3 Körper A, B, und C, mit Trägheiten m_A, m_B, und m_C.
Wenn A eine Kraft auf B ausübt, und B im Gegenteil auf A eine Kraft ausübt, sind die Beschleunigungen im Verhältnis

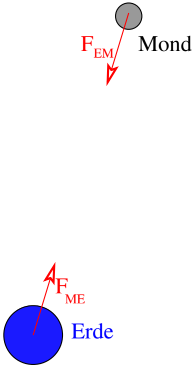
$$\frac{|\dot{v}_A|}{|\dot{v}_B|} = \frac{m_B}{m_A}$$

Dadurch *messen* wir das Verhältnis m_B/m_A.
Wir können die gleiche Methode zur Messung von m_C/m_B verwenden.
Aber dann wissen wir *automatisch*, in welchem Verhältnis die Kräfte sind, wenn A und C sich ausüben:

$$\frac{|\dot{v}_A|}{|\dot{v}_C|} = \frac{m_C}{m_A}, \qquad \text{wobei} \quad \frac{m_C}{m_A} = \frac{m_C}{m_B}\,\frac{m_B}{m_A} = \frac{|\dot{v}_B|}{|\dot{v}_C|}\,\frac{|\dot{v}_A|}{|\dot{v}_B|}$$

wobei die letzten zwei verhältnise schon gemessen sind....

Beispiel: Gravitation



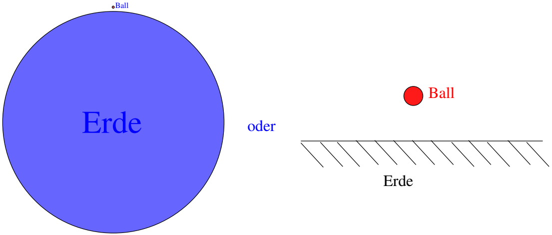
Zwei Körper – z.b. Erde und Mond –
wirken durch Gravitation aufeinander ein.
Die Kraft nimmt die Form:

$$F_{EM} = \frac{-G_N M_E M_M \vec{r}_{EM}}{|r_{EM}|^3}$$

Hier ist F_{EM} die auf den Mond wirkende Kraft,
und $\vec{r}_{EM}$ ist der Vektor von der Erde zum Mond.
M_E und M_M sind die (Gravitative) Massen der Erde und des Mondes
und G_N ist das Newton'sche Konstant.
Das $-$ Zeichen bedeutet, dass die Kraft attraktiv ist.

Wir werden später viel mehr über Gravitation sprechen.
Ich wollte nur ein Beispiel geben, mit 2 Körper, Kraft, und Gegenkraft.

Noch ein Beispiel: Erde und Ball



Wir haben immer noch

$$F_{EB} = -\frac{G_N M_E M_B \vec{r_{EB}}}{|r_{EB}|^3}$$

aber jetzt ist M_E so viel größer als M_B, dass $\ddot{r}_E \simeq 0$ ist.
Die Erde bewegt sich nicht, nur der Ball bewegt sich.

Systeme ohne Umgebung und mit Umgebung

Es gibt Systeme, wobei alle relevanten Komponenten sich bewegen (z.B. Erde und Mond). Dann sollen wir alle Komponenten *als unser System* betrachten.
Solche Systeme nennen wir *geschlossene Systeme*.

Aber oft ist eine Komponente soviel größer und schwerer, dass sie praktisch keine Bewegung hat.
In diesem Fall ist es praktischer, die leichten Komponenten als *unser System* zu betrachten, und die schwere Komponente als *Umgebung*.
Solche Systeme nennen wir *offene Systeme*.

Diese Unterscheidung werden wir häufig treffen müssen.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Betrachten wir N Teilchen (Planete, oder Kettenglieder, oder ...)

$$M_i \qquad \text{Masse, der } i\text{'te Teilchen} \tag{1}$$

$$\vec{r}_i \qquad \text{Koordinatenvektor, der } i\text{'te Teilchen} \tag{2}$$

$$\vec{F}_i \qquad \text{Kraft auf der } i\text{'te Teilchen} \tag{3}$$

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{\text{ext}} + \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji} \tag{4}$$

Vorsicht! In $\vec{r}_i$, i läuft nicht über $1, 2, 3 = x, y, z$, sondern über $1, 2, ...$ die Liste von Teilchen.
Hier stellt $\vec{F}_i^{\text{ext}}$ die *externe* oder *äußere* Kraft dar, die auf das Teilchen i wirkt.

Mehrteilchen: gesamter Impuls

Jeder Teilchen hat einen Impuls $\vec{p}_i = m_i \dot{\vec{r}}_i$.
Wir nennen die Summe, $\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i$, der **gesamte Impuls**.
Seine Zeitableitung ist gegeben durch

$$\frac{d}{dt}\vec{P} = \sum_i \frac{d}{dt}\vec{p}_i = \sum_i \vec{F}_i = \sum_i \vec{F}_i^{\text{ext}} + \sum_i \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji}$$

Die Doppelsumme enthält Paare von Begriffen der Form $F_{ij} + F_{ji}$.
Wegen **Newton III** ist $F_{ij} + F_{ji} = 0$! Deshalb ist

$$\frac{d}{dt}\vec{P} = \sum_i \vec{F}_i^{\text{ext}} \equiv \vec{F}^{\text{ext}}$$

Der gesamte Impuls ändert sich nur durch externe Kräfte.
In geschlossenen Systemen gibt es keine externen Kräfte, und $\frac{d}{dt}\vec{P} = 0$.

Mehrteilchen: Schwerpunkt

Wir nennen

$$M \equiv \sum_i m_i \qquad \textbf{gesamte Masse}$$

$$\vec{r}_\mathrm{s} \equiv \frac{1}{M}\sum_i m_i \vec{r}_i \qquad \textbf{Schwerpunkt oder Massenmittelpunkt}$$

Wir finden:

$$\vec{P} = \sum_i m_i \vec{v}_i = \sum_i m_i \frac{d}{dt}\vec{r}_i = M\frac{d}{dt}\vec{r}_\mathrm{s}$$

Der Gesamtimpuls **ist** der Impuls des Schwerpunkts.
Noch eine weitere Zeitableitung:

$$\frac{d}{dt}\vec{P} = \vec{F}^\mathrm{ext} = M\frac{d^2}{dt^2}\vec{r}_\mathrm{s}$$

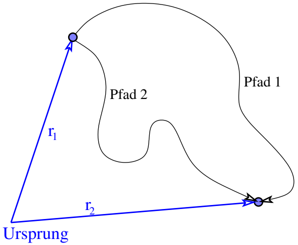
der **Schwerpunktsatz** (der Schwerpunkt bewegt sich wie ein eigenes Teilchen)

Arbeit und Potentialenergie

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wir definieren Arbeit W durch:

$$dW \equiv \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad \text{für infinitesimale } d\vec{r} \quad \Rightarrow \quad \Delta W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t, ...) \cdot d\vec{r}$$



Oft ist Arbeit Pfad-abhängig.
Aber oft ist es gleich für alle Pfade

$$\int_{\text{Pfad 1}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\text{Pfad 2}} \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad \Rightarrow \quad \oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

Das passiert genau dann, wenn $\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} V(\vec{r})$.
Solche Kräfte nennen wir **konservative Kräfte**,
und wir nennen $V(\vec{r})$ die **Potentialenergie**.

Energie

$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{\nabla} V(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = V(\vec{r}_1) - V(\vec{r}_2)$$

Arbeit = Potentialunterschied.

(Wenn etwas fällt, geht es von hoher zu niedriger potentieller Energie über. $V(\vec{r}_1) - V(\vec{r}_2)$ ist positiv, Gravitation macht Arbeit, $W > 0$.)

Wenn ein Teilchen sich unter einer konservativen Kraft bewegt,

$$\frac{dV}{dt} = -\vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = -m\dot{\vec{v}} \cdot \vec{v} = -\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\vec{v}^2\right)$$

Deshalb nennen wir $T \equiv m\vec{v}^2/2$ die **kinetische Energie**. Und

$$\textbf{Energie}\ E \equiv V + T \quad \text{gehorcht} \quad \frac{dE}{dt} = \frac{dV}{dt} + \frac{dT}{dt} = -m\dot{\vec{v}} \cdot \vec{v} + m\dot{\vec{v}} \cdot \vec{v} = 0\,.$$

Energiehaltungssatz

Schwerpunkt, Kinetische Energie

Wir können $\vec{r}_i$ in Schwerpunktskoordinate und relative Koordinate zerlegen:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_\mathrm{s} + \vec{r}_{i,r} \qquad \text{(wobei } \vec{r}_{i,r} = \vec{r}_i - \vec{r}_\mathrm{s} \text{ die relative Koordinate ist)}$$

Bemerkung: $\sum_i m_i \vec{r}_{i,r} = 0 = \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_{i,r} \equiv \sum_i p_{i,r}$.
Die gesamte kinetische Energie ist:

$$\begin{aligned} T = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i \quad &= \quad \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_\mathrm{s}^2 + \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_\mathrm{s} \cdot \dot{\vec{r}}_{i,r} + \frac{1}{2} \sum_i m_i (\dot{\vec{r}}_{i,r})^2 \\ = \frac{1}{2} M \dot{\vec{r}}_\mathrm{s}^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_{i,r}^2 \quad &\equiv \quad T_\mathrm{s} + T_r \end{aligned}$$

T ist eine Summe von Schwerpunkts- und Relativbewegungsenergie.

Drehimpuls

F: Warum ist Energie nützlich?

A: Für konservative Kräfte ist es eine *Erhaltungsgröße*.

Aber ist sie die eigene Erhaltungsgröße? **Nein** (oder nicht immer)

$$\textbf{Drehimpuls} \qquad \vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \sum_i m\vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i$$

wird oft auch erhalten. Warum?

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\vec{L} &= \sum_i \frac{d}{dt}\left(m_i\vec{r}_i \times \dot{\vec{r}}_i\right) \\
&= \sum_i m_i\dot{\vec{r}}_i \times \dot{\vec{r}}_i + \sum_i m_i\vec{r}_i \times \ddot{\vec{r}}_i \\
&= 0 + \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i \\
&= \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{\text{ext}} + \sum_i \sum_{j \neq i} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ji}
\end{aligned}$$

Drehimpuls

$$\vec{L} \equiv \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{\mathrm{ext}} + \sum_i \sum_{j \neq i} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ji}$$

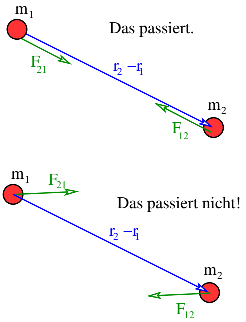
Es ist eine experimentelle Tatsache (bei Gravitations- und elektrischen Kräften), dass:

$$(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ij} = 0$$

Das heißt, $\vec{F}_{ij} \parallel (\vec{r}_i - \vec{r}_j)$. Deshalb ist

$$\vec{r}_i \times \vec{F}_{ji} + \vec{r}_j \times \vec{F}_{ij} = 0$$

Diese Begriffe heben sich paarweise auf!



$$\text{Drehmoment} \quad N \equiv \frac{d}{dt}\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{\mathrm{ext}}$$

Drehimpuls und Schwerpunkt

Bemerkung: $\vec{L}$ ist Koordinatenursprungabhängig.
Wenn wir $\vec{r}_s$ als Koordinatenursprung benutzen, finden wir $\vec{L}_s$:

$$\vec{L} = \vec{r}_s \times M\dot{\vec{r}}_s + L_s$$

$$\vec{r}_s \times M\dot{\vec{r}}_s \text{ heißt } \textit{Bahndrehimpuls}$$

$$L_s = \sum_i m_i \vec{r}_{i,r} \times \dot{\vec{r}}_{i,r} \text{ heißt Eigendrehimpuls}$$

$$\frac{d}{dt} L_s = N_s = \sum_i \vec{r}_{i,r} \times \vec{F}_i^{\text{ext}} \,.$$

Inertialsysteme

Wenn es keine externen Kräfte gibt (z.B. für geschlossene Systeme), nennen wir das System ein **Inertialsystem**.
Wir finden automatisch 1 Skalar und 3 Vektor Erhaltungsgrößen:

- Energie $E = T + V$
- Gesmtimpuls $\vec{P} = M\dot{\vec{r}}_\mathrm{s}$
- Drehimpuls $\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i$
- $M\vec{r}_\mathrm{s}(t) - tP$ (hat keinen Namen; oft ignoriert.)

Summary: Axioms, Forces, etc.

Newton II: Defining the momentum $\vec{p} = m\vec{v}$ (with m the inertial mass), Force is

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}\vec{p} = \dot{m}\vec{v} + m\dot{\vec{v}} = m\dot{\vec{v}} = ma \text{ if } m \text{ is constant}$$

It is a deep fact that the inertia or inertial mass (m appearing in Newton II) is proportional to the gravitational mass (which will appear later in Newton's Universal Law of Gravitation).

Newton III: Forces come in pairs. If 1 acts on 2 with force $\vec{F}_{12}$, then 2 acts on 1 with force $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$. Therefore $|\vec{a}_1|/|\vec{a}_2| = m_2/m_1$.

Defining **Work** $W = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$, we often find that W is independent of the path from $\vec{r}_1$ to $\vec{r}_2$. Then we can define $V(\vec{r})$ such that $V(\vec{r}_1) - V(\vec{r}_2) = W$, or $\vec{F} = -\vec{\nabla} V$.
In this case, the *energy* $E = T + V$, with $T = m\vec{v}^2/2$ the *kinetic energy*, is conserved.

Summary, Page 2

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

For an N-particle system with masses m_i, coordinates $\vec{r}_i$,

- The total *momentum* $\vec{P} = \sum_i m\dot{\vec{r}}_i$ obeys $\dot{\vec{P}} = \vec{F}^{\text{ext}} = \sum_i \vec{F}_i^{\text{ext}}$
- The *center of mass* $\vec{r}_s = \frac{1}{M}\sum_i m_i\vec{r}_i$ obeys $\vec{P} = M\dot{\vec{r}}_s$ and $M\ddot{\vec{r}}_s = \vec{F}^{\text{ext}}$
- *Kinetic energy* is the sum of a center-of-mass and a relative component.
- *Angular momentum* $\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i$ evolves due to *Torque* $\vec{N} = \dot{\vec{L}} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{\text{ext}}$
- Angular momentum can be decomposed into two components: $\vec{L} = \vec{L}_{\text{orb}} + \vec{L}_{\text{spin}}$, with $\vec{L}_{\text{orb}} = \vec{r}_s \times \vec{P}$ the orbital angular momentum and $L_{\text{spin}} = \sum_i m_i\vec{r}_{i,r} \times \dot{\vec{r}}_{i,r}$ the *spin* angular momentum.